1 Exercices

1.1 Calculs de dérivées.

1) Soit $E = \{f_{a,b,c,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_{a,b,c,d}(t) = [at^3 + bt^2 + ct + d]e^t \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$ et $u_1 = f_{0,0,0,1}, u_2 = f_{0,0,1,0}, u_3 = f_{0,1,0,0}, u_4 = f_{1,0,0,0}$.

(a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que la dérivation induit une application linéaire $D : E \to E, D(f) = f'$ dont on donnera la matrice :

i. M_u dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4)

ii. M_v dans la base $(v_1 = u_1, v_2 = u_2, v_3 = \frac{1}{2}u_3, v_4 = \frac{1}{6}u_4)$

(b) Soit $N = M_v - I$ Calculer N^2, N^3, N^4 puis $M_v \cdot [1 - N + N^2 - N^3] = [1 + N] \cdot [1 - N + N^2 - N^3]$. En déduire

(c) que D est un isomorphisme linéaire et donner la matrice de D^{-1}

i. M_v^{-1} dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4)

ii. M_u^{-1} dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4)

2) Soit $E_{n+1} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = e^t[a_nt^n + \cdots + a_0] = e^t \sum_{i=0}^{n} a_it^i \mid (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ et pour $0 \leq i \leq n, e_i, f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, e_i(t) = t^i, f_i(t) = \frac{t^i}{i!}$

(a) Prouver que E_{n+1} est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de l'espace vectoriel des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que la dérivation induit une application linéaire $D : E_{n+1} \to E_{n+1}, D(f) = f'$ dont on donnera les matrices

i. M_e dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

ii. M_f dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

(b) Soit $N = M_f - I$ Calculer $N^2, N^3, \cdots, N^n, N^{n+1}$, puis $M_f \cdot [1 - N + N^2 + \cdots + (-1)^n N^n] = [1 + N] \cdot \sum_{j=0}^{n} (-1)^j N^j$. En déduire

(c) que D est un isomorphisme linéaire et donner la matrice de D^{-1}

i. M_f^{-1} dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

ii. M_e^{-1} la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

3) Soit $c, d, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0)$ et

$$E_\alpha = \{f = f_{a,b} :] - \frac{d}{c}, +\infty[\to \mathbb{R}, f(t) = \frac{at + b}{(ct + d)^\alpha} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Pouver que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et dérivables sur $] - \frac{d}{c}, +\infty[$.

(b) Donner l'expression de $f'_{a,b}$. En déduire que :

(c) La dérivation induit une application linéaire $D : E_\alpha \to E_{\alpha+1}$ qui

(d) est de noyau nul si et seulement si $\alpha \notin \{0, 1\}$.

(e) Prouver que si $\alpha \notin \{0, 1\}$ alors D est un isomorphisme et déterminer l'isomorphisme inverse $D^{-1} : E_{\alpha+1} \to E_\alpha$

(f) Dans les cas $\alpha \in \{0, 1\}$, déterminer l'image et le noyau de D.

Dans les exercices suivants on ne demande pas de justifier la dérivabilité des fonctions considérées, mais de calculer leurs dérivées à l'aide des propriétés algébriques de la dérivation et la formule dérivation de fonctions composées.

4) Calculer les dérivées des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $\frac{1}{4}[3 + 2t - 3\,\mathrm{Log}(3 + 2t)]$

(b) $\frac{1}{2}\mathrm{Log}(8t + 3 + 4\sqrt{5 + 3t + 4t^2})$

(c) $\frac{1}{243}\mathrm{Log}(\frac{t^3}{t^3 + 81})$

(d) $\sqrt{(3 + t)(2 + t)} + \mathrm{Log}(\sqrt{3 + t} + \sqrt{2 + t})$

(e) $\frac{e^{7t}}{50}(7\cos(t) + \sin(t))$

(f) $\frac{e^{7t}}{50}(7\sin(t) - \cos(t))$

5) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ des réels non tous deux nuls ($a^2+b^2 \neq 0$).
Calculer les dérivées des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $b\,\mathrm{Log}(\dfrac{a+bt}{t}) - \dfrac{a}{t}$

(b) $\dfrac{a}{2(a+bt)^2} - \dfrac{1}{a+bt}$

(c) $\mathrm{Log}(\dfrac{\sqrt{bt+a^4}-a^2}{\sqrt{bt+a^4}+a^2})$

(d) $2\,\mathrm{Arctg}(\sqrt{\dfrac{bt-a^4}{a^4}})$

(e) $\mathrm{Log}(t+\sqrt{t^2+a^2}) - \dfrac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}$

(f) $t\sqrt{t^2+a^2}$
$- a^2\,\mathrm{Log}(t+\sqrt{t^2+a^2})$

6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = (2t+1)(t+3)(t-3)$

(a) Développer $(2t+1)(t+3)(t-3)$, en déduire $f'(t)$.

(b) Par dérivation logarithmique donner une autre expression pour $f'(t)$.

(c) Vérifier la cohérence des deux résultats.

7) Reprendre l'exercice **6a)** avec d'autres exemples :
$f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(t) = (2t+3)(t+2)(t-5), f_2(t) = (3t+2)(t-2)(t-7), \ldots$

8) Soit $g : I \to]0,+\infty[, f : I \to \mathbb{R}$ dérivales et $\alpha \in [1,+\infty[$.
On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}, h(t) = \dfrac{f(t)}{(g(t))^\alpha}$

(a) Calculer h' dans les cas $I = [1,+\infty[, g(t) = t-1$

i. $\alpha = 1$ et $f(t) = t-2$

ii. $\alpha = 3$ et $f(t) = t-2$

(b) Dans le cas général, déterminer h' avec la formule de dérivée d'un quotient, et observer dans le résultat une simplification par $(g(t))^{\alpha-1}$.

(c) Retrouver le résultat précédent par dérivation logarithmique.

(d) Le résultat aurait-il été vrai (interessant ?) si $\alpha \in]-\infty, 1[$?

9) Calculer les dérivées des fonctions $f, g :]-1,1[\to \mathbb{R}$

(a) $f(t) = \dfrac{(\sqrt{1-t})\sqrt[3]{1+t^2}}{\sqrt{(2+t^3)^3}}$ [Utiliser dérivée logarithmique et la notation puissance d'exposant réel !]

(b) $g(t) = \dfrac{(\sqrt[4]{1+2t})\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(2+t^5)^7}}$
[Utiliser dérivée logarithmique et la notation puissance d'exposant réel !]

10) Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{Log}(\sqrt{t^2+1}+t),\ g(t) = \mathrm{Log}(\sqrt{t^2+1}-t)$

(a) Prouver que ces applications sont bien définies.

(b) Calculer les dérivées f' et g'.

(c) Que vaut $f'+g'$? Aurait-on pu prévoir ce dernier résultat ?

11) Soit $f_h, g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_h(t) = \mathrm{Log}(\sqrt{t^2+h^2}+t),\ g_h(t) = \mathrm{Log}(\sqrt{t^2+h^2}-t)$.

(a) Reprendre l'exercice **10b)** avec f_h et g_h.

(b) Soit $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi_h(s) = hs$. Déterminer $f_h \circ \varphi_h$ et $g_h \circ \varphi_h$.
[Le réel $h \in \mathbb{R}$ a un signe $(-,0,+)$, tenez en compte !] En déduire :

(c) Quand $h \neq 0$, une «solution sans calcul» [une fois **10b)** fait !] de **11a)**.

Les trois exercices suivants sont des application importantes de la caractérisation des fonction monotones dérivables.

12) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier non nul et $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f_n(t) = nt^{\frac{1}{n}}$

(a) Calculer f_n' et si $t \geq 1$ et comparer $f_n'(t)$ et $\mathrm{Log}'(t) = \frac{1}{t}$.

(b) En déduire, toujours si $t \geq 1$, l'encadrement :

$$|n|\left[t^{\frac{1}{|n|}}-1\right]t^{-\frac{1}{|n|}} = -|n|\left[t^{-\frac{1}{|n|}}-1\right] \leq \mathrm{Log}(t) \leq |n|\left[t^{\frac{1}{|n|}}-1\right]$$

(c) Donner un encadrement analogue de $\mathrm{Log}(t)$ si $0 < t \leq 1$.

13) On rapelle que le graphe de la fonction exponentielle est au dessus de sa tangente[1] en son point d'abscisse 0 *c. a d.* pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t) \geq 1+t$.

(a) On suppose $t \geq 0$

[1] Aussi vrai pour tout point $(t_0, \exp(t_0))$ du graphe : $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t) \geq \exp(t_0) + (t-t_0)\exp(t_0)$. [Une telle fonction est dite *convexe (dérivable)*].

i. En comparant les dérivées de exp et $s \mapsto 1+s+\frac{s^2}{2}$ établir :

$$1+t+\frac{t^2}{2} \leq \exp(t)$$

ii. En général prouver que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = 1+t+\cdots+\frac{t^k}{k!}+\cdots+\frac{t^n}{n!} \leq \exp(t)$$

(b) On suppose $t \leq 0$

i. En comparant les dérivées de exp et $s \mapsto 1+s+\frac{s^2}{2}$ établir :

$$\exp(t) \leq 1+t+\frac{t^2}{2}$$

ii. En déduire pour tout $t \leq 0$ la minoration :

$$1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} \leq \exp(t)$$

iii. En général prouver que pour tout entier naturel $m \in \mathbb{N}$ on a l'encadrement

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{t^k}{k!} \leq \exp(t) \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{t^k}{k!}$$

14) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f = f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

(a) Dans le cas $n = 3$ expliciter f_3 et calculer sa dérivée. En déduire :

i. Si $t \geq 0$ on a $-\frac{t^4}{4!} \leq f_3(t) - 1$, puis la majoration :

$$e^t \leq 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}e^t$$

ii. Si $t \leq 0$ on a $\frac{t^4}{4!}e^{-t} \geq 1 - f_3(t)$, puis la majoration :

$$e^t \leq 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}$$

(b) Dans le cas général calculer la dérivée de f_n. En déduire :

i. Si $t \geq 0$ que $-\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leq f_n(t) - 1$, puis la majoration

$$e^t \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^t$$

ii. Si $t \leq 0$ et $n = 2m-1$ est impair que $\frac{t^{2m}}{(2m)!}e^{-t} \geq 1 - f_{2m-1}(t)$, puis la majoration

$$e^t \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{t^k}{k!}$$

iii. Si $t \leq 0$ et $n = 2m$ est pair que $\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}e^{-t} \leq 1 - f_{2m}(t)$, puis la minoration

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{t^k}{k!} \leq e^t$$

1.2 Trigonométrie.

15) Soit $c : I \to \mathbb{R}^2, c(t) = (x(t), y(t))$ une courbe plane paramétrée pas des fonctions x et y dérivables sur un intervalle I et à dérivée continue.
Si $u, v \in I, u < v$ la *longueur de l'arc de la courbe c entre $c(u)$ et $c(v)$* est :

$$\int_u^v \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

(a) Expliciter cette définition dans le cas

$$I =]-1,1[,\ u = 0,\ v = s,\ x(t) = \sqrt{1-t^2},\ y(t) = t$$

(b) Quelle courbe correspond au cas **15a)** ?
Quel résultat du cours retrouve-t-on ainsi ?

16) Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions de trigonométrie hyperbolique sont : $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(a) Vérifier qu'elles sont dérivables,
calculer leurs dérivées et tracer leurs graphes.

(b) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ l'expression : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.

(c) Prouver que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que la bijection réciproque $\mathrm{arcth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable, de dérivée :

$$\mathrm{arcth}' :]-1,1[\to \mathbb{R},\ \mathrm{arcth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

(d) Du calcul, pour $x \in]-1,1[$, de $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ déduire la valeur de $\mathrm{arcth}(x)$.

(e) Dériver $f :]-1,1[\to \mathbf{R},\ f(x) = \mathrm{th}(\frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x}))$ et retrouver **16d)**.

(f) Déterminer directement, pour $y \in]-1,1[$, pour quels $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{th}(x) = y$, comparer le résultat obtenu avec ceux de **16d)** et **16e)**.

(g) Prouver que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de réciproque dérivable :

$$\mathrm{arcsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{de dérivée} \quad \mathrm{arcsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(h) Reprendre, avec sh au lieu de th la question **16f)**, puis comparer le résultat obtenu et celui de **16g)** avec ceux de l'exercice **10b)**.

17) On rappelle les formules d'Euler $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

(a) Linéariser $\cos^3(t)\sin^2(t)$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\, dt$

(c) Retrouver 17b par intégration par partie.

18) Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{Arcsin}(t) + \mathrm{Arccos}(t)$.
Calculer la dérivée de f, en déduire une expression plus simple pour f, puis expliquer géométriquement la relation obtenue.

19) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{Arcsin}(\sqrt{1-t^2})$.

(a) Prouver que f est dérivable sur $]0,1[$ et, si $t \in]0,1[$ calculer $f'(t)$.
En déduire, pour $t \in [-1,1]$, la valeur de $f(t)$.

(b) La fonction f est-elle dérivable sur $[-1,1]$, sur $]-1,1[$?

20) Soit $g :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ et $f = \mathrm{Arctg} \circ g$.

(a) Calculer la dérivée de f, en déduire une autre expression pour $f(x)$.

(b) Soit $x = u - \dfrac{\pi}{2}$. Exprimer $g(x)$ en fonction de fonctions trigonométriques de u puis de $\dfrac{u}{2}$, en déduire une explication du résultat de **20a)**.

(c) Exprimer $g(x)$ en fonction de $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$ et retrouver le résultat de **20a)**.

21) Soit $0 \neq a \in \mathbb{R}$ et $f :]a^{-1}, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{Arctg}(\frac{a+x}{1-ax})$.

(a) Calculer la dérivée de f. En déduire une autre expression pour $f(x)$.

(b) Exprimer $\frac{a+x}{1-ax}$ en fonction de $\alpha = \mathrm{Arctg}(a)$ et $\theta = \mathrm{Arctg}(x)$.

22) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère
le cercle $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ et le point $B = (-1, 0)$.

(a) Donner l'équation de la droite D_t de pente $t \in \mathbb{R}$ et passant par B.

(b) Déterminer, en fonction du réel $t \in \mathbb{R}$,
l'intersection $D_t \cap \mathcal{C}$ de la droite D_t avec le cercle $\mathcal{C}$.

(c) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont tels que $t = \mathrm{tg}(\alpha)$ et $B \neq (\cos(\beta), \sin(\beta)) \in D_t \cap \mathcal{C}$.
Quelle relation a-t-on entre α et β ?

(d) Déduire de ce qui précède, si $\theta \in \mathbb{R}$, des relations exprimant
les fonctions trigonométriques $\cos(\theta), \sin(\theta), \mathrm{tg}(\theta)$
en fonction de la tangente de l'arc moitié $\mathrm{tg}(\dfrac{\theta}{2})$.

23) Soit sur le cercle unité $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$
les point, A, B, M d'affixes $1, -1, z = e^{i\theta}$.

(a) Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$? Faire la figure.

(b) Calculer $|z + 1|^2$ et $\dfrac{(z + 1)^2}{z}$.

(c) On note $\rho = |z + 1|$ et $z + 1 = \rho e^{i\alpha}$. Peut on avoir $\pi \leq |\alpha| \leq 2\pi$?

(d) Déduire de **23b)** une relation entre α et θ,
puis de **23c)** la valeur de α en fonction de θ.

(e) Quel théorème de géométrie ces calculs établissent-ils ?

(f) Compléter **23b)** en exprimant $z + 1$ et z en fonction de $t = \mathrm{tg}(\alpha)$.

24) On rappelle que si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle (de temps) et la position en fonction de $t \in I$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ d'un point est donnée en coordonnées polaires : $M(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ où $\rho, \theta : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables (et $\forall t \in I, \rho(t) \geq 0$) alors sa vitesse $V(t) = \rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)\theta'(t)ie^{i\theta(t)}$ a $\rho'(t)$ comme composante dans la direction $e^{i\theta(t)}$ du rayon vecteur et $\theta'(t)$ dans sa direction «normale directe» $ie^{i\theta(t)}$.

Une souris [2] est à l'instant $t \in [0, +\infty[$ au point $e^{i\theta(t)}$. Un chat[3] se déplace à la même vitesse que la souris de sorte qu'à l'instant $t \in [0, +\infty[$ il soit en $\rho(t)e^{i\theta(t)}$ où $\rho : I \to [0, +\infty[$ est dérivable avec $\rho(0) = 0$.

(a) Si la souris de déplace à vitesse constante $V = 1$ (*c. a d.* $\theta(t) = t$) traduire l'énoncé en une relation liant la fonction ρ et sa dérivée ρ'.

(b) Déduire de **24a)** qu'au temps $t = \frac{\pi}{2}$ le chat aura rattrapé la souris.

(c) Tracer la trajectoire du chat. Pouvait-on, sans ni **24a)** ni **24b)**, par un raisonnement géométrique dire que cette trajectoire était

i. une solution du problème ?

ii. la solution du problème ?

(d) Dans le cas général, traduire l'énoncé en une relation liant la fonction ρ sa dérivée ρ' et la dérivée θ' de la fonction θ.

(e) Supposant la fonction θ donnée et que le chat se rapproche toujours du bord, déduire de **24d)** la trajectoire du chat.

(f) Si la souris ne veut pas être rejointe, a-t-elle intérêt à

i. changer de direction ?

ii. accélerer ?

25) Des encadrements de sin et cos analogues à (**1.1)** et **1.1)**).

(a) Expliquer géométriquement pour tout $t \geq 0$, les majorations :

$$\cos(t) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sin(t) \leq t$$

(b) Ces majorations ont-elle lieu pour tout $t \in \mathbb{R}$?

(c) Déduire de **25a)** que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $-\dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t) - 1 \leq 0$
[supposer d'abord $t \geq 0$], soit $1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

(d) En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a : $t - \dfrac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t$
et pour tout $t \leq 0$ on a : $t \leq \sin(t) \leq t - \dfrac{t^3}{6}$

[2] se déplaçant sur le bord d'un enclos circulaire de rayon 1

[3] étant à tout instant sur le même rayon que la souris et en $t = 0$ au centre de l'enclos

(e) Pour tout $t \geq 0, m \in \mathbb{N}$ établir par récurence les encadrements :

$$\sum_{k=0}^{2m+1}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \cos(t) \leq \sum_{k=0}^{2m}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{2m+1}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sin(t) \leq \sum_{k=0}^{2m}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ces encadrements sont-ils valables pour tout $t \in \mathbb{R}$?

1.3 Primitives et leur calcul.

26) Calculer[4] des primitives des fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent :

(a) $\dfrac{1}{4t^2+12t+34}$ (d) $\dfrac{1}{4t^2+12t-16}$

(b) $\dfrac{1}{9t^2+24t+32}$ (e) $\dfrac{1}{9t^2+24t+7}$

(c) $\dfrac{1}{25t^2+40t+25}$ (f) $\dfrac{1}{25t^2+30t+5}$

27) Par intégration par partie, calculer les intégrales

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$ (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t)\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt$ (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6(t)\,dt$

28) On se propose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de calculer la $n^{\text{ième}}$ *intégrale de Wallis :*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt,$$

(a) Par un changement de variable établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $I_n = J_n$

(b) Calculer I_0 et I_1.

(c) Si $n > 0$, par une intégration par partie dans I_{n+1}, donner une relation entre I_{n+1} et I_{n-1}.

(d) Donner, en utilisant des signes $\prod$ la valeur de I_n [distinguer les cas $n = 2m$ pair et $n = 2m+1$ impair]

(e) Exprimer, en distinguant toujours les cas $n = 2m$ pair et $n = 2m+1$ impair, la $n^{\text{ième}}$ intégrale de Wallis I_n à l'aide de factorielles, puis de coefficients binomiaux.

(f) Etablir pour tout entier positif m l'encadrement $I_{2m+1} < I_{2m} < I_{2m-1}$

(g) En déduire un encadrement de π.

"Résultats numériques"(ou indications) pour quelques exercices

4a $\dfrac{t}{3+2t}$ 4c $\dfrac{1}{t(t^3+81)}$ 4e $e^{7t}\cos(t)$ 5a $\dfrac{a^2}{t^2(a+bt)}$ 5c $\dfrac{a^2}{t\sqrt{bt+a^4}}$

4b $\dfrac{1}{\sqrt{5+3t+4t^2}}$ 4d $\sqrt{\dfrac{3+t}{2+t}}$ 4f $e^{7t}\sin(t)$ 5b $\dfrac{b^2t}{(a+bt)^3}$ 5d $\dfrac{a^2}{t\sqrt{bt-a^4}}$

[4] après, si elles ne sont pas définissables sur $\mathbb{R}$ tout entier, avoir déterminé leur «domaine de définition»

5e $\dfrac{t^2}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

5f $\dfrac{2t^2}{\sqrt{t^2+a^2}}$

6a $f(t) = 2t^3 + t^2 - 18t - 9$
$f'(t) = 6t^2 + 2t - 18$

6b $f(t)\left[\frac{2}{2t+1} + \frac{1}{t+3} + \frac{1}{t-3}\right]$

6c $2(t^2-9) + 2t(2t+1)$
$= 6t^2 + 2t - 18$

9a $f(t)\left[\frac{1}{2}\frac{-1}{1-t} + \frac{1}{3}\frac{2t}{1+t^2} - \frac{3}{2}\frac{3t^2}{2+t^3}\right]$

9b $g(t)\left[\frac{1}{4}\frac{2}{1+2t} + \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2} - \frac{7}{2}\frac{5t^4}{2+t^5}\right]$

17a $\dfrac{1}{16}[2\cos(t) - \cos(5t) - \cos(3t)]$

17b $\dfrac{2}{15}$

17c $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^2(t)\,dt$
$= [\dfrac{1}{3}\cos^2\sin^3 + \dfrac{2}{15}\sin^5]_0^{\frac{\pi}{2}}$

20a $f'(x) = -\frac{1}{2}, f(x) = \frac{\pi-2x}{4}$

20b $g(x) = \frac{\cos(\frac{u}{2})}{\sin(\frac{u}{2})} = \frac{\sin(\frac{\pi-u}{2})}{\cos(\frac{\pi-u}{2})}$

21a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
$f(x) = \mathrm{Arctg}(x) + \mathrm{Arctg}(a)$

26a $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arctg}(\dfrac{2t+3}{5})$

26b $\dfrac{1}{3}\,\mathrm{Arctg}(\dfrac{3t+4}{4})$

26c $\dfrac{1}{3}\,\mathrm{Arctg}(\dfrac{5t+3}{5})$

26d $\dfrac{1}{20}\,\mathrm{Log}(\dfrac{t-1}{t+4})$

26e $\dfrac{1}{6}\,\mathrm{Log}(\dfrac{3t+1}{3t+7})$

26f $\dfrac{1}{20}\,\mathrm{Log}(\dfrac{5t+1}{t+1})$

27a $\dfrac{\pi}{4}$

27b $\dfrac{\pi}{4}$

27c $\dfrac{2}{3}$

27d $\dfrac{3}{4}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{16}$

27e $\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{15}$

27f $\dfrac{5}{6}\dfrac{3}{4}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{15\pi}{96}$

28c $(n+1)\,I_{n+1} = n\,I_{n-1}$

28d $I_{2m} = \dfrac{\prod_{k=1}^m (2k-1)}{\prod_{k=1}^m (2k)} I_0$
$= \dfrac{\prod_{k=1}^m (2k-1)}{\prod_{k=1}^m (2k)}\dfrac{\pi}{2}$,
$I_{2m+1} = \dfrac{\prod_{k=1}^m (2k)}{\prod_{k=1}^m (2k+1)} I_1$
$= \dfrac{\prod_{k=1}^m (2k)}{\prod_{k=1}^m (2k+1)}$

28e $I_{2m} = \dfrac{(2m)!}{4^m\cdot m!\cdot m!}\dfrac{\pi}{2}$
$= \dfrac{1}{4^m}\dbinom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2}$,
$I_{2m+1} = \dfrac{4^m\cdot m!\cdot m!}{(2m+1)!}$
$= \dfrac{2^{2m}}{m+1}\dfrac{m!\cdot(m+1)!}{(2m+1)!}$
$= \dfrac{2^{2m}}{m+1}\dfrac{1}{\binom{2m+1}{m}}$

28f $\dfrac{2}{m+1}\dfrac{4^{2m}}{\binom{2m}{m}\cdot\binom{2m+1}{m}} <$
$< \pi < \dfrac{1}{2m}\dfrac{4^{2m}}{\binom{2m-1}{m}\cdot\binom{2m}{m}}$