Devoir 1

A rendre (une copie par groupe de colle)] le Mardi 10 février 2009.

Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions de trigonométrie hyperbolique sont :

$$\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Vérifier qu'elles sont dérivables, calculer leurs dérivées et tracer leurs graphes.
2. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ l'expression : $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.
3. Prouver que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et que la bijection réciproque arcth $:]-1,1[\to \mathbb{R}$ est dérivable, de dérivée :
$$\mathrm{arcth}' :]-1,1[\to \mathbb{R},\ \mathrm{arcth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$
4. Du calcul, pour $x \in]-1,1[$, de $\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ déduire la valeur de $\mathrm{arcth}(x)$.
5. Calculer la dérivée de $f :]-1,1[\to \mathbf{R},\ f(x) = \mathrm{th}(\frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x}))$, retrouver **4)**.
6. Déterminer directement, pour $y \in]-1,1[$, pour quels $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{th}(x) = y$, comparer le résultat obtenu avec ceux de **4)** et **5)**.
7. Prouver que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque dérivable :
$$\mathrm{arcsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{de dérivée} \quad \mathrm{arcsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
8. Reprendre, avec sh au lieu de th la question **6)**.