Examen 29 Mai 2009 13h-16h

sans documents ni calculatrices

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

On n'attend pas qu'un étudiant de première année réponde à A, B, C et D en trois heures :

Le barème (sur 52) permet d'obtenir la note maximale de 20 sans traiter le sujet de a à z, mais il tient compte de la clarté de la rédaction, la justification des affirmations [répondre *on déduit la propriété* **Y** *de de la question* **X** à la question **déduire de la question X la propriété Y** vaut zéro points] et la correction des liens logiques entre les énoncés écrits sur la copie : n'y reportez, après les avoir vérifiés au brouillon, que des raisonnements aboutis et des calculs dont vous êtes sûr !

On vous conseille de suivre l'ordre du sujet et de ne pas papilloner d'une partie à l'autre.

Chaque question demande une réponse courte, précise et justifiée.

Dans vos réponses, ne pas omettre d'indiquer la lettre [de **a)** à **z)**] correspondant à la question traitée, par contre recopier le sujet est une perte de temps.

A Question de cours

(sur 12 points : a=1,5, b=2,c=1, d=1,5, e=6)

a) Donner la définition pour une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E des termes :
réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, d'ordre.

b) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.
Donner la définition de l'*ensemble quotient* $E/_{\mathcal{R}}$ *de l'ensemble* E *par la relation* $\mathcal{R}$ et de l'*application quotient.*

c) Soit $[a, b]$ un intervalle réel fermé borné et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier positif (strictement).
Donner la définition de la *subdivision régulière d'ordre* N *de* $[a, b]$.

d) Dans le cas où $[a, b] = [0, 9]$ représenter pour $0 \leq \nu \leq 2$ les subdivisions régulières d'ordre 3^ν. [On ferra une figure par subdivision]

e) Indiquer dans leur ordre logique les énoncés [sans leur démonstration] qui, dans le cours, ont permis de démontrer le :

Théorème *Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.*

Puis écrire une démonstration de ce théorème à partir de ces énoncés.

[Se limiter d'abord au cas d'un intervalle $[a, b]$ fermé borné. En fin d'épreuve si, après avoir abordé substantiellemnt au moins une autre partie, il reste du temps on pourra traiter le cas général]

B Exercice sur les fractions rationnelles et leurs primitives

(sur 7 points : f=3, g=2, h=0,5, i=1,5)

f) Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles

$$\frac{1}{X^2 + X + 1}, \quad \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2} \in \mathbb{R}(X)$$

g) Soit $N \in \mathbb{N}$. Déduire de votre première réponse à **f)** une expression pour $D^N(\frac{1}{X^2+X+1})$, la dérivée $N^{\text{ième}}$ de la fraction rationnelle réelle $\dfrac{1}{X^2 + X + 1} \in \mathbb{R}(X)$.

h) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{t^2 + 25}\, dt$.

i) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt$.

T.S.V.P.

C Exercice sur les polynômes et les sommes de Darboux

(sur 13 points)

[j=1, k=2, l=1, m=1, n=2, o=2, p=4]

On rappelle, pour $k \in \mathbb{N}$ un entier naturel, que le polynôme *coefficient binomial k parmi X* est, si $k = 0$, $\binom{X}{0} = 1$ et si $k \geq 1$, $\binom{X}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(X-h) \in \mathbb{Q}[X]$

j) Etablir pour tout $k \in \mathbb{N}$ la relation du triangle de Pascal pour les polynômes coefficients binomiaux :

$$\binom{X+1}{k+1} - \binom{X}{k+1} - \binom{X}{k} = 0$$

k) Soit $p \leq q \in \mathbb{N}$. Déduire de **j)** une expression du polynôme $\sum_{i=p}^{q}\binom{X+i}{k}$ en fonction du polynôme $\binom{X}{k+1}$ [et ne faisant plus intervenir de signe $\sum$].

l) Exprimer le polynôme X^2 en fonction des polynômes $\binom{X}{0}, \binom{X}{1}, \binom{X}{2}$.

m) Soit $N \in \mathbb{N}$. Déduire de vos résultats à **k)** et **l)** la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

n) Soit $x \in [0, \infty[$ et $f_2 : [0, x] \to \mathbb{R}, f_2(t) = t^2$ et $1 \leq N \in \mathbb{N}$.

Déduire de **m)** la valeur de la somme de Darboux supérieure $L_{\alpha_N}(0, x; f_2)$ de la fonction f_2 associée à la subdivision α_N régulière d'ordre N de l'intervalle $[0, x]$.

o) Soit $x \in [0, +\infty[$ et $0 \leq n \leq N, k \in \mathbb{N}$ des entiers avec $N, k \geq 1$.

Comparer pour l'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}$ les nombres $\frac{1}{k!}\left(\frac{nx}{N}\right)^k, \left(\frac{x}{N}\right)^k\binom{n}{k}, \left(\frac{x}{N}\right)^k\binom{n+k-1}{k}$

[en cas de difficulté on explicitera d'abord ces nombres pour $k = 1, 2, 3$ et $n = 4, 5, 6$]

p) Déduire de ce qui précède (en précisant les lettres des questions utilisées) que :

si $x \in [0, +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$ la fonction $f_k : [0, x] \to \mathbb{R}, f_k(t) = \frac{1}{k!}t^k$ est intégrable au sens de Riemann et déterminer son intégrale $\int_0^x f_k$.

T.S.V.P.

D Sur les polynômes, relations d'équivalence et ensembles quotient

(sur 20 points)

[q=1, r=2, s=2, t=1, u=1, v=2, w=2, x=3, y=3, z=3]

q) Sur l'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers relatifs on considère la relation $\mathcal{H}$ définie par si $S, T \in \mathbb{Z}[X]$ alors $S\mathcal{H}T$ si et seulement si il y a $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $S - T = Q \cdot (X^2 + X + 1)$. Prouver que $\mathcal{H}$ est une relation d'équivalence.

On note désormais $S \equiv T \bmod \mathcal{H}$, ou $S \equiv T \bmod (X^2+X+1)$ pour $S\mathcal{H}T$.

r) On note $\mathbb{Z}[X]_1 = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid \deg(P) \leq 1\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers relatifs de degré au plus 1.

Prouver que $\mathbb{Z}[X]_1$ est un sytème de représentants pour $\mathcal{H}$.

s) Soit $S, T, U, V \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $S \equiv T \bmod \mathcal{H}$ et $U \equiv V \bmod \mathcal{H}$.

Prouver que $S + U \equiv T + V \bmod \mathcal{H}$ et $S \cdot U \equiv T \cdot V \bmod \mathcal{H}$. Ainsi :

L'ensemble quotient $\mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{H}}$ *est muni d'opérations* $\bar{+}$ *et* $\bar{\cdot}$.

t) Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \in \mathbb{C}$. Donner les partie réelle $\Re(j)$ et imaginaire $\mathrm{Im}(j)$ de $j = \Re(j) + i \cdot \mathrm{Im}(j)$ et représenter sur une figure les nombres complexes $0, 1, j, 1+j, j^2$.

On rappelle que $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ et que si $z \in \mathbb{C}$ alors l'application :

$$ev_z : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C},\ U = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \mapsto ev_z(U) = U(z) \overset{\text{Déf}}{=} \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$$

d'évaluation en z vérifie pour tout $U, V \in \mathbb{C}[X]$:

$$ev_z(U+V) = ev_z(U) + ev_z(V), \quad ev_z(U \cdot V) = ev_z(U) \cdot ev_z(V)$$

u) Soit $S, T \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $S \equiv T \bmod (X^2+X+1)$. Prouver que $\mathrm{ev}_j(S) = ev_j(T)$:

L'application $ev_j : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ *passe au quotient* $\overline{ev_j} : \mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$.

v) Soit $S \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\mathrm{ev}_j(S) = 0$. Prouver $S \equiv 0 \bmod (X^2+X+1)$.

[On pourra considérer la division euclidienne de S par $X^2 + X + 1$]

w) Déduire de **v)** que l'application $\overline{ev_j} : \mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$ construite en **u)** est injective.

[Se souvenir de la preuve de ce que qu'une application linéaire est injective ssi son noyau est nul]

On note $\Lambda \overset{\text{Déf}}{=} \mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{H}}$ et si $a = \overline{S}, b = \overline{T} \in \Lambda$, $a + b = \overline{S} \bar{+} \overline{T}$ et $a \cdot b = \overline{S} \bar{\cdot} \overline{T}$.

x) Sur Λ on considère la relation $\mathcal{D}$ définie par si $\overline{S}, \overline{T} \in \Lambda$ alors $\overline{S}\mathcal{D}\overline{T}$ si et seulement si il y a $\overline{U} \in \Lambda$ tel que $(\overline{S} + \overline{-T} \overset{Déf}{=:})\ = \overline{S} - \overline{T} = 2\,\overline{U}\ (\overset{Déf}{:=}\ \overline{U} + \overline{U})$.

Prouver que $\mathcal{D}$ est une relation d'équivalence sur Λ et que :

$\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{X}, \overline{1+X}\}$ est un système de représentants de $\mathcal{D}$ dans Λ .

y) Prouver que l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ de Λ passent au quotient et écrire les tables dans le système de représentants $\{\overline{\overline{0}}, \overline{\overline{1}}, \overline{\overline{X}}, \overline{\overline{1+X}}\}$ de ces opérations.

[*c. a d.* construire deux tableaux à quatre lignes, numérotées par $a \in \{\overline{\overline{0}}, \overline{\overline{1}}, \overline{\overline{X}}, \overline{\overline{1+X}}\}$ et quatre colonnes, numérotées par $b \in \{\overline{\overline{0}}, \overline{\overline{1}}, \overline{\overline{X}}, \overline{\overline{1+X}}\}$ où dans la ligne a et la colonne b se trouve pour le premier c et pour le second d tels que $c, d \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{X}, \overline{1+X}\}$ et $a + b \equiv c \bmod \mathcal{D}$ et $a \cdot b \equiv d \bmod \mathcal{D}$]

z) Soit $\overline{\Lambda} \overset{\text{Déf}}{=} \Lambda/_{\mathcal{D}}$ et, si $0 = \overline{0} \neq \overline{b} \in \overline{\Lambda}$ on considère l'application $m_{\overline{b}} : \overline{\Lambda} \to \overline{\Lambda}, \overline{a} \mapsto \overline{b} \cdot \overline{a}$.

Prouver que $m_{\overline{b}}$ est injective, en déduire qu'il y a $\overline{c} \in \overline{\Lambda}$ tel que $\overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{1}$.