Examen de seconde session 18 juin 2009 14h-17h

sans documents ni calculatrices

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

On n'attend pas qu'un étudiant de première année réponde à A, B, C et D en trois heures :

Le barème (sur 51) permet d'obtenir la note maximale de 20 sans traiter le sujet de a à z, mais il tient compte de la clarté de la rédaction, la justification des affirmations [répondre *on déduit la propriété* **Y** *de de la question* **X** à la question **déduire de la question X la propriété Y** vaut zéro points] et la correction des liens logiques entre les énoncés écrits sur la copie : n'y reportez, après les avoir vérifiés au brouillon, que des raisonnements aboutis et des calculs dont vous êtes sûr !

On vous conseille de suivre l'ordre du sujet et de ne pas papilloner d'une partie à l'autre.

Chaque question demande une réponse courte, précise et justifiée.

Dans vos réponses, ne pas omettre d'indiquer la lettre [de **a)** à **z)**] correspondant à la question traitée, par contre recopier le sujet est une perte de temps.

A Question de cours

(sur 12 points : a=1, b=2,5,c=1, d=1,5, e=6)

a) Soit une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, donner la définition de :
La relation $\mathcal{R}$ est d'équivalence.

b) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.
Donner la définition d'un *système de représentants pour la relation* $\mathcal{R}$ et dans le cas où $\mathcal{R}$ est la relation de congruence modulo 5 dans l'ensemble $\mathcal{N} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ des entiers positifs, expliciter un système de représentants.

c) Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné
Donner la définition d'une *subdivision α de* $[a, b]$ et de *son ordre $N(\alpha)$.*

d) Dans le cas où $[a, b] = [0, 8]$ représenter pour $0 \leq \nu \leq 3$ les subdivisions régulières d'ordre 2^ν de l'intervalle $[a, b]$. [On ferra une figure par subdivision]

e) Indiquer les énoncés [sans leur démonstration] qui, dans le cours, ont permis, **en n'utilisant pas l'uniforme continuité des fonctions continues sur les intervalles fermés bornés**, de démontrer le : Théorème *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est intégrable au sens de Riemann.*

Puis écrire une démonstration de ce théorème à partir de ces énoncés.

B Exercice sur les fractions rationnelles et leurs primitives

(sur 8 points : f=3, g=2, h=1,5, i=1,5)

f) Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles

$$\frac{1}{X^2 - X + 1}, \quad \frac{1}{(X^2 - X + 1)^2} \in \mathbb{R}(X)$$

g) Soit $N \in \mathbb{N}$. Déduire de votre première réponse à **f)** une expression pour $D^N(\frac{1}{X^2-X+1})$, la dérivée $N^{\text{ième}}$ de la fraction rationnelle réelle $\dfrac{1}{X^2 - X + 1} \in \mathbb{R}(X)$.

h) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(t^2 + 9)^2}\, dt$.

i) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2 - t + 1}\, dt$.

T.S.V.P.

C Exercice sur les polynômes et les sommes de Darboux

(sur 11 points)

[j=2, k=2, l=1, m=1, n=0,5, o=0,5, p=4]

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite de polynômes $B_n \in \mathbb{Q}[X]$ à coefficients rationnels par $B_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, la relation de récurrence $B_n' = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n = 0$

j) Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4.

k) Etablir pour tout $n \geq 1$ la relation $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

l) Soit $p \leq q \in \mathbb{N}$. Déduire de **k)** une expression du polynôme $\sum_{i=p}^{q} (X+i)^{n-1}$ en fonction du polynôme B_n [et ne faisant plus intervenir de signe $\sum$].

m) Soit $N \in \mathbb{N}$. Déduire de vos résultats à **k)** et **l)** la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{N} n^3$.

Soit $x \in [0, \infty[$ et $f_3 : [0, x] \to \mathbb{R}, f_3(t) = t^3$ et $1 \leq N \in \mathbb{N}$.

n) Déduire de **m)** la valeur de la somme de Darboux supérieure $L_{\alpha_N}(0, x; f_3)$ de la fonction f_3 associée à la subdivision α_N régulière d'ordre N de l'intervalle $[0, x]$.

o) Déduire de **m)** la valeur de la somme de Darboux inférieure $\Lambda_{\alpha_N}(0, x; f_3)$ de la fonction f_3 associée à la subdivision α_N régulière d'ordre N de l'intervalle $[0, x]$.

p) Déduire de ce qui précède (en précisant les lettres des questions utilisées) une preuve directe [sans calcul des primitives ni le fait qu'une fonction continue est intégrable au sens de Riemann] de ce que : *si $x \in [0, +\infty[$ la fonction f_3 est intégrable au sens de Riemann.*
et déterminer son intégrale $\int_0^x f_3$.

T.S.V.P.

D Sur les polynômes, relations d'équivalence et ensembles quotient
(sur 20 points)
[q=1, r=2, s=2, t=1, u=1, v=2, w=2, x=3, y=3, z=3]

q) Sur l'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers relatifs on considère la relation $\mathcal{C}$ définie par si $S, T \in \mathbb{Z}[X]$ alors $S\mathcal{C}T$ si et seulement si il y a $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que : $S - T = Q \cdot (X^2 + 1)$. Prouver que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence.

On note désormais $S \equiv T \operatorname{mod} \mathcal{C}$, ou $S \equiv T \operatorname{mod}(X^2 + 1)$ pour $S\mathcal{C}T$.

r) On note $\mathbb{Z}[X]_1 = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid \deg(P) \leq 1\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers relatifs de degré au plus 1.

Prouver que $\mathbb{Z}[X]_1$ est un sytème de représentants pour la relation d'équivalence $\mathcal{C}$.

s) Soit $S, T, U, V \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $S \equiv T \operatorname{mod} \mathcal{C}$ et $U \equiv V \operatorname{mod} \mathcal{C}$.

Prouver que $S + U \equiv T + V \operatorname{mod} \mathcal{C}$ et $S \cdot U \equiv T \cdot V \operatorname{mod} \mathcal{C}$. Ainsi :

L'ensemble quotient $\mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{C}}$ est muni d'opérations $\overline{+}$ et $\overline{\cdot}$.

t) Soit $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{C}$. Représenter sur une figure les nombres complexes $0, 1, i, -i, i^2, i^3$.

On rappelle que $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ et que si $z \in \mathbb{C}$ alors l'application :

$$ev_z : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C},\ U = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \mapsto ev_z(U) = U(z) \overset{\text{Déf}}{=} \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$$

d'évaluation en z vérifie pour tout $U, V \in \mathbb{C}[X]$:

$$ev_z(U + V) = ev_z(U) + ev_z(V), \quad ev_z(U \cdot V) = ev_z(U) \cdot ev_z(V)$$

u) Soit $S, T \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $S \equiv T \operatorname{mod}(X^2 + 1)$. Prouver que $\mathrm{ev}_{-i}(S) = ev_{-i}(T)$:

L'application $ev_{-i} : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ passe au quotient $\overline{ev_{-i}} : \mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{C}} \to \mathbb{C}$.

v) Soit $S \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\mathrm{ev}_{-i}(S) = 0$. Prouver $S \equiv 0 \operatorname{mod}(X^2 + 1)$.
[On pourra considérer la division euclidienne du polynôme S par $X^2 + 1$]

w) Déduire de **v)** que l'application $\overline{ev_{-i}} : \mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{C}} \to \mathbb{C}$ construite en **u)** est injective.
[Se souvenir de la preuve de ce que qu'une application linéaire est injective ssi son noyau est nul]

On note $\Lambda \overset{\text{Déf}}{=} \mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{H}}$ et si $a = \overline{S}, b = \overline{T} \in \Lambda$, $a + b = \overline{S} \overline{+} \overline{T}$ et $a \cdot b = \overline{S} \overline{\cdot} \overline{T}$.

x) Sur Λ on considère la relation $\mathcal{T}$ définie par si $\overline{S}, \overline{T} \in \Lambda$ alors $\overline{S}\mathcal{T}\overline{T}$ si et seulement si il y a $\overline{U} \in \Lambda$ tel que $(\overline{S} + \overline{-T} \overset{Déf}{=:}) = \overline{S} - \overline{T} = 3\,\overline{U}$ $(\overset{\text{Déf}}{:=} \overline{U} + \overline{U} + \overline{U})$.

Prouver que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence sur Λ et que :

$$\{\overline{0}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{-X}, \overline{X}, \overline{1 + X}, \overline{-1 + X}, \overline{1 - X}, \overline{-1 - X}\}$$

est un système de représentants de $\mathcal{T}$ dans Λ .

y) Prouver que l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ de Λ passent au quotient et écrire les tables dans le système de représentants $\{\overline{0}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{-X}, \overline{X}, \overline{1 + X}, \overline{-1 + X}, \overline{1 - X}, \overline{-1 - X}\}$ de ces opérations. [*c. a d.* construire deux tableaux à neuf lignes, numérotées par $a \in \{\overline{0}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{-X}, \overline{X}, \overline{1 + X}, \overline{-1 + X}, \overline{1 - X}, \overline{-1 - X}\}$ et neuf colonnes, numérotées par $b \in \{\overline{0}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{-X}, \overline{X}, \overline{1 + X}, \overline{-1 + X}, \overline{1 - X}, \overline{-1 - X}\}$ où dans la ligne a et la colonne b se trouve pour le premier c et pour le second d tels que $c, d \in \{\overline{0}, \overline{-1}, \overline{1}, \overline{-X}, \overline{X}, \overline{1 + X}, \overline{-1 + X}, \overline{1 - X}, \overline{-1 - X}\}$ et $a + b \equiv c \operatorname{mod} \mathcal{T}$ et $a \cdot b \equiv d \operatorname{mod} \mathcal{T}$]

z) Soit $\overline{\Lambda} \overset{\text{Déf}}{=} \Lambda/_{\mathcal{T}}$ et, si $0 = \overline{0} \neq \overline{b} \in \overline{\Lambda}$ on considère l'application $m_{\overline{b}} : \overline{\Lambda} \to \overline{\Lambda}, \overline{a} \mapsto \overline{b} \cdot \overline{a}$.

Prouver que $m_{\overline{b}}$ est injective, en déduire qu'il y a $\overline{c} \in \overline{\Lambda}$ tel que $\overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{1}$.