Corrigé de l'examen de Mat122 du 29 Mai 2009 13h-16h

a) Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est *réflexive* si pour tout $x \in E$ on a $x\mathcal{R}x$. Elle est *symétrique* si pour tout $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ on a $y\mathcal{R}x$. Elle est *antisymétrique* si pour tout $x, y \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$. Elle est *transitive* si pour tout $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ on a $x\mathcal{R}z$. Enfin elle est *d'ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

b) La *classe d'équivalence pour* $\mathcal{R}$ *de* $x \in E$ est $\overline{x} = \{t \in E \mid t \equiv x \bmod \mathcal{R}\}$.
L'*ensemble quotient de l'ensemble* E *par la relation* $\mathcal{R}$ est $E/_{\mathcal{R}} = \{\overline{x} \mid x \in E\}$, l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$. L'*application quotient* est $\pi_{\mathcal{R}} : E \to E/_{\mathcal{R}}, \pi_{\mathcal{R}}(x) = \overline{x}$.

c) La *subdivision régulière d'ordre* N *de* $[a, b]$ est $\alpha_N : a = a_0 < \cdots < a_k = a + k\dfrac{b-a}{N} < \cdots < a_N = b$.

d) $\nu = 0 :$ $\underset{0}{|} \text{—} \underset{9}{|}$, $\nu = 1 :$ $\underset{0}{|} \text{—} \underset{3}{|} \text{—} \underset{6}{|} \text{—} \underset{9}{|}$, $\nu = 2 :$ $\underset{0}{|} \text{—} \underset{1}{|} \text{—} \underset{2}{|} \text{—} \underset{3}{|} \text{—} \underset{4}{|} \text{—} \underset{5}{|} \text{—} \underset{6}{|} \text{—} \underset{7}{|} \text{—} \underset{8}{|} \text{—} \underset{9}{|}$

e)

1. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $t \in [u, v] \subset [a, b], \lambda \le f(t) \le l$ *et* α *une subdivision de* $[u, v]$ *alors la* somme de Darboux supérieure $L_\alpha(u, v; f) = \sum_{k=1}^{N(\alpha)} \sup_{u_{k-1} < t < u_k} f(t) \cdot (u_k - u_{k-1})$ de f sur $[u, v]$ *vérifie* $\lambda(v - u) \le L_\alpha(u, v; f) \le l(v - u)$. *Et si une subdivision* $\alpha' < \alpha$ *raffine* α *alors* $L_{\alpha'}(u, v; f) \le L_\alpha(u, v; f)$
2. *L'*intégrale supérieure $L(u, v; f) = \inf_{\alpha \in A(u,v)} L_\alpha(u, v; f)$, *borne inférieure sur toutes les subdivisions de* $[u, v]$ *des sommes de Darboux supérieures de* f *sur* $[u, v]$ *vérifie* (i) $\lambda(v - u) \le L(u, v; f) \le l(v - u)$ *et* (ii) *la relation de Chasles : si* $a \le u < v < w \le b$, $L(u, w; f) = L(u, v; f) + L(v, w; f)$.
3. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue il y a $\lambda \le l \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in [a, b], \lambda \le f(t) \le l$

Si f *est continue alors* $F : [a, b] \to \mathbb{R}, F(a) = 0; a < t \le b, F(t) = L(a, t; f)$ *est primitive de* f :

Soit $t_0 \in [a, b]$. Comme f est continue en t_0 pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que : pour tout $t \in [a, b], |t - t_0| \le \delta, f(t_0) - \epsilon \le f(t) \le f(t_0) + \epsilon$.

Par Chasles $2(ii)$: si $t < t_0$: $L(a, t_0; f) = L(a, t; f) + L(t, t_0; f)$ et $F(t) - F(t_0) = -L(t, t_0; f)$ et si $t_0 < t$: $L(a, t; f) = L(a, t_0; f) + L(t_0, t; f)$ et $F(t) - F(t_0) = L(t_0, t; f)$.

Par $2(i)$ dans ce dernier cas $(f(t_0) - \epsilon)(t - t_0) \le L(t_0, t; f) \le (f(t_0) + \epsilon)(t - t_0)$ et dans le premier cas $-(f(t_0) + \epsilon)(t_0 - t) \le -L(t, t_0; f) \le -(f(t_0) - \epsilon)(t_0 - t)$.

Soit dans les deux cas pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que si $t \in [a, b]$ avec $|t - t_0| \le \delta$

$$f(t_0)(t - t_0) - \epsilon|t - t_0| \le F(t) - F(t_0) \le f(t_0)(t - t_0) + \epsilon|t - t_0|$$

d'où F dérivable en t_0 avec $F'(t_0) = f(t_0)$. Ceci étant pour tout $t_0 \in [a, b]$, F est primitive de f.

f) Soit $j = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, j^2 = \overline{j} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. On a $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ donc :
$\dfrac{1}{X^2 + X + 1} = \dfrac{1}{j - j^2}\dfrac{1}{X - j} + \dfrac{1}{j^2 - j}\dfrac{1}{X - j^2} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}}[\dfrac{1}{X - j} - \dfrac{1}{X - j^2}]$ d'où :
$\frac{1}{(X^2+X+1)^2} = -\frac{1}{3}[\frac{1}{(X-j)^2} - 2\frac{1}{(X-j)(X-j^2)} + \frac{1}{(X-j^2)^2}] = \frac{2}{i3\sqrt{3}}[\frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-j^2}] - \frac{1}{3}[\frac{1}{(X-j)^2} + \frac{1}{(X-j^2)^2}]$

g) De $\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{j^2-j}[\frac{1}{j-X} - \frac{1}{j^2-X}]$ vient $D^N(\frac{1}{X^2+X+1}) = \frac{N!}{j^2-j}[\frac{1}{(j-X)^{N+1}} - \frac{1}{(j^2-X)^{N+1}}] = \frac{N!}{j^2-j}\frac{(j^2-X)^{N+1}-(j-X)^{N+1}}{(X^2+X+1)^{N+1}}$

qui, par la formule du binôme vaut : $\dfrac{N!}{j^2 - j}\dfrac{\sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}[j^{2k} - j^k](-1)^{N+1-k}X^{N+1-k}}{(X^2 + X + 1)^{N+1}}$.

Comme $j^3 = 1$, le terme $j^{2k} - j^k$ vaut $0, j^2 - j, j - j^2$ suivant que $k = 3l, 3l + 1, 3l + 2$ d'où :

$$D^N(\frac{1}{X^2 + X + 1}) = \frac{\sum_{3l+1=0}^{N+1}\binom{N+1}{3l+1}(-1)^{N-3l}X^{N-3l}}{(X^2 + X + 1)^{N+1}} + \frac{\sum_{3l+2=0}^{N+1}\binom{N+1}{3l+2}(-1)^{N-3l}X^{N-1-k}}{(X^2 + X + 1)^{N+1}}$$

h) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{t^2+25}\,dt = \frac{1}{5}\int_0^5 \frac{1}{1+(\frac{t}{5})^2}\frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}\Big[\mathrm{Arctg}(\frac{t}{5})\Big]_0^5 = \frac{1}{5}[\frac{\pi}{4}-0] = \frac{\pi}{20}.$

i) $\displaystyle\int_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})^2+1}\frac{2}{\sqrt{3}}\,dt$

$\displaystyle = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\mathrm{Arctg}(\frac{2t+1}{\sqrt{3}})\Big]_{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}[\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$

j) $\displaystyle\binom{X+1}{k+1} - \binom{X}{k+1} - \binom{X}{k}$ est un polynôme de degré au plus $k+1$ qui, par la formule du triangle de Pascal usuel, s'annulle pour l'infinité des entiers $n \geq k$, il est donc nul.

k) Par **j)** on a pour $p \leq i \leq q$, $\binom{X+i}{k} = \binom{X+i+1}{k+1} - \binom{X+i}{k+1}$ d'où :

$\displaystyle\sum_{i=p}^{q}\binom{X+i}{k} = \sum_{i=p}^{q}\binom{X+i+1}{k+1} - \binom{X+i}{k+1} = \sum_{i=p}^{q}\binom{X+i+1}{k+1} - \sum_{i=p}^{q}\binom{X+i}{k+1} = \sum_{j=p+1}^{q+1}\binom{X+j}{k+1} - \sum_{i=p}^{q}\binom{X+i}{k+1} =$

$\displaystyle\Big[\sum_{j=p+1}^{q}\binom{X+j}{k+1}\Big] + \binom{X+q+1}{k+1} - \Big(\Big[\binom{X+p}{k+1}\Big] + \sum_{i=p+1}^{q}\binom{X+i}{k+1}\Big) = \binom{X+q+1}{k+1} - \binom{X+p}{k+1}$

l) Comme $\binom{X}{1} = X, \binom{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}$ il vient $X^2 = 2\binom{X}{2} + \binom{X}{1}$.

m) Comme $0^2 = 0$ on a $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2$ et, par **l)** $n^2 = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$ d'où par **k)** : $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2 = 2[\binom{n+1}{3} - \binom{0}{3}] + \binom{n+1}{2} - \binom{0}{2} = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{2(n+1)n(n-1)+3(n+1)n}{6} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$

n) f_2 étant croissante $L_{\alpha_N}(0,x;f_2) = \sum_{n=1}^{N} f_2(\frac{nx}{N})\cdot\frac{x}{N} = \frac{x^3}{N^3}\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{x^3}{N^3}\frac{(N+1)N(2N+1)}{6} = \frac{x^3}{3}\frac{(N+1)(2N+1)}{2N^2}$

o) $\displaystyle\Big(\frac{x}{N}\Big)^k\binom{n}{k!} = \Big(\frac{x}{N}\Big)^k\frac{\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)}{k!} \leq \Big(\frac{x}{N}\Big)^k\frac{\prod_{h=0}^{k-1} n}{k!} = \frac{1}{k!}\Big(\frac{nx}{N}\Big)^k \leq \Big(\frac{x}{N}\Big)^k\frac{\prod_{h=0}^{k-1}(n+h)}{k!} = \Big(\frac{x}{N}\Big)^k\binom{n+k-1}{k!}$

p) Comme f_k est croissante ses sommes de Darboux inférieures et supérieures associées à la sundivision régulière α_N d'ordre N de $[0,x]$ sont :

$\Lambda_{\alpha_N}(0,x;f_k) = \sum_{n=1}^{N} f_k(\frac{(n-1)x}{N})\cdot\frac{x}{N}$ et $L_{\alpha_N}(0,x;f_k) = \sum_{n=1}^{N} f_k(\frac{nx}{N})\cdot\frac{x}{N}$.

D'après **o)** on a $\left(\frac{x}{N}\right)^k\binom{n-1}{k!} \leq f_k(\frac{(n-1)x}{N})$ et $f_k(\frac{nx}{N}) \leq \left(\frac{x}{N}\right)^k\binom{n+k-1}{k!}$. D'où d'après **k)** :

$\displaystyle(\frac{x}{N})^{k+1}\binom{N-1}{k+1} = (\frac{x}{N})^{k+1}[\binom{N-1}{k+1} - \binom{0}{k+1}] = (\frac{x}{N})^k\sum_{n=1}^{N}\binom{n}{k}\cdot\frac{x}{N} \leq \sum_{n=1}^{N} f_k(\frac{(n-1)x}{N})\cdot\frac{x}{N} = \Lambda_{\alpha_N}(0,x;f_k) \leq$

$\displaystyle L_{\alpha_N}(0,x;f_k) = \sum_{n=1}^{N} f_k(\frac{nx}{N})\cdot\frac{x}{N} \leq (\frac{x}{N})^k\sum_{n=1}^{N}\binom{n+k-1}{k}\cdot\frac{x}{N} = (\frac{x}{N})^{k+1}[\binom{N+k}{k+1} - \binom{k}{k+1}] \leq (\frac{x}{N})^{k+1}\binom{N+k}{k+1}.$

D'où $\left(\frac{x}{N}\right)^{k+1}\binom{N-1}{k+1} \leq \Lambda_{\alpha_N}(0,x;f_k) \leq \Lambda(0,x;f_k) \leq L(0,x;f_k) \leq L_{\alpha_N}(0,x;f_k) \leq \left(\frac{x}{N}\right)^{k+1}\binom{N+k}{k+1}$.

Comme $\left(\frac{x}{N}\right)^{k+1}\binom{N-1}{k+1} = f_{k+1}(x)\cdot\frac{k!}{N^{k+1}}\binom{N-1}{k+1}, \left(\frac{x}{N}\right)^{k+1}\binom{N+k}{k+1} = f_{k+1}(x)\cdot\frac{k!}{N^{k+1}}\binom{N+k}{k+1}$

et $\frac{k!}{N^{k+1}}\binom{N-1}{k+1}, \frac{k!}{N^{k+1}}\binom{N+k}{k+1}$ tendent vers 1 quand N tend vers l'infini il vient que les intégrales inférieures et supérieures de f sont égales valant $\Lambda(0,x;f_k) = L(0,x;f_k) = f_{k+1}(x)$ d'où

$$\int_0^x f_k = f_{k+1}(x)$$

Remarquons qu'ici, contrairement à la question **n)** où le cas $k=2$ a été traité d'abord, on n'a pas eu besoin de calculer exactement la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^k$, dont l'expression semble (voir le résultat de **m)**) compliquée. On s'est contenté de l'encadrement dans **o)** de f_k par des translatés de polynômes binomiaux pour qui les sommes de valeurs ont (voir **k)**) une expression simple.

q) Pour tout $S,T,U \in \mathbb{Z}[X]$ on a $S-S=0\cdot(X^2+X+1)$ donc $S\mathcal{H}S$ et $\mathcal{H}$ est réflexive.
Si $S\mathcal{H}T$ il y a $Q\in\mathbb{Z}[X], S-T=Q\cdot(X^2+X+1)$ donc $T-S=(-Q)\cdot(X^2+X+1)$: $T\mathcal{H}S$ et $\mathcal{H}$ est symétrique.
Si $S\mathcal{H}T$ et $T\mathcal{H}U$ il y a $Q,P\in\mathbb{Z}[X]$ tels que $S-T=Q\cdot(X^2+X+1), T-U=P\cdot(X^2+X+1)$ donc $S-U=(S-T)+(T-U)=(Q+P)\cdot(X^2+X+1)$ donc $S\mathcal{H}U$ et $\mathcal{H}$ est transitive.
Etant réflexive, symétrique et transitive $\mathcal{H}$ est une relation d'équivalence.

r) Pour tout $T\in\mathbb{Z}[X]$ il y a $Q\in\mathbb{Z}[X], R\in\mathbb{Z}[X]_1$ tels que $T=Q\cdot(X^2+X+1)+R$ (division euclidienne par le polynôme unitaire X^2+X+1) donc $T-R=Q\cdot(X^2+X+1)$ et $T\mathcal{H}R$ où $R\in\mathbb{Z}[X]_1$: tout élément de $\mathbb{Z}[X]$ est équivalent à un élément de $\mathbb{Z}[X]_1$. Cet élément est unique car si $R,S\in\mathbb{Z}[X]_1$ vérifient $R\mathcal{H}T$ et $S\mathcal{H}T$ par symétrie et tranitivité de $\mathcal{H}$, on a $R\mathcal{H}S$, il y a $Q\in\mathbb{Z}[X], R-S=Q\cdot(X^2+X+1)$. Soit $Q=0$ soit le degré de $Q\cdot(X^2+X+1)$ est au moins 2. Comme $R-S$ est de degré au plus 1 on a $Q=0$ et $R=S$. Tout élément $T\in\mathbb{Z}[X]$ étant $\mathcal{H}$-équivalent à un unique $R\in\mathbb{Z}[X]_1$, cette partie $\mathbb{Z}[X]_1\subset\mathbb{Z}[X]$ est un sytème de représentants pour $\mathcal{H}$.

s) Comme $S\equiv T \bmod \mathcal{H}$ et $U\equiv V \bmod \mathcal{H}$ il y a $P,Q\in\mathbb{Z}[X], S-T=Q\cdot(X^2+X+1), U-V=P\cdot(X^2+X+1)$.
Donc $S+U-(T+V)=S-T+(U-V)=(Q+P)\cdot(X^2+X+1)$ soit $S+U\equiv T+V \bmod \mathcal{H}$ et $S\cdot U-T\cdot V=(S-T)\cdot U+T\cdot(U-V)=\big(Q\cdot(X^2+X+1)\big)\cdot U+T\cdot\big(P\cdot(X^2+X+1)\big)=\big(Q\cdot U+T\cdot P\big)\cdot(X^2+X+1)$ soit $S\cdot U\equiv T\cdot V \bmod \mathcal{H}$

t) $\Re(j)=-\frac{1}{2}, \mathrm{Im}(j)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1+j=-j^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1,j,j^2$ sont les racines troisièmes de l'inité.

u) Comme $S\equiv T \bmod (X^2+X+1)$ il y a $Q\in\mathbb{Z}[X], S-T=Q\cdot(X^2+X+1)$.
Donc $\mathrm{ev}_j(S)-ev_j(T)=\mathrm{ev}_j(S-T)=\mathrm{ev}_j(Q\cdot(X^2+X+1))=\mathrm{ev}_j(Q)\cdot\mathrm{ev}_j(X^2+X+1)=Q(j)\cdot(j^2+j+1)=Q(j)\cdot 0=0$ et $\mathrm{ev}_j(S)=ev_j(T)$.

v) Soit la division euclidienne de $S=Q\cdot(X^2+X+1)+aX+b; Q, aX+b\in\mathbb{Z}[X]$ par X^2+X+1.
Si $0=\mathrm{ev}_j(S)=\mathrm{ev}_j\Big((Q\cdot(X^2+X+1)+aX+b\Big)=Q(j)\cdot 0+aj+b=aj+b$. Donc $aj=-b\in\mathbb{Z}$.
Comme $a\in\mathbb{Z}$ et $j\notin\mathbb{R}$ on a $a=b=0$, *c.a d.* $S=Q\cdot(X^2+X+1)$ et $S\equiv 0 \bmod (X^2+X+1)$.

w) Soit $\overline{S},\overline{T}\in\mathbb{Z}[X]/_{\mathcal{H}}$ tels que $\overline{ev_j}(\overline{S})=\overline{ev_j}(\overline{T})$. On a donc :
$0=\overline{ev_j}(\overline{S})-\overline{ev_j}(\overline{T})=ev_j(S)-ev_j(T)=ev_j(S-T)\in\mathbb{C}$. Donc d'après **v)** $S-T\equiv 0 \bmod (X^2+X+1)$ et d'après **v)** $S\equiv T \bmod (X^2+X+1)$ *c. a d.* $\overline{S}=\overline{T}$ et l'application $\overline{ev_j}$ est injective.

x) Comme $\overline{ev_j}$ est injective donc $\overline{ev_j}:\Lambda\to\overline{ev_j}(\Lambda)=\{m+nj\,|\,m,n\in\mathbb{Z}\}$ est bijective, vérifiant pour tout $\overline{S},\overline{T}\in\Lambda, \overline{ev_j}(\overline{S}-\overline{T})=\overline{ev_j}(\overline{S})-\overline{ev_j}(\overline{T})$ on a $\overline{S}\mathcal{D}\overline{T}$ si et seulement si $m+nj=\overline{ev_j}(\overline{S}), p+qj=\overline{ev_j}(\overline{T})\in\overline{ev_j}(\Lambda)$ sont tels qu'il y a $r+sj=\overline{ev_j}(\overline{U})$ tel que $(m-p)+j(n-q)=(m+nj)-(p+qj)=2(r+sj)=2r+(2s)j$ *c. a d.* $m\equiv p \bmod (2)$ et $n\equiv q \bmod (2)$. Cette congruences modulo 2 sur les deux coordonnées des éléments de $\overline{ev_j}(\Lambda)=\{m+nj\,|\,m,n\in\mathbb{Z}\}$ étant une relation d'équivalence ayant comme ensemble de repésentants :
$\{0=0+0j=\overline{ev_j}(\overline{0}), 1=1+0l=\overline{ev_j}(\overline{1}), j=0+1j=\overline{ev_j}(\overline{X}), 1+j=\overline{ev_j}(\overline{1+X})\}$, la relation $\mathcal{D}$ est d'équivalence ayant $\{\overline{0},\overline{1},\overline{X},\overline{1+X}\}$ comme ensemble de repésentants.

y) Pour tout $\overline{S},\overline{T},\overline{U},\overline{V}\in\Lambda$ tels que $\overline{S}\mathcal{D}\overline{T}$ et $\overline{U}\mathcal{D}\overline{V}$: il y a $\overline{P},\overline{Q}\in\Lambda$, $\overline{S}-\overline{T}=2\overline{P}$ et $\overline{U}-\overline{V}=2\overline{Q}$ donc :
$(\overline{S}+\overline{U})-(\overline{T}+\overline{V})=2(\overline{P}+\overline{Q})$ et $(\overline{S}\cdot\overline{U})-(\overline{T}\cdot\overline{V})=(\overline{S}-\overline{T})\cot\overline{U})+\overline{T}\cdot(\overline{U}-\overline{V})=2(\overline{P}\cdot\overline{U}+\overline{T}\cdot\overline{Q})$, *c.a d.* $(\overline{S}+\overline{U})\mathcal{D}(\overline{T}+\overline{V})$ et $(\overline{S}\cdot\overline{U})\mathcal{D}(\overline{T}\cdot\overline{V})$ Les tables de cette addition et multiplication quotient dans le système de représentant $\{\overline{\overline{0}},\overline{\overline{1}},\overline{\overline{X}},\overline{\overline{1+X}}\}$ sont :

$\overline{+}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{1+X}}$
$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{1+X}}$
$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{1+X}}$	$\overline{\overline{X}}$
$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{1+X}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{1}}$
$\overline{\overline{1+X}}$	$\overline{\overline{1+X}}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{0}}$

$\bar{\cdot}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{1+X}}$
$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{0}}$
$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{1+X}}$
$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{1+X}}$	$\overline{\overline{1}}$
$\overline{\overline{1+X}}$	$\overline{\overline{0}}$	$\overline{\overline{1+X}}$	$\overline{\overline{1}}$	$\overline{\overline{X}}$

z) Soit $\overline{a},\overline{a'}\in\overline{\Lambda}$ tels que $\overline{b}\cdot\overline{a}=\overline{b}\cdot\overline{a'}$ donc $\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{a'})=\overline{0}$.

Comme $\overline{0}\neq\overline{b}$, le produit $\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{a'})$ n'est pas dans la première ligne de la table de $\bar{\cdot}$, étant nul il doit, d'après cette table, être dans la première colonne donc $\overline{a}-\overline{a'}=\overline{0}$ et $\overline{a}=\overline{a'}$, *c. a d.* $m_{\overline{b}}$ est injective.

Etant injective entre deux ensembles finis à même nombre (4) d'éléments $m_{\overline{b}}$ est bijective et il y a $\overline{c}\in\overline{\Lambda}$ tel que $\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{1}$ (la table donne que pour $\overline{b}=\overline{\overline{1}},\overline{\overline{X}},\overline{\overline{1+X}}$ on a respectivement $\overline{c}=\overline{\overline{1}},\overline{\overline{1+X}},\overline{\overline{X}}$)