Contrôle continu

Sans documents ni calculatrices

[Le barême tiend compte de la clareté de la rédaction, ne reportez sur la copie que des calculs et des raisonnements aboutis.]

1) Question de cours [sur 4 points]

Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k, Q = \sum_{l=0}^{n} b_l X^l \in \mathbb{Z}[X]$ deux polynômes à coefficients entiers.

(a) Donner la définition du produit $P \cdot Q$ de P et de Q

(b) Enoncer la formule de Leibniz calculant la dérivée de $P \cdot Q$.

(c) Démontrer cette formule de Leibniz.

2) [sur 1 point]

Calculer la dérivée de la fonction qui à t associe : $\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(8t + 3 + 4\sqrt{5 + 3t + 4t^2})$

3) [sur 2 points]

Calculer les intégrales :

(a) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{36 + t^2}\, dt$

(b) $\int_0^{3} \frac{1}{\sqrt{36 - t^2}}\, dt$

4) [sur 3 points] Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$\frac{T^3 + 3T^2 + 3T + 3}{T^4 + 2T^3 + 2T^2 + 2T + 1}$$

5) [sur 5 points]

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

(a) Il y a-t-il un polynôme $D_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $1 + X^{2^{n+1}} = (1 - X) \cdot D_n$, si oui expliciter le.

(b) Il y a-t-il un polynôme $E_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $1 - X^{2^{n+1}} = (1 - X) \cdot E_n$, si oui expliciter le.

On définit la suite de polynômes $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients entiers par :
$P_0 = 1 + X$ et la relation de récurrence $P_{n+1} = P_n \cdot (1 + X^{2^n})$

(c) Calculer P_1, P_2, P_3 et $(1 - X) \cdot P_1, (1 - X) \cdot P_2, (1 - X) \cdot P_3$

(d) Déterminer $Q_n = (1 - X) \cdot P_n$, la réponse sera justifiée par un raisonnement par récurrence.

(e) Déduire de **5b** et du calcul **5d** précédent la valeur de P_n.

6) [sur 5 points]

(a) Donner la définition de la fonction Arctg arctangente et, si $t \in \mathbb{R}$ comparer t et $\mathrm{Arctg}(t)$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction qui à $\theta \in \mathbb{R}$ associe $\frac{\sin(\theta)}{2 + \cos(\theta)}$.

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^{\alpha} \frac{2\cos(\theta) + 1}{(2 + \cos(\theta))^2}\, d\theta$ et exprimer le résultat en fonction de $t = \mathrm{tg}(\alpha)$.

(d) Déterminer le signe de $1 - 3\frac{2\cos(\theta) + 1}{(2 + \cos(\theta))^2}$.

(e) Déduire de ce qui précède pour tout $t \in]0, +\infty[$ l'encadrement

$$\frac{3t}{1 + 2\sqrt{1 + t^2}} < \mathrm{Arctg}(t) < t$$