

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DU SUD-TOULON-VAR

pour obtenir le grade

D'HABILITATION à DIRIGER DES RECHERCHES

Mention Mathématiques et Applications

Erwan LANNEAU

TITRE DE LA THÈSE :

Promenade dynamique et combinatoire dans les espaces de Teichmüller

Après avis des rapporteurs :

M. Howard Masur	University of Illinois at Chicago
M. William Veech	Rice University
M. Jean-Christophe Yoccoz	Collège de France & Université Paris-Sud 11

Soutenue le 28 juin 2010 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Artur Avila	Université Pierre et Marie Curie & IMPA	Directeur de recherche
M. John Hamal Hubbard	Université de Provence & Cornell University	Professeur
M. Pascal Hubert	Université Paul Cézanne	Professeur
M. Jérôme Los	Université de Provence	Directeur de recherche
M. Sandro Vaienti	Université du Sud-Toulon-Var	Professeur
M. Jean-Christophe Yoccoz	Collège de France & Université Paris-Sud 11	Professeur
M. Anton Zorich	Université de Rennes 1	Professeur

Avant-propos

Ce mémoire est consacré à mes travaux sur les surfaces plates et sur les espaces de Teichmüller. Il se compose d'un document de synthèse reprenant tous mes articles, ceux de thèse de doctorat inclus. Le dossier scientifique à la fin de ce manuscrit reprend toutes les prépublications qui ne sont pas accessibles aisément. Les articles publiés et disponibles librement, par exemple sur le site ArXiv, ne sont pas inclus dans ce document. Ce texte est une *présentation* et ne se substitue donc pas aux articles, les détails des arguments et des constructions s'y trouvant. Le style se veut ainsi volontairement informel.

Le cadre général est l'étude des surfaces plates et de leurs espaces des modules. La principale motivation qui m'a conduit à regarder ces objets, et qui motive toujours ma curiosité, est le mélange de plusieurs domaines des mathématiques : la géométrie, l'arithmétique, la théorie ergodique, la géométrie algébrique, la théorie des nombres. C'est cette interaction qui est le fil conducteur des résultats présents.

Un point commun aux différentes parties de ce mémoire est l'utilisation d'homéomorphismes de type pseudo-Anosov. L'étude des homéomorphismes des surfaces remonte à Thurston-Nielsen dans les années 1970. Si ϕ est un difféomorphisme du tore (préservant l'orientation), alors ϕ est, à isotopie près, un automorphisme linéaire de $SL_2(\mathbb{Z})$. Si les valeurs propres de ϕ sont irrationnelles distinctes alors ϕ est un difféomorphisme d'Anosov [Ano67]. Cette analyse est généralisée par Thurston aux surfaces quelconques. On peut voir les pseudo-Anosov comme des difféomorphismes d'Anosov sur une surface percée.

Un des outils important intervenant dans cette étude est la notion de feuilletage mesuré sur les surfaces. Deux objets importants ont été développés pour étudier ces feuilletages : les réseaux ferroviaires (*train-tracks* en anglais) et les surfaces plates. Ces dernières apparaissent pour la première fois sous formes de différentielles quadratiques, dans les années 1970 (Douady & Hubbard [DH75]), et sont reprises 10 ans plus tard dans les travaux fondateurs de Masur et de Veech sur les propriétés du flot géodésique de Teichmüller. Elles ont été depuis lors utilisées à maintes reprises dans beaucoup d'autres aspects de cette théorie, tant sur le plan de la géométrie que de la dynamique. Donnons deux motivations importantes pour étudier les surfaces plates. D'abord ces objets interviennent naturellement dans le codage du flot de Teichmüller. Ensuite la simplicité de la définition permet souvent de faire de la géométrie à l'« ancienne ».

On peut séparer ce mémoire en trois parties (on trouvera en page iii une liste de mes publications). Dans la première, après avoir présenté les définitions et résultats « classiques », je m'intéresse à l'adhérence des disques de Teichmüller. En utilisant des techniques de McMullen (théorèmes de Ratner et chirurgie sur les surfaces plates), je donne des critères pour qu'un disque soit dense. Dans [5, 4] on détaille ces techniques. L'article [6] est un survol de ces méthodes.

La deuxième partie est consacrée à l'induction de Rauzy pour les involutions linéaires (introduites par Danthony & Nogueira) : d'un point de vue combinatoire d'abord, puis dynamique ensuite. J'utilise fortement la représentation proposée par Kerckhoff, puis Bufetov, Marmi, Moussa & Yoccoz. Ces résultats font l'objet de l'article [3]. J'utilise ensuite cette induction pour construire des pseudo-Anosov explicitement dans la troisième partie (articles [2, 1, 13]).

Enfin dans la dernière partie, je donne dans un premier temps quelques constructions d'homéomorphismes pseudo-Anosov (dont deux nouvelles constructions [5, 3]), puis j'étudie les propriétés algébriques de leurs dilatations [7]. Je termine par une étude sur les dilatations. Une des conséquences des résultats de cette section est le calcul des plus petites dilatations en petite

complexité (petit genre et petit nombre de singularités). Ceci donne ainsi des valeurs exactes pour les systoles des espaces des modules (pour la métrique de Teichmüller) [2, 12, 11, 13].

Je termine cet avant propos par une liste des publications (en page iii), dans lesquelles on pourra retrouver les résultats présentés dans ce document de synthèse. Cette liste est composée de 15 articles : 10 articles de recherches publiés, 3 prépublications et 2 articles de survols. On retrouvera en annexe de ce document certains articles. Par ailleurs j'ai choisi de numéroter mes résultats en chiffres romains et les autres en chiffres modernes.

Publications de l'auteur

- [1] E. LANNEAU – « An Infinite sequence of fixed point free pseudo-Anosov homeomorphisms on a genus two surface », *Contemporary Mathematics* (2010).
- [2] E. LANNEAU et J.-L. THIFFEAULT – « On the minimum dilatation of pseudo-Anosov diffeomorphisms on surfaces of small genera », *Annales de l'institut Fourier* **60** (2010).
- [3] C. BOISSY et E. LANNEAU – « Dynamics and geometry of the Rauzy-Veech induction for quadratic differentials », *Ergodic Theory Dynam. Systems* no. 3 **29** (2009).
- [4] P. HUBERT, E. LANNEAU et M. MÖLLER – « Completely periodic directions and orbit closures of many pseudo-Anosov Teichmüller discs », *Mathematische Annalen* (2007).
- [5] P. HUBERT, E. LANNEAU et M. MÖLLER – « The Arnoux-Yoccoz Teichmüller disc », *Geometric and Functional Analysis* no. 6 **18** (2009).
- [6] P. HUBERT, E. LANNEAU et M. MÖLLER – « $GL_2(\mathbb{R})$ -orbit closures via topological splittings », *volume 14 of Surveys in Differential Geometry* (2010).
- [7] P. HUBERT et E. LANNEAU – « Veech groups with no parabolic element », *Duke Mathematical Journal* **133** (2006), no. 2, pp. 335–346.

Travaux de thèse de doctorat

- [8] E. LANNEAU – « Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials with prescribed singularities », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **41** (2008), pp. 1–56.
- [9] E. LANNEAU – « Parity of the spin structure defined by a quadratic differential », *Geom. Topol. (electronic)* **8** (2004), pp. 511–538.
- [10] E. LANNEAU – « Hyperelliptic components of the moduli spaces of quadratic differentials with prescribed singularities », *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), pp. 471–501.

Pré-publications

- [11] E. LANNEAU et J.-L. THIFFEAULT – « Enumerating pseudo-Anosov homeomorphisms of the punctured disc », *preprint* (2009).
- [12] E. LANNEAU et J.-L. THIFFEAULT – « On the minimum dilatation of braids on the punctured disc », *preprint* (2009).
- [13] C. BOISSY et E. LANNEAU – « pseudo-Anosov homeomorphisms on hyperelliptic surfaces have large entropy », *preprint* (2010).

Autres

- [14] E. LANNEAU, S. MATZ et J.-L. THIFFEAULT – « The Cat's Cradle, Stirring », *Dynamical Systems Magazine* (2009).
- [15] S. GOUËZEL et E. LANNEAU – « Un théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie : Unique ergodicité sur les surfaces plates », *Séminaires et Congrès* (2008) 19, Société Mathématique de France, Paris.

Table des matières

1	Surfaces plates, espaces des modules et homéomorphismes affines	1
1.1	Surfaces plates	1
1.2	Espaces des modules des surfaces plates	3
1.3	Composantes connexes des strates	6
1.4	Groupes affines et groupes de Veech	8
1.5	Adhérences des disques de Teichmüller	10
1.6	Invariant de Sah-Arnoux-Fathi et flux de McMullen	12
1.7	Miracle pour les surfaces de translation de genre 2	15
1.8	Surfaces de demi-translation de genre 2	19
2	Surfaces plates et involutions linéaires	23
2.1	Échanges d'intervalles	23
2.2	Induction de Rauzy-Veech pour les échanges d'intervalles	25
2.3	Involutions linéaires	28
2.4	Dynamique de l'induction de Rauzy-Veech	31
3	Homéomorphismes de type pseudo-Anosov	34
3.1	Premières définitions et propriétés	34
3.2	Quelques constructions de pseudo-Anosov	35
3.3	Systoles	42
3.4	Automates des train tracks	47
3.5	Corps de traces et éléments paraboliques	48
A	Appendice : prépublications	50
A.1	On the minimum dilatation of pseudo-Anosov diffeomorphisms on surfaces	50
A.2	Infinite sequences of fixed point free pseudo-Anosov homeomorphisms	50
A.3	On the minimum dilatation of braids on the punctured disc	50
A.4	Large entropy of pseudo-Anosov homeomorphism on hyperelliptic surfaces	50
A.5	Enumerating pseudo-Anosov Diffeomorphisms of Punctured Discs	50
	Bibliographie	50

1 Surfaces plates, espaces des modules et homéomorphismes affines

Nous donnons quelques brefs rappels sur les surfaces plates et les homéomorphismes affines. La littérature est très abondante, et nous donnerons des références tout au long de cette section. Il existe quelques survols récents sur ce sujet. On pourra par exemple consulter les survols de Masur & Tabachnikov [MaTa02] et de Zorich [Zor06] sur les surfaces plates. Pour les échanges d'intervalles et le codage du flot de Teichmüller, on pourra consulter les cours de Viana [Via08] et de Yoccoz [Yoc03].

Dans toute la suite de ce mémoire, on notera par S une surface *fermée* i.e. compacte connexe, sans bord, de genre $g \geq 1$.

1.1 Surfaces plates

Nous allons nous intéresser à la classe des métriques euclidiennes à singularités de type coniques isolées, et à holonomie à valeur dans $\{\pm Id\}$. Pour une discussion générale sur ces métriques, on pourra consulter l'article de Troyanov [Tro86] pour une version géométrique ou bien celui de Hubbard & Masur [HM79] pour une approche basée sur les différentielles quadratiques.

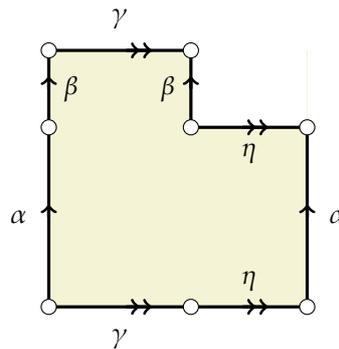


FIGURE 1 – Une surface de translation avec une singularité conique d'angle 6π .

Si S est une surface compacte de genre $g \geq 1$, une *structure plate* sur S est la donnée d'un atlas, sur le complémentaire $\Sigma \subset S$ d'un nombre fini de points de S , tel que les changements de cartes soient de la forme $z \mapsto \pm z + \text{constante}$. Nous demanderons de plus que chaque point $\Sigma_i \in \Sigma$ possède un voisinage U tel que $U \setminus \{\Sigma_i\}$ soit isométrique à un cône pointé. Le seul invariant d'un tel cône est son angle qui est ici un multiple entier de π , donc de la forme $(k+2)\pi$ avec $k \geq -1$. On obtient ainsi sur S munie de cet atlas une métrique euclidienne : celle de \mathbb{R}^2 qui se relève via les cartes. On dira que les points Σ_i sont des singularités coniques d'angles $(k+2)\pi$ si $k \neq 0$. Les changements de cartes imposent que le groupe d'holonomie soit dans $\{\pm Id\}$. On notera souvent (S, q) cette structure plate. Notons aussi que les directions $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont préservées par les changements de cartes. On fixera une direction canonique comme étant la direction verticale.

Il sera pratique, pour une raison qui va devenir claire par la suite, de faire la distinction entre les *surfaces de translation* (l'holonomie est triviale i.e. les changements de cartes sont tous de la forme $z \mapsto z + \text{constante}$) des autres surfaces : les *surfaces de demi-translation*.

Cette définition géométrique est une bonne définition car elle est à la fois simple (et permet donc de travailler avec ces objets), et possède plusieurs formulations équivalentes. Voyons deux autres définitions : une définition combinatoire et une définition analytique.

Une façon constructive d'obtenir des surfaces de translation est de considérer une famille de polygones dans \mathbb{R}^2 munie d'une involution sans points fixes sur l'ensemble des côtés avec la propriété suivante (voir Figure 1). On demande que pour chaque côté e et son image e' par l'involution, il existe une translation qui envoie e sur e' et l'intérieur du polygone autour de e sur l'extérieur du polygone autour de e' . L'identification de ces paires de côtés par translation fournit alors une surface de translation (\mathcal{S}, q) . La structure complexe de \mathbb{C} (en identifiant $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$) munie \mathcal{S} d'une structure de surface de Riemann. La métrique est alors induite par une différentielle quadratique $q = dz^2$, $z \in \mathbb{C}$ (les singularités venant des sommets des polygones).

L'analogue pour les surfaces de demi-translation est assez intuitif. Cette fois ci, on autorise comme recollements des côtés des polygones des translations ainsi que des demi-translations.

Une troisième définition (analytique) est donnée par les différentielles quadratiques. De nouveau traitons d'abord le cas des surfaces de translation. Nous venons de voir dans la construction précédente que \mathcal{S} hérite d'une structure de surface de Riemann et d'une forme holomorphe $\omega \in H^1(\mathcal{S}, \mathbb{C})$. Réciproquement soit ω une 1-forme holomorphe sur \mathcal{S} (on dira aussi différentielle abélienne) non nulle. Si $p_0 \in \mathcal{S}$ est un point de \mathcal{S} qui n'est pas un zéro de ω alors l'atlas $z(p) = \int_{p_0}^p \omega$, sur le complémentaire des zéros de ω dans \mathcal{S} , n'a que des translations comme changements de cartes. En effet si l'on change de point de base alors la coordonnée change par

$$c := \int_{p_0}^{p'} \omega - \int_{p_0}^p \omega = \int_{p_0}^{p'} \omega = \text{constante.}$$

Comme c ne dépend pas de p , nos transitions sont bien de la forme voulue $z \mapsto z + \text{constante}$. Ainsi la paire (\mathcal{S}, ω) induit une structure de translation sur \mathcal{S} et la métrique est induite par la différentielle quadratique $q = \omega^2$. On peut vérifier qu'un zéro de ω de multiplicité k correspond à une singularité conique d'angle $2(k+1)\pi$. Bien sûr la formule de Gauss-Bonnet (dans ce contexte c'est Riemann-Roch) implique que la somme des multiplicités des zéros de ω est $2g - 2$.

L'analogue pour les surfaces de demi-translation sont les différentielles quadratiques. Si q est une différentielle quadratique méromorphe, non nulle, à pôles simples sur \mathcal{S} , alors on peut montrer que l'atlas $z(p) = \int_{p_0}^p \sqrt{q}$ est bien un atlas de demi-translation. Les zéros d'ordre k (« $k = -1$ » pour les pôles) de q correspondent exactement aux singularités coniques d'angles $(k+2)\pi$ de la métrique. De plus l'holonomie ici est non triviale si et seulement si q ne s'écrit pas globalement comme le carré d'une différentielle abélienne (on dira orientable).

Ces points de vue complémentaires seront très importants dans la suite et nous utiliserons les propriétés relatives aux différentes définitions.

On peut définir une mesure sur \mathcal{S} (mesure de Lebesgue) en intégrant la 2-forme $q^{\frac{1}{2}} \wedge \bar{q}^{\frac{1}{2}}$. Le fait que les pôles de q , s'ils existent, soient simples implique que cette mesure est de masse finie. On peut définir l'aire de (\mathcal{S}, q) par l'aire des polygones, calculée en intégrant la forme $dx \wedge dy$, dans la définition combinatoire. En coordonnées complexes on a donc

$$\text{aire}(\mathcal{S}) = \frac{i}{2} \int_{\mathcal{S}} q^{\frac{1}{2}} \wedge \bar{q}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Les surfaces de translation sont exactement celles qui admettent un champ de vecteurs (non nul) parallèle (à l'extérieur des singularités). On peut donc définir un flot linéaire, \mathcal{F}_θ , $\theta \in \mathbb{S}^1$,

sur les surfaces de translation. Ce flot préserve la mesure de Lebesgue. Les surfaces de demi-translation en revanche n'admettent seulement qu'un champ de droites parallèles et on peut seulement définir un feuilletage.

Une surface de translation de genre 1 est un tore plat. On sait, depuis les travaux de Kronecker et Weyl que ce flot est soit périodique, soit uniquement ergodique. En général, la présence de singularités rends difficile l'étude du flot linéaire sur une surface plate de genre $g \geq 2$. Il va être pratique dans la suite de considérer un deuxième niveau de dynamique sur l'ensemble des surfaces plates : l'action de $SL_2(\mathbb{R})$.

Remarque 1.1.1. *Notons aussi qu'une construction classique (attribuée à Katok-Zemliakov [Kat]) permet d'associer à un billard rationnel une surface de translation. Les propriétés ergodiques du flot linéaire sur les surfaces plates permettent ainsi d'obtenir des résultats dynamiques pour les billards dans un polygone rationnel. On ne connaît que très peu de résultats dans un polygone quelconque, et les résultats connus sont pour la plus parts obtenus par approximation par des polygones rationnels.*

Dans la suite on réservera la notation (S, ω) pour une surface de translation et la notation (S, q) pour une surface de demi-translation, avec q non-orientable. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés, on notera simplement S .

1.2 Espaces des modules des surfaces plates

1.2.1 Espaces des modules

On pourra consulter par exemple l'article de Mumford [Mum69], l'appendice du lecture notes de Viana [Via08] et les livres de Hubbard [Hub06] et de Iwayoshi & Taniguchi [IT92].

On notera par \mathcal{M}_g l'espace des modules i.e. l'ensemble des classes de biholomorphismes de surfaces de Riemann X (de genre $g \geq 2$). Cet espace est un orbifold (de dimension complexe $3g - 3$), mais ce n'est pas une variété.

Pour voir cela, considérons son revêtement universel de \mathcal{M}_g , qui est l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$. On peut le construire ensemblistement comme l'ensemble des couples (Y, f) où Y est une surface de Riemann modelée sur S et $f : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme modulo la relation $(Y_1, f_1) \sim (Y_2, f_2)$ s'il existe un biholomorphisme $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ tel que $g \circ f_1$ est isotope à f_2 .

On notera $\text{Mod}(g)$ le groupe modulaire i.e. le groupe des difféomorphismes (préservant l'orientation) d'une surface de genre g à isotopie près. Ainsi $\text{Mod}(g)$ agit naturellement (et même proprement discontinument, avec points fixes) sur $\mathcal{T}(S)$ et le quotient est \mathcal{M}_g . Les points fixes de cette action sont précisément les singularités de \mathcal{M}_g .

On peut voir le fibré co-tangent de l'espace \mathcal{M}_g comme l'espace des modules des surfaces plates.

1.2.2 Espaces des modules des surfaces plates

Soient $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ deux surfaces plates. Nous dirons que \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont équivalentes si les surfaces munies de leurs métriques sous-jacentes sont isométriques (la direction verticale étant préservée). Une condition analogue (en notant q_i les différentielles quadratiques) est de demander qu'il existe un bi-holomorphisme f de $\mathcal{S} \setminus \{\text{singularités de } q_1\}$ vers $\mathcal{S} \setminus \{\text{singularités de } q_2\}$ tel que $f^*q_2 = q_1$. L'espace des modules est l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation (lorsque l'on fixe le genre). On fera la distinction entre les espaces des modules \mathcal{H}_g et \mathcal{Q}_g pour les différentielles abéliennes et les différentielles quadratiques non-orientables.

Cette relation d'équivalence se traduit bien avec la définition combinatoire des surfaces plates. On peut vérifier que deux surfaces données par des polygones sont isométriques si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre par des découpages et recollements par translation (ou demi-translation).

L'espace des modules des surfaces plates forme un fibré naturel au dessus de l'espace des modules \mathcal{M}_g (on ne garde que la structure conforme). L'espace total de ce fibré est stratifié par les sous-espaces des différentielles à singularités *prescrites*. Si (k_1, \dots, k_n) est une partition de $4g - 4$ (formule de Gauss-Bonnet) avec $k_i \geq -1$ alors on notera $\mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n)$ la strate consistant en l'ensemble des différentielles quadratiques non-orientables ayant comme multiplicités des zéros et pôles la liste (k_1, \dots, k_n) . On notera $\mathcal{H}(k_1/2, \dots, k_n/2)$ la strate consistant en l'ensemble des différentielles quadratiques orientables ayant comme multiplicités des zéros la liste (k_1, \dots, k_n) . On obtient ainsi une stratification

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) & \subset & \mathcal{H}_g & & \mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n) & \subset & \mathcal{Q}_g \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \mathcal{M}_g & & & & \mathcal{M}_g \end{array}$$

En général une strate ne définit pas un fibré au dessus de \mathcal{M}_g (nous verrons que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = 3g - 3$ alors que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) = 2g + n - 1$). Masur et Smillie ont montré que ces strates sont non-vides avec quatre exceptions [MS93] :

$$\mathcal{Q}(\emptyset), \mathcal{Q}(-1, 1), \mathcal{Q}(1, 3), \mathcal{Q}(4).$$

C'est un fait bien connu de la théorie de Teichmüller [DH75, HM79, Mas82, Vee90, KZ97] que ces strates sont des orbifolds analytiques complexes. Les coordonnées locales sont données en intégrant les formes sur une base de l'homologie. Revoyons rapidement cette construction pour les surfaces de translation. Soit $(S, \omega) \in \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$. On note S la surface topologique sous-jacente et P_1, \dots, P_n les points singuliers. Soit $\text{hol} = \text{hol}_{(S, \omega)}$ le morphisme $H_1(S, \{P_1, \dots, P_n\}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\text{hol}([\gamma]) = \int_{\gamma} \omega$ pour tout 1-cycle γ dans S relativement à $\{P_1, \dots, P_n\}$. On fixe une base $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g+n-1})$ du groupe abélien $H_1(S, \{P_1, \dots, P_n\}, \mathbb{C})$. Alors l'application *des périodes*

$$\Psi = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) & \longrightarrow & H^1(S, \{P_1, \dots, P_n\}, \mathbb{C}) \\ \mathcal{S}' & \longmapsto & (\gamma_1, \dots, \gamma_{2g+n-1}) \mapsto (\text{hol}_{\mathcal{S}'}(\gamma_1), \dots, \text{hol}_{\mathcal{S}'}(\gamma_{2g+n-1})) \end{array} \right)$$

est un homéomorphisme local dans un voisinage de (S, ω) . Ceci donne une carte locale entre la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ et un ouvert de $H^1(S, \{P_1, \dots, P_n\}; \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{2g+n-1}$. Les changements de coordonnées sont affines en dehors des singularités de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$.

Dans le cas des différentielles quadratiques non-orientables, une construction analogue permet de conclure, en passant d'abord au revêtement double des orientations. On pourra consulter Douady & Hubbard [DH75] pour une description de l'application Ψ dans le cas de la strate $\mathcal{Q}(1, \dots, 1)$. La dimension complexe de la strate $\mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n)$ est $2g + n - 2$.

Notons que ces périodes (absolues et relatives) correspondent aux vecteurs formant les côtés des polygones dans la définition combinatoire des surfaces plates. Plus précisément les coordonnées sont

$$\int_{\rho_j}^{P_{j+1}} dz = \int_{\rho_j} \omega$$

où le chemin ρ_j représente un élément de l'homologie relative $H_1(S, \{P_1, \dots, P_n\}; \mathbb{Z})$ de la surface donnée par des polygones de sommets $\{P_1, \dots, P_n\}$.

Une conséquence importante, du fait que les changements de coordonnées sur les strates soient affines, est que l'on peut définir une mesure. Ψ donne un homéomorphisme local entre un voisinage de (S, ω) dans $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ et un voisinage de $[\omega]$ dans $H^1(S, \{P_1, \dots, P_n\}, \mathbb{C})$. Cet espace vectoriel contient un réseau naturel : $H^1(S, \{P_1, \dots, P_n\}, \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$. Considérons une forme volume $d\mu$ linéaire normalisée à 1 sur l'hypercube unité. Dans les coordonnées données par un polygone de côtés v_1, \dots, v_n on a donc

$$d\mu = \frac{1}{J} \frac{1}{(2i)^n} dv_1 d\bar{v}_1 \dots dv_n d\bar{v}_n,$$

où J est le déterminant du changement de base de $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, considérée comme une base de l'homologie relative, vers une base « symplectique ».

Il est possible de définir une mesure $\mu^{(1)}$ sur l'hypersurface $\mathcal{H}^{(1)}(k_1, \dots, k_n) \subset \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ des surfaces d'aire 1 en prenant le « cône » :

$$\mu^{(1)}(E) = \mu(\{\lambda(S, \omega); (S, \omega) \in E \text{ et } 0 < \lambda \leq 1\}).$$

On appellera mesure de Lebesgue cette mesure sur les strates (à ne pas confondre avec la mesure de Lebesgue sur les surfaces). Ces strates ne sont pas forcément connexes comme nous le verrons dans la section 1.3. Nous terminons cette section par un tableau récapitulatif des différentes définitions et propriétés, que nous avons emprunté à [Zor06].

Définition combinatoire	Définition analytique
polygones + choix d'une direction verticale	structure complexe + choix d'une différentielle quadratique q
holonomie $\{Id\}$ / surface de translation	$q = \omega^2$
holonomie $\{\pm Id\}$ / surface de demi-translation	$q \neq \omega^2$
point conique d'angle $2(k+1)\pi$	zéro de degré k de la différentielle abélienne ω
point conique d'angle $(k+2)\pi$	zéro de degré k de la différentielle quadratique q
côté des polygones \vec{v}_j	période relative $\int_{P_j}^{P_{j+1}} dz = \int_{\vec{v}_j} \omega$
surfaces de translation de type $2(k_1+1)\pi, \dots, 2(k_n+1)\pi$	strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ dans l'espace des modules des différentielles abéliennes
surfaces de demi-translation de type $(k_1+1)\pi, \dots, (k_n+1)\pi$	strate $\mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n)$ dans l'espace des modules des différentielles quadratiques
cordonnées locales : vecteurs \vec{v}_i	cordonnées dans $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$: périodes relatives de ω , i.e. $[\omega] \in H^1(S, \{P_1, \dots, P_n\}; \mathbb{C})$

TABLE 1 – Correspondence entre les différentes définitions de surfaces plates.

1.2.3 Action de $SL_2(\mathbb{R})$

Le groupe de Lie $SL_2(\mathbb{R})$ agit naturellement sur les surfaces plates ainsi que sur les espaces des modules, en préservant les strates. Si S est une surface plate et $A \in SL_2(\mathbb{R})$ une matrice on définit $A \cdot S$ par post-composition de l'action linéaire de A sur un atlas plat de S . Si S est donnée sous la forme de polygones $\{P_i\}_{i \in I}$ alors $A \cdot S$ est simplement $\{A \cdot P_i\}_{i \in I}$. Cette action préserve la

relation d'équivalence couper/coller, donc passe bien au quotient. Elle préserve aussi les strates. De plus la mesure de Lebesgue est invariante. Remarquons que $SL_2(\mathbb{R})$ agit sur \mathcal{H}_g et $PSL_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{Q}_g .

Les trois groupes à un paramètre suivants seront particulièrement utiles :

$$g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad r_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad u_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'action de g_t est appelé flot de Teichmüller. Il dilate le feuilletage horizontal par un facteur e^t et contracte le feuilletage vertical par le même facteur. Le flot r_θ agit par isométrie et change la verticale. Le flot u_s est le flot unipotent (on dira aussi horocyclique).

Un des résultats fondateur dans ce domaine est le suivant.

Théorème 1.2.1 (Masur ; Veech [Mas82, Vee82]). *Le flot géodésique g_t agit ergodiquement (pour la mesure de Lebesgue qui est de masse finie) sur chaque composante connexe des strates normalisées (surfaces d'aire 1).*

En particulier, pour presque toute surface plate, l'orbite sous $SL_2(\mathbb{R})$ est dense. Par contre ce théorème ne dit rien sur des exemples particuliers. Dans une partie de ce mémoire (section 1.8) nous allons étudier des adhérences d'orbites dans des cas où ce théorème ne s'applique pas.

1.2.4 Disque de Teichmüller

Si (S, ω) est une surface de translation, l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ fournit une application $SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_g^{(1)}$ qui se factorise

$$\begin{array}{ccc} SL_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_g^{(1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ SL_2(\mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathcal{M}_g \end{array}$$

L'application $\mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_g$ est une isométrie locale, et son image est un *disque de Teichmüller*. On fera souvent l'abus de langage entre un disque de Teichmüller et l'orbite correspondante sous $SL_2(\mathbb{R})$. Le stabilisateur $\text{Stab}_{SL_2(\mathbb{R})}(S, \omega)$ est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ que l'on appelle le groupe de Veech. On reviendra en Section 1.4 sur l'importance de ce groupe.

1.3 Composantes connexes des strates

Les strates des espaces des modules des différentielles abéliennes et quadratiques ne sont pas nécessairement connexes. Nous rappelons brièvement la classification. Les références pour cette section sont les travaux de Kontsevich & Zorich [KZ03] et les travaux de thèse de l'auteur [Lan03, Lan04, Lan08].

1.3.1 Cas abélien [KZ03]

Les premiers exemples de non-connexité ont été montrés en utilisant l'induction de Rauzy-Veech ; Nous reviendrons plus tard, en section 2.2.4, sur cette induction et le lien avec les composantes connexes. Veech a démontré que la strate $\mathcal{H}(4)$ admet 2 composantes connexes. Ensuite Arnoux et Veech ont démontré que la strate $\mathcal{H}(6)$ en admet 3.

Plus tard Kontsevich & Zorich, à l'aide d'expériences numériques sur ordinateur, calculent les composantes connexes des strates de \mathcal{H}_g pour g petit. Suites à ces calculs, ils construisent deux invariants pour classer les composantes :

1. Un invariant « hyperelliptique »,
2. Un invariant de spin à valeur dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ relié à l'invariant de Arf.

On rappelle brièvement ces invariants.

Définition 1.3.1. *On dira qu'une composante connexe C est hyperelliptique si pour toute surface $(S, \omega) \in C$, la surface de Riemann S est hyperelliptique, et si la forme holomorphe ω est anti-invariante par rapport à l'involution hyperelliptique τ i.e. $\tau^*\omega = -\omega$.*

Si β est une courbe simple fermée qui ne contient pas de singularités, l'indice de β est $\text{ind}(\beta) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta(t)} dt$. Si β borde un disque ne contenant qu'une seule singularité de multiplicité k alors $\text{ind}(\beta) = k + 1$

Définition 1.3.2. *Soient $(\alpha_i, \beta_i)_{i \in \{1, \dots, g\}}$ une base symplectique de $H_1(S, \mathbb{Z})$. On définit la parité de la structure spin de (S, ω) par*

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^g (\text{Ind}(\alpha_i) + 1)(\text{Ind}(\beta_i) + 1) \pmod{2}.$$

D'après les travaux de Atiyah [Ati71] et Mumford [Mum71], si ω ne possède que des zéros de multiplicités paires, cette parité de structure spin est invariante par déformation continue de la structure complexe donnée par ω . Cela produit alors un invariant topologique pour la classification des composantes.

À l'aide de ces deux invariants modulo 2, Kontsevich & Zorich [KZ03] obtiennent une classification complète, pour tout $g \geq 1$, des composantes connexes des strates de \mathcal{H}_g . Nous ne donnons pas le théorème en détail, mais on peut noter que le nombre maximal de composantes est 3 (atteint exactement pour les strates $\mathcal{H}(2g - 2)$ pour $g \geq 4$ et $\mathcal{H}(g - 1, g - 1)$ pour $g \geq 4$ impair).

Le problème est resté ouvert pour les strates de \mathcal{Q}_g et la conjecture était que les mêmes invariants permettaient de classifier les composantes connexes. Les résultats qui suivent répondent à ces questions.

1.3.2 Cas quadratique [Lan03, Lan04, Lan08]

Cette partie constitue les travaux de doctorat de l'auteur. On peut définir une notion analogue de composantes connexes hyperelliptiques pour les différentielles quadratiques non-orientables. Dans un premier article nous classifions ces composantes connexes hyperelliptiques. On démontre par ailleurs que les strates possédant une telle composante, en petit genre, sont connexes :

Théorème I (Lanneau [Lan03]). *Pour tout $g \geq 1$, la liste des composantes connexes hyperelliptiques de \mathcal{Q}_g est décrite dans [Lan03]. De plus les strates possédant une telle composante sont non connexes, excepté les cas suivants :*

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}(-1, -1, 1, 1), \mathcal{Q}(-1, -1, 2) \text{ en genre 1, et} \\ &\mathcal{Q}(1, 1, 1, 1), \mathcal{Q}(1, 1, 2), \mathcal{Q}(2, 2) \text{ en genre 2,} \end{aligned}$$

qui sont connexes.

Ensuite dans un deuxième article, nous obtenons une classification complète des composantes connexes de \mathcal{Q}_g , mis-à-part quatre cas particuliers (voir section 2.4.2) :

Théorème II (Lanneau [Lan08]). *Pour tout $g \geq 1$, les seuls cas de non-connexité d'une strate de \mathcal{Q}_g , hormis quatre cas particuliers, sont ceux décrits dans le théorème I. Les quatre cas particuliers sont :*

$$\mathcal{Q}(-1, 9), \mathcal{Q}(-1, 3, 6), \mathcal{Q}(-1, 3, 3, 3), \mathcal{Q}(12),$$

pour lesquels le nombre de composantes est au plus 2.

Un point important de la preuve est l'étude des surfaces à 1 cylindre ainsi que les permutations associées au codage de ce cylindre.

Enfin dans un troisième article, on montre que la parité de la structure spin, définie par Kontsevich et Zorich, est constante sur les strates des différentielles quadratiques non-orientables, contredisant ainsi la conjecture de classification à l'aide cet invariant.

Théorème III (Lanneau [Lan04]). *Soit $(S, q) \in \mathcal{Q}(k_1, \dots, k_l)$. Soit n_{+1} le nombre de zéros de q de degré $k_j = 1 \pmod{4}$, et soit n_{-1} le nombre de zéros de q de degré $k_j = 3 \pmod{4}$. Alors la parité de la structure spin déterminée par q est indépendante de la topologie de la strate et est égale à*

$$\left[\frac{|n_{+1} - n_{-1}|}{4} \right] \pmod{2}.$$

où les crochets dénotent la partie entière.

Les principaux outils développés et utilisés pour la preuve du Théorème II sont les permutations généralisées. On utilise de telles permutations pour coder les surfaces à un cylindre et obtenir ainsi une description précise de l'adjacence des strates. En particulier deux notions importantes d'irréductibilité (irred1 et irred2) sont développées dans l'article [Lan08]. Ces notions serviront pour comprendre la dynamique de Rauzy-Veech sur les différentielles quadratiques (voir [BL08] et section 2.3).

1.4 Groupes affines et groupes de Veech

1.4.1 Homéomorphismes affines

Un homéomorphisme f d'une surface de translation (S, ω) est dit affine par rapport à la métrique plate si f induit un difféomorphisme de la surface privée des singularités de ω et si la différentielle $D_p f$ de f est une matrice constante (pour $p \in S \setminus \Sigma$) dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Le groupe affine $\mathrm{Aff}(S, \omega)$ est le groupe des homéomorphismes affines de (S, ω) . Le noyau de l'application $D : \mathrm{Aff}(S, \omega) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est fini si $g \geq 2$ et on notera $\mathrm{SL}(S, \omega)$ son image, que l'on appellera le groupe de Veech. C'est donc un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Veech a montré que $\mathrm{SL}(S, \omega)$ est un groupe fuchsien i.e. discret, jamais co-compact.

Il existe une classification standard des éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en trois types : elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Cela induit une classification des éléments de $\mathrm{Aff}(S, \omega)$ en trois types.

On dira que qu'un homéomorphisme affine f est parabolique, ou elliptique, ou pseudo-Anosov, respectivement, si $|\mathrm{trace}(Df)| = 2$, $|\mathrm{trace}(Df)| < 2$, ou $|\mathrm{trace}(Df)| > 2$, respectivement.

Remarque 1.4.1. *On peut étendre ces définitions aux surfaces de demi-translation. Le groupe de Veech est alors bien défini projectivement, c'est-à-dire en tant que sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.*

1.4.2 Groupes de Veech et disques de Teichmüller

Veech a montré qu'un homéomorphisme affine dont la différentielle n'est pas l'identité n'est pas isotope à l'identité. Par conséquent $SL(\mathcal{S}, \omega)$ se plonge dans le groupe modulaire $\text{Mod}(g)$. Ainsi $SL(\mathcal{S}, \omega)$ est exactement le sous-groupe du groupe modulaire $\text{Mod}(g)$ fixant le disque de Teichmüller passant par (\mathcal{S}, ω) . Ceci fournit une autre construction de ce groupe, que nous utiliserons par la suite :

$$SL(\mathcal{S}, \omega) = \text{Stab}_{SL_2(\mathbb{R})}(\mathcal{S}, \omega).$$

Le groupe de Veech, comme tout groupe fuchsien, agit sur \mathbb{H} et on a

$$SO(2, \mathbb{R}) \backslash SL_2(\mathbb{R}) / SL(\mathcal{S}, \omega) = \mathbb{H} / SL(\mathcal{S}, \omega).$$

Si le volume de $\mathbb{H} / SL(\mathcal{S}, \omega)$ est fini (pour la mesure de Haar) alors le disque de Teichmüller est isométrique à $\mathbb{H} / SL(\mathcal{S}, \omega)$, ce qui définit une géodésique complexe fermée dans \mathcal{M}_g . Remarquons qu'en général le quotient $SL_2(\mathbb{R}) / SL(\mathcal{S}, \omega)$ est une orbite immergée dans le fibré unitaire cotangent de l'espace des modules. Ce n'est pas une sous-variété en général : elle est même dense génériquement par le théorème de Masur et Veech (Théorème 1.2.1).

Définition 1.4.2. On dit que (\mathcal{S}, ω) est une surface de Veech si le groupe $SL(\mathcal{S}, \omega)$ est de co-volume fini, c'est-à-dire si le quotient $SL_2(\mathbb{R}) / SL(\mathcal{S}, \omega)$ est de volume fini pour la mesure de Haar.

Le flot directionnel sur les surfaces de Veech possède des propriétés dynamiques tout-à-fait remarquables (analogues aux flots linéaires sur le tore) :

Théorème 1.4.3 (Veech [Vee89]). Soit (\mathcal{S}, ω) une surface de Veech. Alors pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, le flot linéaire \mathcal{F}_θ vérifie l'alternative suivante :

1. Toutes les orbites sont fermées et décomposent (\mathcal{S}, ω) en cylindres de modules commensurables, ou
2. Le flot \mathcal{F}_θ est uniquement ergodique (par rapport à la mesure de Lebesgue sur la surface).

La réciproque est fautive en général [SW07] mais elle est vraie en genre 2 [CM06].

Une question importante est de classifier les surfaces de Veech. Cette question a été résolue en en genre 2 pour les surfaces de translation (par Calta et McMullen (voir section 1.7.1) mais reste ouverte en général. On pourra consulter aussi [BM10].

Il existe une caractérisation des surfaces de Veech en terme d'action de $SL_2(\mathbb{R})$:

Théorème 1.4.4 (Veech [Vee92], Smillie [SW06]). La surface (\mathcal{S}, ω) est de Veech si et seulement si le disque de Teichmüller $SL_2(\mathbb{R}) / SL(\mathcal{S}, \omega)$ est fermé dans l'espace des modules i.e. $\mathbb{H} / SL(\mathcal{S}, \omega)$ définit une géodésique complexe fermée dans \mathcal{M}_g .

On pourra consulter [SW10] pour d'autres caractérisations des surfaces de Veech, en termes de petits triangles.

1.4.3 Décomposition en cylindres et éléments paraboliques

La construction de difféomorphismes affines sur les surfaces remonte à Thurston [Thu88] et Nielson dans les années 1970. Construire des difféomorphismes affines paraboliques est relativement aisés. Construire des difféomorphismes affines hyperboliques est plus compliqué et nous consacrerons la section 3.2 à cela.

Un cylindre sur (\mathcal{S}, ω) est un ensemble maximal, connexe de géodésiques simples fermées homotopes. Si le genre de \mathcal{S} est plus grand que 1 alors chaque cylindre est borné par des liens de selles. Un cylindre A a un périmètre $c(A)$ et une hauteur $h(A)$. Le module d'un cylindre est $\mu = h/c$. Veech a montré la proposition suivante.

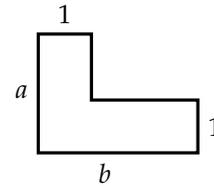
Proposition 1.4.5 (Veech). *Si une surface de translation (\mathcal{S}, ω) a un homéomorphisme affine parabolique f , alors \mathcal{S} possède une décomposition en cylindres parallèles à la direction fixée par Df . De plus les modules des cylindres sont commensurables i.e. ont des rapports rationnels.*

Réciproquement si (\mathcal{S}, ω) possède une décomposition en cylindres parallèles avec modules commensurables alors (si la direction est horizontale), le groupe de Veech $SL(\mathcal{S}, \omega)$ contient

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où t est le plus petit commun multiple des inverses des modules.

En guise d'exemples, donnons les surfaces $L(a, b)$, construites par McMullen, avec $a = x + y\sqrt{d}$, $b = z + y\sqrt{d}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $d \geq 0$ et $x + z = 1$. On peut montrer que les directions verticales et horizontales sont paraboliques.



1.4.4 Éléments hyperboliques

Comme mentionné plus haut, construire des éléments hyperboliques est plus compliqué. Mentionnons juste une méthode classique consistant à prendre un produit « aléatoire » d'éléments paraboliques (voir Fathi [Fat87] pour plus de détails). Par exemple dans la construction ci-dessus, le produit des deux paraboliques horizontaux et verticaux (bien orientés) fournit un élément hyperbolique dans le groupe de Veech.

1.4.5 Corps de traces et corps d'holonomie

Si $H \in SL(\mathcal{S}, \omega)$ est hyperbolique, le corps $K = \mathbb{Q}(\text{Tr}(H))$ est un invariant important de la surface \mathcal{S} . Kenyon & Smille démontrent [appendice][KS00] que K est engendré par la trace de n'importe quel élément hyperbolique $H' \in SL(\mathcal{S}, \omega)$. De plus $[K : \mathbb{Q}] \leq g$.

Une autre définition de K est la suivante, n'utilisant pas les éléments hyperboliques. On note $\Lambda = \Lambda(\omega)$ le sous-groupe de \mathbb{R}^2 engendré par les vecteurs d'holonomie :

$$\Lambda = \int_{H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z})} \omega.$$

Soient $e_1, e_2 \in \Lambda$ non colinéaires. Soit k le plus petit sous-corps (noté corps d'holonomie) de \mathbb{R} tel que tout élément de Λ puisse s'écrire comme $ae_1 + be_2$ avec $a, b \in k$. Alors dans ce cas $\Lambda \otimes \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension deux sur k . Kenyon & Smillie montrent que si (\mathcal{S}, ω) possède un élément hyperbolique alors $K = k$.

Ce corps va jouer un rôle très important dans la suite. Une conséquence immédiate est qu'une surface de Veech (à action de $SL_2(\mathbb{R})$ près) a toutes ses coordonnées dans un corps de degré au plus g .

1.5 Adhérences des disques de Teichmüller

Un des grands challenge dans la dynamique de Teichmüller est de comprendre l'adhérence des disques de Teichmüller dans les espaces des modules. Le théorème de Masur et de Veech implique que presque toute $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite est dense dans la composante connexe contenant

l'orbite. Mais bien sûr ce résultat ne dit rien sur des orbites particulières. Eskin & Kontsevich ont conjecturé qu'il existait un avatar des théorèmes de Ratner dans cette situation non homogène.

L'espoir est que l'adhérence de toute orbite sous $SL_2(\mathbb{R})$ soit une orbifold linéaire dans les coordonnées des périodes (voir aussi [Möl08]). C'est la principale conjecture dans la dynamique de Teichmüller. Comme nous le verrons dans la section 1.7.3, McMullen a résolu cette conjecture pour les surfaces de translation de genre 2.

Un des outils jouant un rôle important dans cette classification est l'utilisation des théorèmes de Ratner sur l'ensemble des décompositions d'une surface plate. Nous donnons ici l'idée générale de la preuve, pour motiver les définitions à venir.

Une première observation est que le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ contient beaucoup de sous groupes unipotents. Supposons que l'on ait trouvé une direction θ telle que la surface (S, ω) , dans cette direction, se découpe en sous-surfaces. Si ces sous-surfaces sont paramétrisées par un espace homogène (par exemple si ces sous-surfaces sont des tores et/ou des cylindres) alors les théorèmes de Ratner nous fournissent une description de l'action du groupe unipotent dans la direction θ . On va légitimement appeler ces directions θ *unipotentes*.

Maintenant si la direction unipotente est assez « irrationnelle » alors les théorèmes de Ratner vont impliquer que l'adhérence de l'orbite va être « assez grosse ». Si on est capable de trouver suffisamment de directions *unipotentes irrationnelles*, on aura de l'espoir pour montrer que le disque est dense.

On précise ces notions dans les deux sections suivantes.

Remarque 1.5.1. *Très récemment (juin 2010), Eskin & Mirzakhani [EM10] ont annoncé un résultat de rigidité ergodique pour l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ (les mesures $SL_2(\mathbb{R})$ invariantes sont affines).*

1.5.1 Découpages de surfaces

La définition qui suit est naturelle si l'on veut construire des orbites ayant une l'adhérence qui soit « grosse ». Notons N le sous-groupe unipotent de $SL_2(\mathbb{R})$

$$N = \left\{ u_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\},$$

et

$$N(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

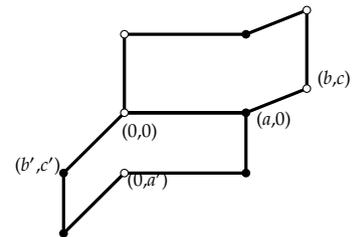
Une *configuration* sur une surface de translation (S, ω) est une collection β_1, \dots, β_k de liens de selles homologues. Une *configuration unipotente* est une configuration telle que le complément $S \setminus \{\cup_{i=1}^k \beta_i\}$ est une union de n cylindres C_i et de k tores (avec une fente) T_j . En particulier on peut trouver une paramétrisation des configurations unipotentes par un espace homogène G/Γ avec

$$G = SL_2(\mathbb{R})^k \times N^n$$

et

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})^k \times N(\mathbb{Z})^n.$$

Dans l'exemple ci-contre, la direction horizontale est unipotente et découpe la surface en deux tores. Si $a/c \in \mathbb{Q}$ le premier tore est rationnel. Nous avons la même condition pour le deuxième tore avec $a'/c' \in \mathbb{Q}$. Dans la suite on va se limiter au cas où $k \leq 2$. Les tores sont donc paramétrisés par (au plus) deux réseaux $(\Lambda_1, \Lambda_2) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2 / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^2$.



Définition 1.5.2. Une configuration unipotente est dite irrationnelle si elle n'est pas périodique et si pour tout $u_s \in N$, les réseaux $u_s(\Lambda_1)$ et Λ_2 ne sont pas commensurables.

Cette définition est motivée par l'utilisation des théorèmes de Ratner que l'on rappelle dans la section suivante.

Remarque 1.5.3. Pour simplifier la présentation dans ce mémoire, nous avons allégé la définition précédente. Dans [HLM07] on pourra trouver une définition complète et rigoureuse.

1.5.2 Théorèmes de Ratner

Les résultats qui suivent sont dûs à Ratner et apparaissent dans une série de papiers [Rat90, Rat90bis, Rat91, Rat91bis]. On se restreint ici aux cas qui vont nous intéresser, les énoncés de Ratner étant bien plus généraux.

Nous sommes intéressés par le comportement du flot unipotent N agissant diagonalement sur G/Γ . Un des théorèmes de Ratner affirme que l'adhérence de l'orbite d'un point est algébrique. Cela se traduit par l'existence d'un sous-groupe fermé H tel que $N \leq H \leq G$ et $\overline{Nx} = Hx$ (on a de plus $(x\Gamma x^{-1}) \cap H$ est un réseau dans H).

Regardons sur un exemple. Si $n = 0$, on a seulement la liste ci-dessous de candidats possibles pour le sous-groupe H

1. Si $k = 1$ alors $H = N$ ou $H = G$.
2. Si $k = 2$ alors $H = N, \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_s, N \times N, N \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times N$ ou G ;
(pour $s \in \mathbb{R}, \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_s = \{(g, u_s g u_s^{-1}) : g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$).

En général la liste de candidats pour le sous-groupe H est plus longue, mais la Définition 1.5.2 est justement là pour forcer la conclusion $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^k \times N^n$. Le théorème suivant est une formulation de cela. Pour plus de détails, on pourra consulter [Sha07, Sha98] ainsi que [HLM07].

Théorème 1.5.4. Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^k \times N^n$ et considérons le réseau $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^k \times N(\mathbb{Z})^n$ dans G . Soit $x = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{k+n}) \in G/\Gamma$ donné par une configuration unipotente. Si la configuration est irrationnelle alors $\overline{Nx} = Gx$.

1.6 Invariant de Sah-Arnoux-Fathi et flux de McMullen

Nous allons présenter deux invariants qui vont nous être utile pour détecter des directions unipotentes sur les surfaces, et ainsi pouvoir appliquer les théorèmes de Ratner. McMullen [Mc2] a retrouvé les propriétés de l'invariant de Sah-Arnoux-Fathi [Arn81] (voir aussi Boshernitzan [Bos88]) au moyen du flux complexe.

1.6.1 Invariant de Sah-Arnoux-Fathi

Les références pour cette section sont la thèse de Arnoux [Arn81]. On rappelle qu'un échange d'intervalles T est une bijection de l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, isométrique sur un nombre fini de morceaux et préservant l'orientation. On peut trouver une partition de I en sous-intervalles I_i telle que $T(x) = x + t_i$ si $x \in I_i$ (voir section 2.1). Notons λ_i la longueur des intervalles I_i . L'invariant de Sah-Arnoux-Fathi (l'invariant SAF) est

$$SAF(T) = \sum_i \lambda_i \wedge_{\mathbb{Q}} t_i.$$

L'ensemble des échanges d'intervalles forme un groupe pour la composition. Arnoux a montré que l'invariant SAF est un homomorphisme du groupe des échanges d'intervalles sur $\mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. De plus comme le sous-groupe des commutateurs du groupe des échanges d'intervalles est simple, l'invariant SAF est essentiellement le seul homomorphisme non-trivial.

1.6.2 Invariant de découpage

Si P est un polygone de \mathbb{R}^2 de sommets p_1, \dots, p_n alors on définit le J -invariant de P par $J(P) = \sum_{i=1}^n p_i \wedge p_{i+1} \in \mathbb{R}^2 \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2$ ($p_{n+1} = p_1$). L'invariance est justifiée par le fait que si $P = P_1 \cup \dots \cup P_r$ est une décomposition cellulaire de P alors $J(P) = J(P_1) + \dots + J(P_r)$. C'est aussi un invariant de translation : $J(P + \vec{v}) = J(P)$.

Cela nous permet ainsi de définir $J(\mathcal{S}, \omega)$ par $\sum_{i=1}^k J(P_i)$ où $P_1 \cup \dots \cup P_k$ est une décomposition cellulaire de (\mathcal{S}, ω) en polygones ([KS00]).

On peut étudier différentes projections de cet invariant. Par exemple, soit J_{xx} la projection linéaire $J_{xx} : \mathbb{R}^2 \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ définie par

$$J_{xx} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = a \wedge c.$$

Cette projection est fortement reliée à l'invariant de Sah-Arnoux-Fathi.

Si T est un échange d'intervalles induit par le premier retour du flot vertical de (\mathcal{S}, ω) (sur un intervalle transverse I) alors l'invariant SAF de T est $SAF(T) = J_{xx}(\mathcal{S}, \omega)$. Cette définition ne dépend pas du choix de I , si I rencontre chaque feuille verticale (par exemple cette condition est satisfaite si le flot vertical est minimal). Nous dirons aussi que $SAF(T)$ est l'invariant SAF de (\mathcal{S}, ω) dans la direction verticale.

Le résultat suivant fondamental dans les travaux de Calta (voir plus loin) est qu'un échange d'intervalles T périodique satisfait $SAF(T) = 0$. De plus si T est défini sur deux ou trois intervalles alors la réciproque est vraie. La réciproque est fautive en général, comme le montre les exemples construits par Arnoux & Yoccoz (voir section 1.8.2).

Définition 1.6.1. *On dira qu'une surface est complètement périodique si toute direction possédant un cylindre est une direction complètement périodique.*

Des exemples de surfaces complètement périodiques sont donnés par les surfaces de Veech, mais on peut construire des surfaces complètement périodiques qui ne sont pas de Veech (exemples de Masur avec deux tores collés le long d'une fente [MaTa02]). Calta montre le théorème très fort suivant : ces deux notions sont équivalentes pour les surfaces de $\mathcal{H}(2)$! Nous verrons cela plus loin et en particulier une esquisse de preuve.

Nous terminons cette section par le théorème suivant.

Théorème 1.6.2 (Calta & Smillie [CS07] Théorème 1.5). *Si (\mathcal{S}, ω) est stabilisée par un homéomorphisme pseudo-Anosov et s'il existe une direction complètement périodique alors l'invariant SAF s'annule dans toutes les directions du corps de traces.*

1.6.3 Flux complexe de McMullen

Le flux est une notion définie par McMullen [Mc2] qui est reliée à l'invariant SAF. Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un corps quadratique réel, on notera pour $k \in K$, k' le conjugué Galois. On définit le flux de Galois pour un échange d'intervalles T (ayant ses paramètres dans K) par

$$\text{Flux}(T) = \sum |I_i|t'_i, \text{ avec}$$

$T(x) = x + t_i$ pour $x \in I_i$ et $t_i \in K$. Le flux peut se définir pour un corps algébrique quelconque (le résultat est alors un vecteur) mais la propriété suivante n'est vraie que pour les corps quadratiques :

Théorème 1.6.3 (Arnoux [Arn81], Boshernitzan [Bos88], McMullen [Mc2]). *Si T est uniquement ergodique alors $\text{Flux}(T) \neq 0$.*

Remarque 1.6.4. *Le Théorème de Boshernitzan est un peu plus fort. Si T est un échange d'intervalles tel que les longueurs des intervalles engendrent un espace vectoriel de rang 2 sur \mathbb{Q} alors T minimal implique T uniquement ergodique.*

Cette notion de flux peut s'étendre à une surface de translation (S, ω) de la façon suivante. Si $\text{Re}(\omega)$ a ses périodes relatives dans K alors le flux du premier retour $T : I \rightarrow I$ sur une transversale I est

$$\text{Flux}(T) = - \int_S \text{Re}(\omega) \wedge \text{Re}(\omega)'$$

Ceci invite à définir le flux complexe pour une forme ω ayant ses périodes dans $K(i)$:

$$\text{Flux}(\omega) = - \int_S \omega \wedge \bar{\omega}'$$

Par définition le conjugué Galois de ω est défini par dualité de Poincaré par $\int_\gamma \omega' := \left(\int_\gamma \omega \right)'$.

Théorème 1.6.5 (McMullen [Mc2]). *Si (S, ω) est une surface de translation de genre $g \geq 2$ et si le flot vertical est périodique (avec cylindres A_i) alors $\text{ReFlux}(\omega) = 0$ et*

$$\frac{1}{2} \text{ImFlux}(\omega) = \sum_i h(A_i) c(A_i)'$$

Un corollaire simple mais très important pour la suite est

Proposition 1.6.6. *Si $\text{Flux}(\omega) = 0$ et si le flot vertical est périodique avec seulement deux cylindres alors la direction verticale est parabolique.*

Démonstration. En effet

$$\sum_{i=1}^2 h(A_i) c(A_i)' = \sum_{i=1}^2 \mu(A_i) N(c(A_i)) = 0,$$

où $N(\cdot)$ est la norme. Ainsi $\frac{\mu(A_1)}{\mu(A_2)} = -\frac{N(c(A_2))}{N(c(A_1))} \in \mathbb{Q}$. □

Cette proposition s'applique en particulier lorsque $S \in \mathcal{H}(2)$. Généraliser cette propriété aux surfaces de genre supérieur est plus difficile. La relation algébrique donnée par le Théorème 1.6.5 ne suffit plus à montrer la commensurabilité des modules. Si on veut garder cette conclusion, nous sommes donc obligés d'imposer une symétrie. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Soit (\mathcal{S}, ω) une surface de translation avec un corps de traces K totalement réel (par exemple \mathcal{S} est obtenue par construction de Thurston-Veech, voir section 3.2.1 et [HL06]). Supposons que $[K : \mathbb{Q}] = 3$. Supposons que la direction verticale de (\mathcal{S}, ω) soit complètement périodique avec cylindres de hauteurs h_i et périmètres c_i . On suppose que la surface possède une involution et que le nombre de modules (à involution près) soit au plus quatre.

Proposition 1.6.7 (Hubert, Lanneau, Möller [HLM07]). *Avec les hypothèses ci-dessus :*

- i) la direction est parabolique, i.e. $\mu_i/\mu_j \in \mathbb{Q}$ pour tout (i, j) , ou
- ii) les modules sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants, ou
- iii) les modules sont reliés par

$$\sum_{i=1}^3 a_i \mu_i = 0, \quad \text{où } a_i \in \mathbb{Q}^*,$$

Esquisse de la preuve. On va utiliser le flux complexe. On montre d'abord qu'il est nul sur la surface, puis on utilise le Théorème 1.6.5. Soit ϕ un pseudo-Anosov sur la surface. Si $t := \text{tr} \phi$

$$\psi := \phi^* + (\phi^*)^{-1} \in \text{End}(H^1(X, \mathbb{R})),$$

on a une décomposition en sous-espaces propres de ψ

$$H^1(X, \mathbb{R}) = S \oplus S' \oplus S''$$

où $S = \langle \text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega) \rangle$ et S', S'' sont les conjugués Galois. Comme l'application ψ est symplectique (voir [Mc1] Théorème 7.1 et [Mc2] Théorème 9.7), les sous-espaces propres sont orthogonaux pour le produit extérieur. On décompose maintenant la surface (\mathcal{S}, ω) en rectangle (pour le flot vertical), ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^s \mu_i c_i c'_i = \sum_{i=1}^s h_i c'_i = \int_X \text{Re}(\omega) \wedge \text{Im} \omega' = \frac{i}{4\pi} \int_X (\omega + \bar{\omega}) \wedge (\omega' - \bar{\omega}') = 0. \quad (1)$$

En appliquant de nouveau le conjugué Galois on obtient

$$\sum_{i=1}^s \mu_i c_i c''_i = 0, \quad (2)$$

ce qui nous donne le résultat souhaité. \square

Le cas ci-dessus semble assez particulier à priori, mais nous verrons plus tard que cela va être fondamental pour l'étude des surfaces de demi-translation de genre deux.

1.7 Miracle pour les surfaces de translation de genre 2

Nous résumons ici les travaux sur la classification des surfaces de Veech et de l'adhérence des disques de Teichmüller. C'est une série de travaux de McMullen [Mc1, Mc2, Mc3, Mc4, Mc5, Mc6]. On pourra aussi consulter Calta [Cal04] pour la classification des surfaces de Veech de la strate $\mathcal{H}(2)$.

Dans toute cette section, \mathcal{S} désignera une surface de translation de genre 2. La présence d'un élément hyperbolique dans le groupe de Veech de \mathcal{S} impose de nombreuses restrictions sur la géométrie du disque de Teichmüller associée à \mathcal{S} . On peut retenir plus le groupe de Veech $\text{SL}(\mathcal{S}, \omega)$ de \mathcal{S} va être « gros » et plus le disque de Teichmüller $\mathbb{H}/\text{SL}(\mathcal{S}, \omega)$ associé à \mathcal{S} va être « petit » (mais éventuellement de volume infini i.e. non fermé par le Théorème 1.4.4). Ces comportements sont propres aux surfaces de *translation* comme nous allons le voir dans la prochaine section.

1.7.1 Classification des surfaces de Veech

McMullen [Mc1] et Calta [Cal04] ont classifié les surfaces de Veech dans la strate $\mathcal{H}(2)$. Ensuite McMullen [Mc2, Mc3, Mc4] a terminé cette classification dans \mathcal{H}_2 avec la strate $\mathcal{H}(1, 1)$. Calta utilise l'invariant de Sah-Arnoux-Fathi alors que McMullen utilise des techniques provenant de la géométrie algébrique (Jacobienne des surfaces de Riemann).

Théorème 1.7.1 (Calta [Cal04], McMullen [Mc1, Mc2, Mc3]). *Soit \mathcal{S} une surface de translation de genre 2. On suppose que \mathcal{S} est primitive i.e. il n'existe pas de revêtement $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{T}^2$.*

1. *Si $\mathcal{S} \in \mathcal{H}(2)$ alors \mathcal{S} est une surface de Veech. De plus quitte à faire agir $SL_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S} = L(a, b)$.*
2. *Si $\mathcal{S} \in \mathcal{H}(1, 1)$ alors \mathcal{S} n'est pas une surface de Veech avec une exception : \mathcal{S} est dans le disque de Teichmüller du décagone.*

Calta [Cal04] donne aussi une forme canonique pour les surfaces de Veech de $\mathcal{H}(2)$: Si $w_j, h_j, t_j, j = 1, 2$ sont les paramètres d'une décomposition en deux cylindres d'une surface \mathcal{S} quadratique sur le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors \mathcal{S} est une surface de Veech si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} w_1 h'_1 & = -w_2 h'_2 \\ w'_1 t_1 + w'_2 t_2 & = w_1 t'_1 + w_2 t'_2. \end{cases} \quad (3)$$

Esquisse de la démonstration de Calta. L'idée principale de la preuve de Calta est d'introduire une propriété intermédiaire : la propriété X . On peut définir J_{vv} si v est une direction quelconque du corps de traces par $J_{vv}(\mathcal{S}) = J_{xx}(r_\theta(\mathcal{S}))$ si θ est la direction de v . Une direction est dite homologique si c'est la direction d'une période absolue de ω . La surface a la propriété X si pour toute direction v on a $J_{vv} = 0$.

Les directions homologiques sont donc les candidates à être complètement périodiques.

La preuve de Calta consiste alors à montrer que la propriété d'être sur surface de Veech est équivalente à propriété X qui est équivalente à être complètement périodique. Le corps d'holonomie ici est quadratique, et les calculs peuvent donc se ramener à un corps de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. On montre ensuite que ces propriétés sont équivalentes aux équations (3) ci-dessus. La preuve est calculatoire. \square

Calta & Smillie étendent ces notions (complète périodicité) en genre plus grand. On pourra par exemple consulter [CS07].

1.7.2 Groupes infiniment engendrés

Nous avons vu qu'il n'y a pas de surfaces de Veech primitives dans $\mathcal{H}(1, 1)$ (mis-à-part le décagone). Pourtant, si $SL(\mathcal{S}, \omega)$ contient un élément hyperbolique, on peut montrer que ce groupe contient beaucoup de paraboliques. Le théorème suivant quantifie cela.

Théorème 1.7.2 (McMullen [Mc2]). *Soit (\mathcal{S}, ω) une surface de translation de genre deux. On suppose que le groupe de Veech $SL(\mathcal{S}, \omega)$ contient un élément hyperbolique. Alors l'ensemble limite du groupe $SL(\mathcal{S}, \omega) \subset SL_2(\mathbb{R})$ est le cercle à l'infini. Plus généralement les directions des liens de selles reliant une singularité à un point de Weierstrass sont paraboliques.*

Si de plus $(\mathcal{S}, \omega) \in \mathcal{H}(1, 1)$ n'est pas une surface de Veech alors le groupe $SL(\mathcal{S}, \omega)$ est infiniment engendré.

Nous donnons une idée de preuve car les techniques utilisées (configurations) seront importantes pour la suite.

Esquisse d'une preuve. L'idée est de montrer que l'ensemble des directions paraboliques est dense, ce qui démontrera que l'ensemble limite du groupe de Veech est le cercle tout entier (un résultat classique [Kat92] affirme que l'ensemble limite d'un groupe de première espèce est soit vide, un point, deux points, un ensemble de Cantor ou le cercle à l'infini).

Pour cela on utilise fortement le flux complexe. La première étape est de montrer que le flux complexe est nul, ce qui va donner des relations pour les modules des cylindres des directions périodiques. Ensuite on montre que les directions du corps de traces ne sont pas minimales (donc possèdent une connexion de selle). Cela utilise fortement le fait que le corps de traces soit quadratique (propriété diophantienne de mauvaise approximation, Théorème 1.6.3). On obtient alors la dichotomie suivante pour les directions du corps de traces :

1. complètement périodique,
2. somme connexe de deux tores.

Une petite étude topologique des configurations montre que d'une part les directions des liens de selles reliant une singularité à un point de Weierstrass ne sont jamais dans le deuxième cas, et que d'autre part le nombre de cylindres ainsi obtenu est au plus deux. On peut ainsi conclure, grâce au flux qui nous donne une relation algébrique entre les modules des cylindres.

Pour la deuxième assertion, on trouve une direction de lien de selles qui n'est pas périodique. Ainsi par l'alternative de Veech (voir Théorème 1.4.3), la surface n'est pas de Veech, et donc le groupe n'est pas un réseau (c'est un groupe de première espèce [Kat92]). Comme l'ensemble limite est tout le cercle, la seule possibilité pour un tel groupe fuchsien est qu'il soit infiniment engendré. \square

Remarquons que le côté « faible complexité topologique » est très important ici. Notons aussi que d'autres exemples de groupes de Veech infiniment engendrés ont été construits au même moment par Hubert & Schmidt [HS04]. Ils utilisent une technique similaire (construction d'un ensemble dense de directions paraboliques).

Remarque 1.7.3. *La preuve ci-dessus se généralise très bien en genre plus grand. Il suffit, de nouveau, de ce placer dans un cadre avec de la symétrie pour n'obtenir que deux valeurs de modules. On peut ainsi construire de nombreux exemples de surfaces ayant un groupe de Veech de première espèce.*

Plus précisément, soit $p : \mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n) \rightarrow \mathcal{H}(l_1, \dots, l_r)$ le revêtement d'orientation. On considère une surface (S, ω) dans l'image de p . On souhaite trouver une strate pour laquelle le nombre de valeurs de modules de toute décomposition en cylindres soit au plus deux. Alors on peut montrer

Théorème 1.7.4 (Lanneau). *Soit p un tel revêtement (voir ci-dessus). Le nombre de valeurs de modules d'une décomposition en cylindres d'une surface de $\text{Im}(p)$ est toujours au plus deux si et seulement si p est l'un des revêtements suivants :*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(-1^5, 1) &\rightarrow \mathcal{H}(2) \\ \mathcal{Q}(-1^3, 3) &\rightarrow \mathcal{H}(4) \\ \mathcal{Q}(-1, 5) &\rightarrow \mathcal{H}(6). \end{aligned}$$

Ainsi la construction décrite plus haut s'applique aux strates $\mathcal{H}(4)$ et $\mathcal{H}(6)$. On retrouve ainsi un résultat de McMullen : ces exemples sont *exactement* les exemples construits dans [Mc7]. Ils sont d'ailleurs appelés lieux *Prym*.

1.7.3 Adhérences des disques de Teichmüller

McMullen a résolu la conjecture d'adhérence des orbites pour les surfaces de translation de genre 2. Un des ingrédients de la preuve est l'utilisation des théorèmes de Ratner sur les configurations unipotentes. Nous avons isolé le résultat suivant qui nous semble important.

Théorème 1.7.5 (McMullen, [Mc3]). *L'ensemble des directions, sur le cercle, donnant des configurations unipotentes sur une surface de translation $(\mathcal{S}, \omega) \in \mathcal{H}_2$ est dense.*

De plus s'il existe une configuration unipotente irrationnelle alors $\overline{GL_2(\mathbb{R})} \cdot (\mathcal{S}, \omega) = \text{strate}$.

Esquisse d'une preuve. Démontrons le second point dans le cas où $(\mathcal{S}, \omega) \in \mathcal{H}(1, 1)$. Quitte à normaliser les surfaces à une aire 1, nous allons considérer l'action de $SL_2(\mathbb{R})$. Notons que la dimension réelle de la strate normalisée $\mathcal{H}^{(1)}(1, 1)$ est $2(2g+n-1)-1 = 9$. Soit θ une configuration unipotente irrationnelle. Prenons θ horizontale quitte à faire agir le flot r_θ . Il y a deux possibilités pour une telle configuration : \mathcal{S} se décompose en deux ou en trois sous-surfaces. Quitte à redécouper \mathcal{S} dans une direction unipotente irrationnelle convenable, on peut supposer que cette surface se décompose en somme connexe de deux tores

$$(\mathcal{S}, \omega) = T_1 \# T_2.$$

Le flot unipotent u_s agit très naturellement sur cette décomposition :

$$u_s(\mathcal{S}, \omega) = (u_s T_1) \# (u_s T_2),$$

ce qui donne une action diagonale de N sur l'espace des paires de tores $G/\Gamma = SL_2(\mathbb{R})^2/\Gamma$ (voir section 1.5.2). Le théorème de Ratner implique donc que

$$\overline{N \cdot (\mathcal{S}, \omega)} \supset HT_1 \# HT_2,$$

où H est un sous groupe fermé de G . Les hypothèses sont là pour que $H = SL_2(\mathbb{R})$.

Maintenant la dimension réelle de $SL_2(\mathbb{R})T_1 \# SL_2(\mathbb{R})T_2$ est $3 + 3 = 6$. Comme le choix de la direction de départ θ est arbitraire (paramètre complexe pour la longueur et la direction de la fente entre les deux tores), on obtient un ensemble de dimension $6 + 2 = 8$ dans $SL_2(\mathbb{R}) \cdot (\mathcal{S}, \omega)$.

On montre alors que $\overline{SL_2(\mathbb{R}) \cdot (\mathcal{S}, \omega)}$ est bien de dimension réelle égale à celle de $\mathcal{H}^{(1)}(1, 1)$ (i.e. de dimension 9) en considérant les surfaces $(u_s T_1) \# (T_2) \in \overline{GL_2(\mathbb{R})} \cdot (\mathcal{S}, \omega)$ (variation du rapport de l'aire entre les tores). On conclut ensuite par ergodicité du flot géodésique. \square

Il n'y a pas beaucoup de possibilités pour les adhérences des orbites des surfaces de \mathcal{H}_2 . Pour énoncer le théorème de classification, nous devons d'abord définir les *variétés modulaires de Hilbert*.

La jacobienne d'une surface de Riemann X est une variété abélienne qui peut avoir des endomorphismes supplémentaires en plus de la multiplication par un entier. Il y a un cas intéressant lorsque l'anneau des endomorphismes est un ordre dans un corps quadratique réel. Dans ce cas $\text{Jac}(X)$ est dit avoir une multiplication réelle (RM) et on note

$$\mathcal{E} = \{(X, \omega) \mid \text{Jac}(X) \text{ a RM}, \omega \text{ comme forme propre pour RM}\}.$$

le lieu des formes propres. Les composantes \mathcal{E}_D de \mathcal{E} peuvent être indexées par le discriminant D de l'anneau des entiers.

Remarque 1.7.6. *On peut décrire géométriquement le lieu \mathcal{E}_D en utilisant le « feuilletage du noyau ».*

Soit (S, ω) une surface de $\mathcal{H}(1, 1)$. Fixons les périodes absolues de ω et modifions la période relative. On obtient ainsi une famille (feuille du noyau) à un paramètre complexe de surfaces dans \mathcal{H}_2 . Il peut bien sûr arriver que les deux zéros se « collent » pour donner une autre surface (compacte avec un zéro double, ou bien dégénérée). On peut effectuer cette construction sur une sous-variété invariante de $\mathcal{H}(1, 1)$ ce qui fournit alors une autre sous-variété invariante (voir [Zor06] pour une description détaillée). Le problème est qu'en général ce n'est pas une sous-variété invariante : elle n'est pas fermée. Mais en genre 2 elle l'est toujours !

Théorème 1.7.7 (Caltà ; McMullen). *Pour une surface de Veech $S \in \mathcal{H}(2)$, l'union des feuilles du feuilletage du noyau passant par la $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite fermée de S est une sous-variété fermée de dimension complexe 3.*

L'union de ces feuilles est précisément \mathcal{E}_D . Le théorème de classification suivant est maintenant particulièrement simple à énoncer :

Théorème 1.7.8 (McMullen, [Mc3]). *L'adhérence de l'orbite d'une surface de translation de genre 2 sous $GL_2(\mathbb{R})$ est :*

- i) *une strate $\mathcal{H}(2)$ ou $\mathcal{H}(1, 1)$, ou bien*
- ii) *une composante \mathcal{E}_D du lieu de multiplication réelle des formes propres, ou bien*
- iii) *un disque de Teichmüller i.e. l'orbite est fermée.*

En particulier, si le groupe de Veech contient un élément hyperbolique, alors seulement les cas (ii) ou (iii) peuvent se produire. Comme nous le verrons dans la section 1.8.3, cette situation contraste avec les adhérences des orbites des surfaces de *demi-translation* de genre deux.

Remarque 1.7.9. *De nouveau remarquons que la démonstration de ce théorème se généralise très bien lorsque l'on impose de la symétrie (revêtement des orientations). Ceci est considéré par McMullen avec le lieu Prym [Mc7].*

1.8 Surfaces de demi-translation de genre 2

Il est plus facile de travailler avec des surfaces de translation que des surfaces de demi-translation ; en général la géométrie est plus simple car nous avons une notion de flot. Si (S, q) est une surface de demi-translation, il existe une construction classique, *le revêtement des orientations*, $\pi : (\tilde{S}, \sqrt{\pi^*q}) \rightarrow (S, q)$ qui permet d'obtenir une surface de translation (par exemple voir [Lan03]).

1.8.1 Le lieu \mathcal{L}

L'espace \mathcal{Q}_2 possède trois strates holomorphes : $\mathcal{Q}(2, 2)$, $\mathcal{Q}(1, 1, 2)$ et $\mathcal{Q}(1, 1, 1, 1)$. Dans [Lan03] on démontre que la strate $\mathcal{Q}(1, 1, 1, 1)$ est connexe et est égale à sa composante connexe hyperelliptique. Ceci se traduit par le fait que les surfaces de $\mathcal{Q}(1, 1, 1, 1)$ s'obtiennent de surfaces de $\mathcal{Q}(1, 1, -1^6)$ par un revêtement double ramifié en les pôles. Par ailleurs, le revêtement des orientations fournit une application $p : \mathcal{Q}(1, 1, -1^6) \rightarrow \mathcal{H}(2, 2)$.

Proposition 1.8.1. *Il existe un isomorphisme linéaire (i.e. l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ est équivariante) entre la strate $\mathcal{Q}(1, 1, 1, 1)$ et l'image $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}(2, 2)$ de p . On peut caractériser le lieu \mathcal{L} par*

$$\mathcal{L} = \{(S, \omega) \in \mathcal{H}(2, 2), S \text{ est hyperelliptique, l'involution } \tau \text{ fixe les deux zéros et } \tau^*\omega = -\omega\}.$$

Notons aussi qu'il existe un analogue pour les deux autres strates holomorphes de \mathcal{Q}_2 . On peut démontrer :

Proposition 1.8.2. *Il existe un isomorphisme linéaire entre les strates $\mathcal{Q}(1, 1, 2)$ (respectivement, $\mathcal{Q}(2, 2)$) et $\mathcal{H}(0, 0, 2)$ (respectivement, $\mathcal{H}(0, 0, 0, 0)$).*

Ainsi les problèmes de dynamique de Teichmüller dans \mathcal{Q}_2 peuvent se ramener aux strates $\mathcal{H}(0, 0, 2)$ et $\mathcal{H}(0, 0, 0, 0)$ et au lieu \mathcal{L} . En utilisant la proposition ci-dessus, on peut montrer que les surfaces de Veech de $\mathcal{Q}(1, 1, 2)$ et $\mathcal{Q}(2, 2)$ sont arithmétiques (voir Vasilyev [Vas03]). Nous allons donc nous concentrer sur le troisième cas i.e. $\mathcal{Q}(1, 1, 1)$ ou le lieu \mathcal{L} .

1.8.2 Un exemple : le disque de Teichmüller de Arnoux-Yoccoz

En 1981 Arnoux & Yoccoz construisent une famille de surfaces de translation de genre $g \geq 3$ ayant un groupe de Veech non trivial (avec un élément hyperbolique).

Ces exemples avaient été construits initialement pour obtenir des échanges d'intervalles uniquement ergodiques, avec un invariant SAF nul, ainsi que des corps de traces de degré arbitraire (voir [AY81] et [Arn81], pp. 496–498).

Une étude géométrique montre, que pour le genre trois, cet exemple (souvent appelé l'exemple de Arnoux-Yoccoz) appartient au lieu \mathcal{L} . On obtient donc une surface de demi-translation $(Y, q) \in \mathcal{Q}(1, 1, 1)$ avec un élément hyperbolique dans $\text{PSL}(Y, q)$. Dans [HLM06], on démontre le théorème suivant qui contraste avec le comportement décrit par McMullen pour les surfaces de translation de genre 2.

Théorème IV. *Le groupe de Veech (Y, q) contient deux éléments hyperboliques non commutant. De plus le disque de Teichmüller de (Y, q) est dense dans \mathcal{Q}_2 .*

Ainsi le groupe de Veech est « gros », mais l'orbite aussi ! Nous ne savons toujours pas si le groupe de Veech est infiniment engendré ou non. En particulier, nous ne connaissons pas son ensemble limite (si c'est un ensemble de Cantor ou bien le cercle à l'infini).

L'idée de la preuve de la densité du disque, que l'on va ensuite généraliser, est décrite dans la section suivante. Pour l'existence des deux hyperboliques non commutants, voir section 3.2.5.

1.8.3 Adhérences des disques dans le lieu \mathcal{L}

On peut appliquer les techniques de McMullen, découpage de surfaces et théorèmes de Ratner, aux surfaces du lieu \mathcal{L} . Pour cela nous allons utiliser l'existence de directions unipotentes. Il est facile de voir que presque toute surface dans le lieu \mathcal{L} possède une telle configuration unipotente (car une telle configuration est stable par petites perturbations), mais, contrairement au genre 2, il existe des surfaces qui n'en possèdent pas ! On montre le théorème suivant, qui généralise le Théorème 1.7.5 de McMullen aux surfaces de demi-translation de genre 2 :

Théorème 1.8.3 (Hubert, Lanneau, Möller [HLM07]). *Soit $(S, \omega) \in \mathcal{L}$. Supposons qu'il existe une direction unipotente irrationnelle. Alors*

$$\overline{GL_2(\mathbb{R}) \cdot (S, \omega)} = \mathcal{L}.$$

Esquisse d'une démonstration. Notons Z l'adhérence $\overline{SL_2(\mathbb{R}) \cdot (S, \omega)}$ sous $SL_2(\mathbb{R})$ dans le lieu normalisé $\mathcal{L}^{(1)}$ (surfaces d'aire 1).

Soit N le sous groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ des éléments unipotents u fixant l'horizontale (on suppose la direction unipotente de l'énoncé est horizontale).

On a le découpage $(\mathcal{S}, \omega) = \#_{i=1}^k T_i \#_{i=1}^n C_i$. Alors l'action de N sur (\mathcal{S}, ω) est très simple à décrire : elle fixe le découpage et agit sur l'ensemble des tores et cylindres. L'espace des paramètres du découpage est isomorphe à l'espace homogène

$$G = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))^k \times N^n$$

pour des (k, n) bien choisis.

Grâce aux théorèmes de Ratner, l'adhérence de $N \cdot (\mathcal{S}, \omega)$ est algébrique i. e. $H \cdot (\mathcal{S}, \omega)$ où H est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2 \times N$ contenant N diagonalement.

Les hypothèses sont exactement celles qu'il faut pour que $H = G$. La dimension de H est $3k + n$ et en utilisant $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ on peut faire varier la configuration de découpage arbitrairement. Ainsi Z est de dimension au moins $d = 3k + n + 2$. Par ailleurs

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^{(1)} = 2(1 + n + 2k) - 1 = 4k + 2n - 1 = d + (k + n - 1).$$

Pour trouver les dimensions manquantes, on utilise un twist de Dehn pour faire varier les rapports d'aires des tores et des cylindres. \square

On montre le théorème général suivant

Théorème V (Hubert, Laneeau, Möller [HLM07]). *Soit (\mathcal{S}, ω) une surface de translation dans le lieu \mathcal{L} . On suppose que le groupe de Veech de \mathcal{S} possède un élément hyperbolique, et que le corps de traces est de degré 3 et totalement réel. Si (\mathcal{S}, ω) possède une direction périodique non parabolique alors l'adhérence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})(\mathcal{S}, \omega)$ est le lieu \mathcal{L} .*

Notons que ce théorème n'est pas vide : il existe une infinité de surfaces satisfaisant au théorème. En particulier, en se ramenant à \mathcal{Q}_2 , il existe une infinité de surfaces de demi-translation de genre 2 ayant un groupe de Veech non trivial (avec un hyperbolique) et une orbite dense sous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. De plus la condition sur le corps de traces est importante, sans cette condition le théorème est faux : par exemple par revêtement de surface de Veech de $\mathcal{H}(2)$.

Preuve du Théorème V. On va essayer de se ramener au Théorème 1.8.3. On veut donc trouver une direction unipotente irrationnelle. On sait qu'il existe une direction complètement périodique. Il est facile de faire la liste de toutes les directions possibles [HLM07], Figure 1c – $d - e - f - g$.

La condition sur le corps de traces implique que seulement quelques configurations sont possibles [HLM07], Corollaire 5.5. Pour chaque configuration possible, on trouve une configuration unipotente irrationnelle proche de celle ci. La démonstration est géométrique. \square

1.8.4 Limite de la stratégie

On peut essayer d'étendre les constructions ci-dessus. En effet trouver une direction irrationnelle unipotente est très fructueuse pour obtenir de l'information sur l'adhérence des orbites.

Malheureusement les strates qui possèdent des surfaces où l'on peut faire cette construction sont peu nombreuses. Essentiellement de telles surfaces, avec une direction unipotente, sont précisément celles données par un « collier » de cylindres et de tores.

Théorème 1.8.4 (Hubert, Laneeau, Möller [HLM10]). *Soit $(\mathcal{S}, \omega) \in \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ une surface de translation de genre g . Alors (\mathcal{S}, ω) possède une direction unipotente si et seulement si \mathcal{S} est construite à partir de cylindres et de tores collés en « collier ». De plus cette configuration possède soit*

1. g tores et aucun cylindre ; $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) = \mathcal{H}^{hyp}(g - 1, g - 1)$, ou bien
2. $g - 1$ tores et $0 < n \leq g - 1$ cylindres ; $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) = \mathcal{H}(2l_1, \dots, 2l_n)$.

De plus, comme pour le genre 2 et contrairement au genre 2, on peut montrer que l'ensemble des surfaces possédant une telle configuration est dense, mais n'est pas toute la composante connexe [HLM10], Proposition 6.2.

1.8.5 Directions complètement périodiques

Nous avons supposé dans les sections précédentes que le corps de traces était totalement réel (pour appliquer le flux). Ici sans aucune restriction sur le corps de traces, nous montrons

Théorème VI (Hubert, Laneeau, Möller [HLM07]). *Soit $(S, \omega) \in \mathcal{L}$ une surface de translation. On suppose qu'il existe un élément hyperbolique dans le groupe de Veech. S'il existe une direction complètement périodique alors l'ensemble des directions complètement périodiques sur (S, ω) est dense dans le cercle \mathbb{S}^1 .*

Evidemment la conclusion est fautive pour une surface générique dans \mathcal{L} (par exemple voir Proposition 3.4, [HLM07]). Ce résultat s'applique aux surfaces construites en particulier à l'aide de la construction de Thurston-Veech (section 3.2.1).

Le théorème ci-dessus, combiné avec le Théorème V, donne

Théorème VII (Hubert, Laneeau, Möller [HLM07]). *Soit $(S, \omega) \in \mathcal{L}$ une surface obtenue par la construction de Thurston-Veech. On suppose que le corps de traces est de degré 3 sur \mathbb{Q} . Alors au moins l'une des deux conditions suivantes doit être satisfaite :*

1. *L'adhérence de l'orbite $SL_2(\mathbb{R})(S, \omega)$ est le lieu $\mathcal{L}^{(1)}$.*
2. *L'ensemble limite du groupe de Veech $SL(S, \omega)$ est le cercle tout entier ; en particulier ou bien (S, ω) est une surface de Veech, ou bien $SL(S, \omega)$ est infiniment engendré.*

On ne sait toujours pas s'il existe une surface satisfaisant aux deux propriétés en même temps. On ne connaît même pas d'exemple non trivial du cas 2.

Il serait intéressant d'avoir un algorithme pour calculer l'ensemble limite d'un groupe de Veech.

Esquisse d'une preuve du Théorème VI. On utilise un résultat général de Masur [Mas86, MaTa02] qui affirme que dans presque toute direction, il existe un cylindre. Ensuite on affine ce résultat pour le lieu \mathcal{L} . On montre qu'il existe un ensemble dense de directions $\theta \in \mathbb{S}^1$ telle que dans la direction θ , ω possède un cylindre qui contient un point de Weierstrass.

Ensuite on montre que ces directions sont nécessairement complètement périodiques. Pour cela on utilise le Théorème 1.6.2 qui implique que l'invariant SAF est nul dans toutes les directions du corps de traces (donc aussi dans la direction θ qui est dans le corps d'holonomie [KS00]).

Maintenant le complémentaire du cylindre dans S est une surface à bord \widehat{S} . On peut construire naturellement une surface compacte M en identifiant les bords par translations. Comme l'invariant SAF est additif et comme il est nul sur le cylindre, il est aussi nul sur M . Une étude fine des configurations montre que ou bien $M \in \mathcal{H}(2)$ ou bien $M \in \mathcal{H}(1, 1)$ et M possède deux liens de selles non-homologues.

Ainsi le premier retour du flot dans la direction θ sur une bonne transversale est un échange d'intervalles défini 3 intervalles avec invariant SAF nul. On peut alors montrer (thèse de Arnoux [Arn81]) que l'échange d'intervalles est complètement périodique ; bref le flot sur M , et donc sur (S, ω) , dans la direction θ est complètement périodique. \square

Remarque 1.8.5. *Ce résultat est similaire à celui de Calta pour les surfaces de \mathcal{H}_2 : toutes les directions possédant un cylindre sont complètement périodiques (ici en revanche nous ne considérons seulement que les directions possédant un cylindre fixe par l'involution).*

Ces méthodes permettent de généraliser le résultat de Calta pour d'autres strates (qui ne sont pas les lieux Prym) :

Théorème 1.8.6 (Lanneau). *Soit $(S, \omega) \in \mathcal{H}^{hyp}(4)$ une surface de translation dans la composante hyperelliptique. On suppose que le flux complexe est nul (par exemple (S, ω) est obtenue par la construction de Thurston-Veech). Alors (S, ω) est complètement périodique dans le sens de Calta.*

2 Surfaces plates et involutions linéaires

Le lien entre échanges d'intervalles et surfaces de translation a été largement étudié, notamment en raison d'une construction due à Veech et à Masur [Mas82, Vee82] qui permet de décrire le flot directionnel sur une surface de translation comme un flot de suspension au-dessus d'un échange d'intervalles. Dans cette section nous allons construire un analogue pour les surfaces de demi-translation et étudier la dynamique de l'induction de Rauzy-Veech.

2.1 Échanges d'intervalles

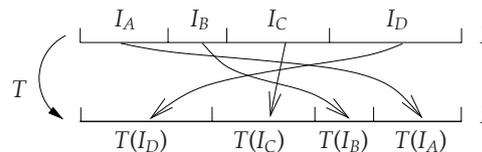
On rappelle qu'un échange d'intervalles est une bijection d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, privé d'un nombre fini de points, vers un ensemble co-fini de I , isométrique sur un nombre fini de morceaux et préservant l'orientation. Cette classe d'applications forme une généralisation naturelle des rotations. On voit facilement qu'un échange d'intervalles T est défini de manière unique par une permutation π , de d éléments, ainsi que par les longueurs des intervalles échangés $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^d$. Plus précisément π encode comment les intervalles sont échangés : le k -ième intervalle, numéroté de la gauche vers la droite, étant envoyé par T à la place $\pi(k)$. On va noter dans toute la suite $T = (\pi, \lambda)$.

Cette représentation impose un certain choix de numérotation des intervalles ; cela va poser quelques difficultés pour la suite. L'idée de Kerckhoff [Ker85], reprise par Bufetov [Buf06], puis par Marmi, Moussa & Yoccoz [MMY05] est de s'affranchir de cela et d'attribuer à chaque intervalle une étiquette. Cela impose de redéfinir la notion de permutation. C'est cette nouvelle définition qui rend possible beaucoup de preuves.

On considère un alphabet fini \mathcal{A} sur d lettres et on note les intervalles maximaux $\{I_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ sur lesquels T est continue. La longueur des intervalles est un vecteur $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ dans le cône positif. La permutation π est alors la donnée du couple $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ d'applications bijectives $\pi_\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ (« t » est pour *top* et « b » pour *bottom* comme nous allons le voir). Avec ces notations on a $\pi = \pi_b \circ \pi_t^{-1}$. On représente les permutations par un tableau

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d \\ \pi^{-1}(1) & \pi^{-1}(2) & \dots & \pi^{-1}(d) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \pi_t^{-1}(1) & \pi_t^{-1}(2) & \dots & \pi_t^{-1}(d) \\ \pi_b^{-1}(1) & \pi_b^{-1}(2) & \dots & \pi_b^{-1}(d) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$ (ici $d = 4$) la permutation $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$ encode l'échange d'intervalles T présenté ci-contre.



2.1.1 Échanges d'intervalles génériques

Si $d = 2$ un échange d'intervalles n'est rien d'autre qu'une rotation (vue sur le cercle). Pour $d = 3$ on peut encore relier les échanges d'intervalles aux rotations, mais des phénomènes nouveaux et compliqués apparaissent [FHZ01, FHZ01bis, FHZ03, FHZ04]. Ces applications sont minimales, et même uniquement ergodiques, si les longueurs des intervalles sont indépendantes sur \mathbb{Q} . Keane [Kea75] introduit une notion analogue d'irrationalité lorsque $d \geq 3$.

Une connexion de T est une orbite finie de T qui ne peut être prolongée ni dans le futur, ni dans le passé. Si T n'a pas de connexion (et π est irréductible), on dit que T a la propriété de Keane. Un échange d'intervalles qui a la propriété de Keane est minimal. Keane montre alors que si π est irréductible et si les λ_i sont indépendants sur \mathbb{Q} alors $T = (\pi, \lambda)$ a la propriété de Keane. Ce qui donne la minimalité de T pour presque tout λ . En revanche ceci n'implique pas l'unique ergodicité si $d \geq 4$. La *conjecture de Keane* était que pour π irréductible et pour presque tout λ , T est uniquement ergodique ; elle a été prouvée par Masur [Mas82] et Veech [Vee82].

Remarque 2.1.1. $\dim_{\mathbb{Q}}(1, \lambda_i) = d + 1$ implique que T satisfait à la propriété de Keane, mais la réciproque est fautive. Il serait intéressant d'obtenir une description des λ satisfaisant la propriété de Keane. Voir [FHZ03] pour une réponse pour 3 intervalles.

Ces applications sont étroitement reliées aux surfaces de translation et ont été étudiées intensivement ces 30 dernières années. En effet pour chaque $T = (\pi, \lambda)$ avec π irréductible, on peut construire une surface de translation telle que T soit le premier retour du flot directionnel sur cette surface sur un segment bien choisi.

2.1.2 Données de suspension au dessus d'un échange d'intervalles

Une donnée de suspension au dessus de π est une collection de vecteurs $(\tau_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ telle que

1. $\forall 1 \leq k \leq d - 1, \sum_{\pi_t(\alpha) \leq k} \tau_\alpha > 0$, et
2. $\forall 1 \leq k \leq d - 1, \sum_{\pi_b(\alpha) \leq k} \tau_\alpha < 0$.

On dira aussi que le vecteur $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est une donnée de suspension au dessus de $T = (\pi, \lambda)$.

Géométriquement cela s'explique très bien. Considérons la ligne brisée L_t sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ définie par concaténation des vecteurs $\zeta_{\pi_t^{-1}(j)}$ (dans cet ordre) pour $j = 1, \dots, d$ avec comme point de départ l'origine (voir Figure 2). De manière similaire, on considère la ligne brisée L_b définie par concaténation des vecteurs $\zeta_{\pi_b^{-1}(j)}$ (dans cet ordre) pour $j = 1, \dots, d$ toujours en partant de l'origine. On construit une surface de translation \mathcal{S} en identifiant chaque côté ζ_α sur L_t avec le côté ζ_α sur L_b par translation. Soit $I \subset \mathcal{S}$ l'intervalle horizontal défini par $I = [0, \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha] \times \{0\}$. Alors T est précisément défini par le premier retour sur I du flot vertical sur \mathcal{S}

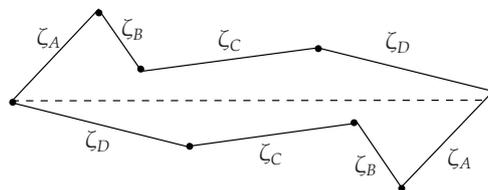


FIGURE 2 – Suspension au dessus d'un échange d'intervalles.

Une condition nécessaire et suffisante pour que T admette une donnée de suspension est que π soit irréductible (voir Masur [Mas82] page 174 et Veech [Vee82] formule 3.7 page 207).

2.1.3 Rectangles cousus (Zippered rectangles en anglais)

On décrit ici la construction originale de Veech [Vee82]. Soit ζ une donnée de suspension pour T . Alors on construit $h = (h_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ par

$$h_\alpha = \sum_{\pi_t(\beta) < \pi_t(\alpha)} \text{Im}(\zeta_\beta) - \sum_{\pi_b(\beta) < \pi_b(\alpha)} \text{Im}(\zeta_\beta) > 0.$$

Pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$ on construit un rectangle R_α de largeur $\text{Re}(\zeta_\alpha)$ et de hauteur h_α basé en $I_{\pi_t(\alpha)} \subset I$. La construction des rectangles cousus est une surface de translation $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} R_\alpha / \sim$ où \sim est la relation d'équivalence suivante : on identifie le haut et le bas de ces rectangles par $(x, h_\alpha) \sim (T(x), 0)$ pour $x \in I_{\pi_t(\alpha)}$. Pour finir on « zippe » les bords verticaux de ces rectangles qui sont adjacents jusqu'à une singularité (voir la Figure 3 et [Vee82] pour une description précise).

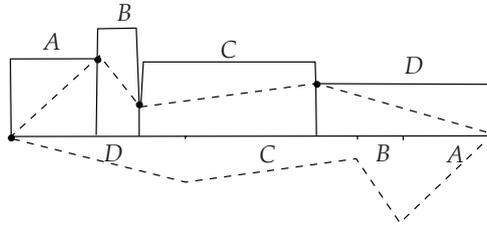


FIGURE 3 – Construction des « zippered rectangles ».

Il est bien connu que les fractions continues encodent le flot géodésique sur la courbe modulaire ([Ser, Arn94]). De manière similaire on peut encoder le flot géodésique de Teichmüller grâce à l'induction de Rauzy-Veech (analogue de l'algorithme Euclidien). Ceci nous donne un modèle discret pour le flot géodésique de Teichmüller ([Rau79, Vee82]) comme nous allons le voir.

2.2 Induction de Rauzy-Veech pour les échanges d'intervalles

Une bonne manière d'étudier un système dynamique est de considérer l'induit du système sur un sous-ensemble. Ces techniques de renormalisation s'avèrent particulièrement fructueuses.

2.2.1 Induction sur les échanges d'intervalles

L'induction de Rauzy-Veech est un procédé d'induction sur les échanges d'intervalles. Si $T = (\pi, \lambda)$ on définit le type $\varepsilon \in \{t, b\}$ de T par $\lambda_{\pi_\varepsilon^{-1}(d)} > \lambda_{\pi_{1-\varepsilon}^{-1}(d)}$. L'intervalle $I_{\pi_\varepsilon^{-1}(d)}$ est le gagnant et l'intervalle $I_{\pi_{1-\varepsilon}^{-1}(d)}$ est le perdant [AGY06] (le sens de l'écriture $1 - \varepsilon$ est intuitive).

L'induction de Rauzy-Veech $\mathcal{R}(T)$ consiste alors à prendre l'induit de T sur l'intervalle J que l'on construit en retirant le perdant de I (c'est encore un échange d'intervalles sur d intervalles). On peut décrire facilement les données combinatoires de $\mathcal{R}(T)$ en fonction de π . Cela définit deux applications \mathcal{R}_t et \mathcal{R}_b telles que $\mathcal{R}(T) = (\mathcal{R}_\varepsilon(\pi), \lambda')$ où ε est le type de T .

La transformation sur λ est très simple à décrire. En effet on peut définir une *matrice de transition* $V = V_{\alpha\beta}$ positive telle que $V\lambda' = \lambda$.

Remarque 2.2.1. Les matrices d'induction sont très « simples » i.e. de la forme $Id + E$ où E est une matrice dont les coefficients sont tous nuls, sauf un qui est égal à 1. C'est cette forme qui est particulièrement utile dans les démonstrations. Les matrices qui apparaissent dans [Vee82] sont de la forme $P + E$ où P est une matrice de permutation.

2.2.2 Induction sur les suspensions

Cette induction n'est pas bijective, mais 2 à 1. Pour la rendre bijective, on peut construire son extension naturelle de la manière suivante. On définit l'induction de Rauzy-Veech sur les suspensions $\zeta = (\lambda, \tau)$ de manière analogue par $\mathcal{R}(\pi, \zeta) = (\pi', \zeta')$ avec

$$\begin{cases} \pi' = \mathcal{R}_\varepsilon(\pi), \\ V\zeta' = \zeta. \end{cases}$$

Cette induction sur l'espace des suspensions devient alors bijective. Géométriquement cela s'interprète de la façon suivante :

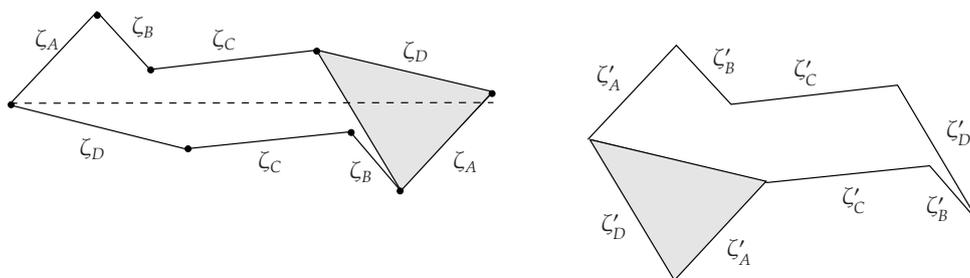
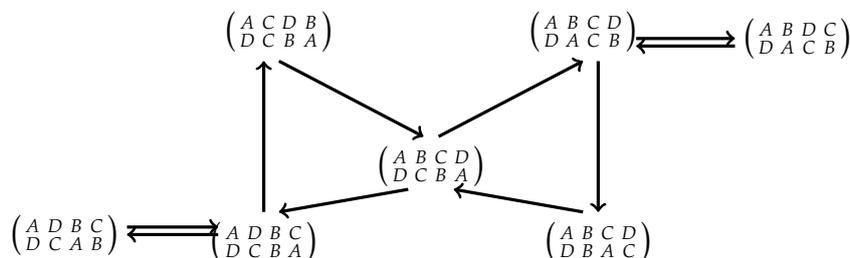


FIGURE 4 – Induction de Rauzy-Veech sur une suspension au dessus d'un échange d'intervalles. La transformation est de type t donc la nouvelle donnée de suspension est $\zeta'_A = \zeta_A$, $\zeta'_B = \zeta_B$, $\zeta'_C = \zeta_C$ et $\zeta'_D = \zeta_D - \zeta_A$. Bien sûr les deux surfaces (π', ζ') et (π, ζ) sont isométriques (elles diffèrent d'un élément du groupe modulaire).

2.2.3 Diagrammes de Rauzy

On appelle diagramme de Rauzy étiqueté associé à la permutation π , noté $\mathcal{D}(\pi)$, le graphe ayant pour sommets toutes les permutations obtenues par opérations de Rauzy et pour arrêtes les étiquettes t ou b suivant le type.



À chaque chemin γ dans ce diagramme, on peut naturellement définir une matrice $V(\gamma)$, produit des matrices de transitions.

On peut définir les diagrammes de Rauzy réduits, comme cela avait été à l'origine ([Vee82]). Ils sont obtenus après identifications de (π_t, π_b) avec (π'_t, π'_b) si $\pi_b \circ \pi_t^{-1} = \pi'_b \circ \pi'_t^{-1}$. On utilisera la notation $\mathcal{D}_u(\pi)$ pour ces diagrammes.

Observons que ces diagrammes \mathcal{D} sont des revêtements au-dessus des diagrammes réduits \mathcal{D}_u . Les degrés de ces revêtements ont été calculés :

Théorème 2.2.2 (Boissy [Boi10]). *Pour la composante connexe hyperelliptique, le degré est 1, sinon pour la strate $\mathcal{H}(k_0, k_1^{\alpha_1}, \dots, k_n^{\alpha_n})$ le degré est*

$$\varepsilon \prod_{i=1}^n (k_i + 1)^{\alpha_i} \alpha_i! \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ si un des } k_i \text{ est impair, 1 sinon.}$$

On peut aussi calculer le cardinal des diagrammes de Rauzy étiquetés [Del10] ce qui donne donc le cardinal des diagrammes de Rauzy en général.

On termine cette section par quelques exemples de diagrammes de Rauzy. Les premières familles infinies de digrammes ont été données par Rauzy et correspondent aux composantes connexes hyperelliptiques $\mathcal{H}^{hyp}(2g-2)$ et $\mathcal{H}^{hyp}(g-1, g-1)$ (voir [Rau79]). Les permutations représentatives sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $n = 2g$ ou $n = 2g + 1$ suivant les cas.

Dans [BL10], on décrit le diagramme associé aux permutations :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il serait intéressant d'obtenir une description d'autres familles de diagrammes. Nous verrons l'utilité d'une telle description en section 3.3.3.

2.2.4 Espace des modules et induction de Rauzy-Veech

Il s'avère que cette induction fournit un modèle discret du flot géodésique de Teichmüller. On explique le lien ici. Si C est une composante connexe d'une strate, on définit \widehat{C} le revêtement ramifié fini au dessus de C obtenu en prenant les triplets (S, ω, l) où $(S, \omega) \in C$ et l est une séparatrice adjacente à un zéro.

Si \mathcal{D} est un diagramme de Rauzy associé à π , l'ensemble des suspensions pour π est connexe et l'application $\zeta \mapsto \mathcal{S}(\pi, \zeta)$ est continue. Ainsi toutes les surfaces obtenues par cette construction sont dans la même composante connexe d'une strate, disons $\widehat{C}(\pi)$ avec $C \subset \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$. Maintenant si C est une composante on définit

$$\mathcal{T}(\widehat{C}) = \{(\pi, \zeta), \widehat{C}(\pi) = \widehat{C}, \zeta \text{ est une suspension pour } \pi\}.$$

L'induction est bien définie (presque partout) sur $\mathcal{T}(\widehat{C})$ et est bijective (presque partout). On peut donc former le quotient $\mathcal{H}(\widehat{C}) = \mathcal{T}(\widehat{C}) / \sim$ par l'induction. Alors la construction des rectangles

cousus fournit une application bijective (presque partout) $Z : \mathcal{H}(\widehat{\mathcal{C}}) \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\widehat{\mathcal{C}}) & \xrightarrow{Z} & \widehat{\mathcal{C}} \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{C} \subset \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) \end{array}$$

Il y a une mesure naturelle m sur $\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{C}})$ i.e. $m = d\pi d\zeta$, où $d\pi$ est la mesure de comptage sur \mathcal{D} et $d\zeta$ la mesure de Lebesgue. Le flot g_t agit linéairement sur $\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{C}})$ par $g_t(\pi, \zeta) = (\pi, (g_t(\zeta_\alpha))_\alpha)$. On l'appelle le flot de Teichmüller. Il préserve la mesure m . En fait l'action de g_t est équivariante par rapport à Z i.e. $Z \circ g_t(\pi, \zeta) = g_t \circ Z(\pi, \zeta)$.

De plus l'ensemble

$$\{(\pi, \zeta) \in \mathcal{T}(\widehat{\mathcal{C}}); 1 \leq |Re(\zeta)| \leq 1 + \min(Re(\zeta_{\pi_0^{-1}(d)}), Re(\zeta_{\pi_b^{-1}(d)}))\}$$

est un domaine fondamental de $\mathcal{T}(\widehat{\mathcal{C}})$ pour l'action de \mathcal{R} et le premier retour de Poincaré du flot géodésique de Teichmüller sur

$$\{(\pi, \zeta); \pi \text{ irréductible, } |Re(\zeta)| = 1\} / \sim$$

est l'induction de Rauzy-Veech *renormalisée* (i.e. la longueur de l'intervalle λ est renormalisée à 1).

C'est en utilisant cette relation que Veech obtient le résultat sur l'ergodicité du flot géodésique [Vee82]. De plus en utilisant les classes de Rauzy et cette application Z , Kontsevich & Zorich ont pu effectuer des calculs numériques et ainsi classifier les composantes connexes des strates en petit genre [KZ03] (calculs sur les classes de Rauzy étendues).

Mais, l'induction de Rauzy-Veech pour les échanges d'intervalles, initialement construite pour l'ergodicité des échanges d'intervalles et du flot géodésique, s'avère en fait très efficace bien au delà de ces problèmes initiaux.

En effet cette technique de renormalisation a été utilisée pour de nombreux résultats, comme par exemple le mélange faible pour presque tout échanges d'intervalles (Avila & Forni [AF07]), la décroissance exponentielle des corrélations pour le flot de Teichmüller (Avila, Gouëzel & Yoccoz [AGY06]), la simplicité du spectre des exposants de Lyapunov (Zorich, Forni et Avila & Viana [Zor96, AV07]), existence et unicité de la mesure d'entropie maximale (Bufetov & Gurevich [BG07]).

Ces résultats concernent les espaces des modules des *différentielles abéliennes*, ceux correspondants aux espaces des modules des *différentielles quadratiques* restant encore ouverts en général.

D'un point de vue de la dynamique de Teichmüller, il convient donc d'avoir un objet analogue aux échanges d'intervalles. C'est le but des sections à venir.

2.3 Involutions linéaires

On veut coder les géodésiques verticales sur une surface de demi-translation. La difficulté ici est que le feuilletage n'est pas orienté et donc que nous n'avons de notion de flot. Pour remédier à cela nous allons considérer le « double retour » sur une section transverse au feuilletage.

Si \mathcal{S} est une surface de demi-translation, et I un segment horizontal (avec un choix de direction positive, par exemple nord) alors on va considérer la feuille issue d'un point $x \in I$ et regarder le premier retour des deux demi-géodésiques issues de x dans la direction positive et

négative. La première géodésique va intersecter notre intervalle I de nouveau en un point noté $T_0(x)$. La seconde géodésique va intersecter I en $T_1(x)$. Comme pour les échanges d’intervalles, si on veut regarder la dynamique, on va donc considérer un système dynamique sur $I \times \{0, 1\}$. Tout ceci motive la définition suivante :

Définition 2.3.1. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R}^2 . Une involution linéaire est une application bijective continue $T = f \circ \widehat{T}$ de $\widehat{X} = X \times \{0, 1\}$ telle que

- \widehat{T} est une involution continue sans points fixes sur $\widehat{X} \setminus \Sigma$, où Σ est un ensemble fini de \widehat{X} .
- Si $p = (x, \varepsilon)$ et $T(p)$ est dans la même composante connexe de \widehat{X} alors la dérivée de \widehat{T} en p est -1 , sinon la dérivée de \widehat{T} en p est 1 .
- f est l’involution $(x, \varepsilon) \mapsto (x, 1 - \varepsilon)$.

On emploiera aussi la dénomination échange d’intervalles généralisé.

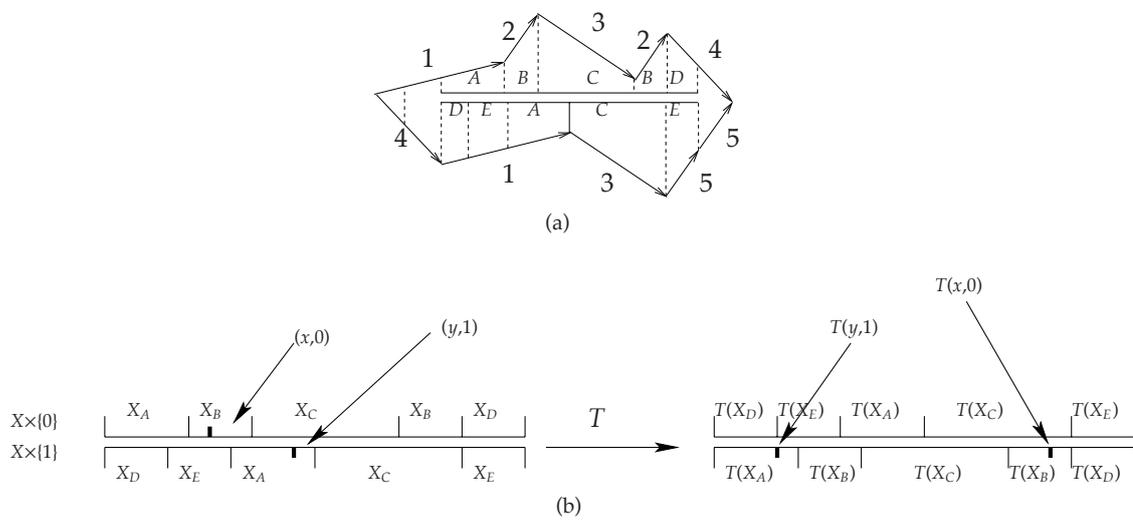


FIGURE 5 – Involution linéaire et feuilletage mesuré.

Les échanges d’intervalles généralisés sont des cas particuliers des involutions linéaires introduites et étudiées par Danthony & Nogueira (on pourra consulter [DN88, DN90] ainsi que [Nog89]).

Tout comme les échanges d’intervalles, un échange d’intervalles généralisé se code par une donnée continue (la longueur des intervalles) et une donnée discrète : une permutation généralisée.

2.3.1 Permutations généralisées et phénomène de Kontsevich-Zorich

Ces objets ont été étudiés combinatoirement pour la première fois par Kontsevich et Zorich. Ils ont réalisé de nombreuses expériences numériques sur les classes de Rauzy dans les années 1990. En particulier ils ont mis en évidence des phénomènes surprenants.

Ils ont trouvé des exemples de permutations généralisées pour lesquelles l’échange d’intervalles généralisé correspondant est minimal pour un ensemble de paramètres de mesure

positive, et non minimal pour un autre ensemble de paramètres de mesure positive également. Ces permutations faisant partie d'une classe plus large de permutations généralisées, appelées alors « permutations médiocres », qui ne pouvaient être considérées ni comme réductibles, ni comme irréductibles. Ils n'ont cependant pas trouvé de critère combinatoire raisonnable d'irréductibilité, et l'existence même d'un tel critère est restée une question ouverte. On se propose de résoudre cette question dans la section présente.

Définition 2.3.2. Soit \mathcal{A} un alphabet sur d lettres. Une permutation généralisée de type (l, m) , avec $l + m = 2d$, est une application $\pi : \{1, \dots, 2d\} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que chaque élément de \mathcal{A} admette exactement deux antécédents. On représente en général un tel objet par un tableau

$$\begin{pmatrix} \pi(1) & \dots & \pi(l) \\ \pi(l+1) & \dots & \pi(l+m) \end{pmatrix}.$$

Dans la Figure 5, on encode la permutation sur un alphabet à $d = 5$ lettres, $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$ de la manière suivante :

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & B & D \\ D & E & A & C & E \end{pmatrix}.$$

On peut définir, tout comme les échanges d'intervalles, une donnée de suspension ζ , ainsi que des rectangles cousus au dessus de (π, λ) . Ceci permet de définir une surface de demi-translation $\mathcal{S}(\pi, \zeta)$ ainsi qu'un intervalle transverse au feuilletage vertical tel que l'application de premier retour soit l'échange d'intervalles généralisé.

Les échanges d'intervalles généralisés n'admettent pas tous une donnée de suspension (comme les échanges d'intervalles). Néanmoins dans ce contexte la notion analogue d'irréductibilité est moins claire.

Définition 2.3.3. On dira que π est réductible si π admet la décomposition suivante :

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} A \cup B & * & * & * & D \cup B \\ \hline A \cup C & * & * & * & D \cup C \end{array} \right), \quad A, B, C, D \text{ ensembles disjoints de } \mathcal{A},$$

et si les ensembles A, B, C, D (que l'on appelle coins) ne sont pas tous vides et satisfont à l'une des conditions suivantes :

- i- Aucun coin n'est vide,
- ii- Exactement un coin est vide et il est à gauche,
- iii- Exactement deux coins sont vides et ils sont sur un même côté.

Par exemple la permutation $\pi = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right)$ est réductible.

Théorème 2.3.4 (Boissy & Lanneau [BL08]). Un échange d'intervalles généralisé admet une donnée de suspension si et seulement si π est irréductible.

La preuve est technique et surtout indirecte. Il n'y a pas de formule donnant une solution pour une donnée de suspension (contrairement au cas orientable). L'argument que nous utilisons consiste à considérer des améliorations successives de « pseudo-solutions » (solutions de type polygone de Masur [Mas82]).

2.3.2 Dynamique des échanges d'intervalles généralisés

On va étudier dans cette section un échange d'intervalles généralisé comme objet dynamique intrinsèque. L'idée est d'obtenir un analogue de la propriété de Keane pour ces applications i.e. une certaine irrationalité pour les échanges d'intervalles généralisés.

On définit naturellement une connexion d'un échange d'intervalles généralisé comme une orbite finie $\{T^i(x, \varepsilon)\}_{i=0, \dots, r}$ qui ne peut être prolongée ni dans le futur, ni dans le passé. L'entier r est appelé longueur de la connexion. On dit qu'un échange d'intervalles généralisé vérifie la propriété de Keane s'il est sans connexion.

Contrairement aux échanges d'intervalles, les notions d'irréductibilité et d'irrationalité sont différentes ! La notion d'irréductibilité suivante est déjà définie dans [Lan08].

Définition 2.3.5. $T = (\pi, \lambda)$ est dynamiquement irréductible si

1. π se décompose comme $\left(\begin{smallmatrix} A| & *** \\ \hline \bar{A}| & *** \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} ***| & D \\ \hline ***| & D \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} AUB| & DUB \\ \hline AUC| & DUC \end{smallmatrix}\right)$ avec A, D non vides ; ou bien
2. π se décompose comme $\left(\begin{smallmatrix} AUB| & *** & | & BUD \\ \hline AUC| & \alpha_0 & *** & \alpha_0 & | & CUD \end{smallmatrix}\right)$, $B \neq \emptyset$ (quitte à permuter les lignes de π) et les paramètres λ vérifient

$$\sum_{\alpha \in C} \lambda_\alpha \leq \sum_{\alpha \in B} \lambda_\alpha \leq \lambda_{\alpha_0} + \sum_{\alpha \in C} \lambda_\alpha.$$

Remarque 2.3.6. Si T est dynamiquement réductible cas (1) (respectivement, cas (2)) alors T admet une connexion de longueur 0 (respectivement, 1). Ces notions correspondent respectivement aux notions irréductible1 et irréductible2 de [Lan08].

L'ensemble des échanges d'intervalles généralisés dynamiquement irréductibles est ouvert. Cependant, contrairement à l'irréductibilité géométrique, cette dernière notion peut dépendre des paramètres : il existe des permutations généralisées telles que l'application soit dynamiquement irréductible pour un ensemble ouvert dans l'espace des paramètres, et soit dynamiquement réductible pour un ensemble fermé de mesure non nulle dans l'espace des paramètres. On a le résultat suivant :

Théorème VIII (Boissy & Laneeau [BL08]). Soit $T = (\pi, \lambda)$ un échange d'intervalles généralisé.

1. Si T n'est pas dynamiquement irréductible, alors T n'est pas minimal.
2. Si T est dynamiquement irréductible, et si λ est générique, alors T est minimal.

Ce théorème explique les phénomènes observés par Kontsevich et Zorich. En effet, irréductible implique dynamiquement irréductible, mais la réciproque est fautive en général. En particulier, les permutations pour lesquelles la réciproque est fautive sont précisément les permutations « médiocres » de Kontsevich et Zorich. La permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ en est un exemple (voir [BL08]).

Pour démontrer ce théorème, on se ramène à une propriété de type Keane. La minimalité est alors impliquée pour presque tout les paramètres.

2.4 Dynamique de l'induction de Rauzy-Veech

Nous venons de voir dans les sections 2.3.1 et 2.3.2 deux notions distinctes d'irréductibilité : « géométrique » et « dynamique ». Nous allons faire le lien entre ces différentes notions via l'induction de Rauzy-Veech.

2.4.1 Espaces des modules et induction de Rauzy-Veech

On peut définir l'induction de Rauzy-Veech pour les échanges d'intervalles généralisés comme premier retour sur un intervalle bien choisi. Tout comme pour les échanges d'intervalles, cette induction renormalisée fournit un modèle discret du flot géodésique de Teichmüller sur les différentielles *quadratiques non-orientables*. On explique le lien ici. En reprenant les mêmes notations que la section 2.2.4, si \mathcal{D} est un diagramme de Rauzy associé à π , l'ensemble des suspensions pour π est connexe et l'application $\zeta \mapsto \mathcal{S}(\pi, \zeta)$ est continue. Ainsi toutes les surfaces obtenues par cette construction sont dans la même composante connexe d'une strate, disons $\widehat{C}(\pi)$ avec $C \subset \mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n)$. Maintenant si C est une composante on définit

$$\mathcal{T}(\widehat{C}) = \{(\pi, \zeta), \widehat{C}(\pi) = \widehat{C}, \zeta \text{ est une suspension pour } \pi\}.$$

L'induction est bien définie (presque partout) sur $\mathcal{T}(\widehat{C})$ et est bijective (presque partout). On peut donc former le quotient $\mathcal{Q}(\widehat{C}) = \mathcal{T}(\widehat{C}) / \sim$ par l'induction. Alors la construction des rectangles cousus fournit une application bijective (presque partout) $Z : \mathcal{Q}(\widehat{C}) \rightarrow \widehat{C}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(\widehat{C}) & \xrightarrow{Z} & \widehat{C} \\ & & \downarrow \\ & & C \subset \mathcal{Q}(k_1, \dots, k_n) \end{array}$$

Il y a une mesure naturelle m sur $\mathcal{Q}(\widehat{C})$ i.e. $m = d\pi d\zeta$, où $d\pi$ est la mesure de comptage sur \mathcal{D} et $d\zeta$ la mesure de Lebesgue. Le flot g_t agit linéairement sur $\mathcal{Q}(\widehat{C})$ par $g_t(\pi, \zeta) = (\pi, (g_t(\zeta_\alpha))_\alpha)$. On l'appelle le flot de Teichmüller. Il préserve la mesure m . En fait l'action de g_t est équivariante par rapport à Z i.e. $Z \circ g_t(\pi, \zeta) = g_t \circ Z(\pi, \zeta)$.

De plus l'ensemble

$$\{(\pi, \zeta) \in \mathcal{T}(\widehat{C}); 1 \leq |Re(\zeta)| \leq 1 + \min(Re(\zeta_{\pi_0^{-1}(d)}), Re(\zeta_{\pi_b^{-1}(d)}))\}$$

est un domaine fondamental de $\mathcal{T}(\widehat{C})$ pour l'action de \mathcal{R} et le premier retour de Poincaré du flot géodésique de Teichmüller sur

$$\{(\pi, \zeta); \pi \text{ irréductible}, |Re(\zeta)| = 1\} / \sim$$

est l'induction de Rauzy-Veech *renormalisée* (i.e. la longueur de l'intervalle λ est renormalisée à 1).

Cette correspondance entre l'induction de Rauzy-Veech renormalisée et le flot géodésique de Teichmüller permet de montrer le théorème :

Théorème IX (Boissy & Laneeau [BL08]). *Soit T un échange d'intervalles généralisé satisfaisant la propriété de Keane. Alors pour tout n assez grand la permutation généralisée associée à $\mathcal{R}^{(n)}(T)$ est irréductible. De plus l'induction de Rauzy-Veech renormalisée est récurrente sur $\{(\pi, \lambda), \pi \text{ irréductible}\}$ pour la mesure naturelle.*

Remarquons que la mesure sur $\{(\pi, \lambda), \pi \text{ irréductible}\}$ est de masse *infinie*.

2.4.2 Diagrammes de Rauzy

Comme pour les permutations « classiques », on peut définir naturellement les diagrammes de Rauzy pour les permutations irréductibles. La relation engendrée par les opérations de Rauzy \mathcal{R}_t et \mathcal{R}_b est encore une relation d'équivalence, mais cette fois la démonstration combinatoire élémentaire dans le cas abélien ne se généralise pas au cas non-orientable. Nous avons :

Théorème 2.4.1 (Boissy & Lanneau [BL08]). *La relation définie par les opérations de Rauzy sur l'ensemble des permutations irréductibles est une relation d'équivalence.*

La preuve de ce théorème utilise fortement la récurrence de l'application de Rauzy-Veech renormalisée (Théorème IX). Il serait intéressant de trouver une démonstration purement combinatoire de ce résultat.

Les classes de Rauzy étendues s'obtiennent en combinant les deux inductions de Rauzy avec une troisième opération consistant à « retourner » la permutation. On démontre le résultat suivant :

Théorème X (Boissy & Lanneau [BL08]). *Les classes de Rauzy étendues de permutations irréductibles généralisées sont en bijection avec les composantes connexes des strates de l'espace des modules des différentielles quadratiques non-orientables.*

Ce résultat a été obtenu après le calcul par Zorich des classes de Rauzy étendues dans les strates correspondantes. Ces classes ont parfois plusieurs centaines de milliers d'éléments pour un petit nombre d'intervalles d (voir Tableau 2) rendant les calculs sur ordinateurs très compliqués.

Théorème 2.4.2 (Zorich). *Les strates $\mathcal{Q}(-1, 9)$, $\mathcal{Q}(-1, 3, 6)$, $\mathcal{Q}(-1, 3, 3, 3)$ et $\mathcal{Q}(12)$ ne sont pas connexes.*

Composante connexe	Permutation représentative	Cardinalité de la classe de Rauzy étendue
$\mathcal{Q}(-1, 9)^{adj}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	95944
$\mathcal{Q}(-1, 9)^{irr}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	12366
$\mathcal{Q}(-1, 3, 6)^{adj}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	531674
$\mathcal{Q}(-1, 3, 6)^{irr}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	72172
$\mathcal{Q}(-1, 3, 3, 3)^{adj}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 2 & 4 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$	612838
$\mathcal{Q}(-1, 3, 3, 3)^{irr}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$	88374
$\mathcal{Q}(12)^I$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 5 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	881599
$\mathcal{Q}(12)^{II}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	146049

TABLE 2 – Permutations représentatives des composantes connexes des strates spéciales.

Ceci termine en particulier la classification des composantes connexes des strates de \mathcal{Q}_g . Il serait intéressant de trouver un invariant géométrique pour distinguer ces composantes connexes spéciales.

Remarque 2.4.3. *Avila & Resende ont récemment démontré le mélange exponentiel pour le flot de Teichmüller (pour la classe de Ratner) sur les strates des différentielles quadratiques en utilisant un procédé similaire [AR08] aux permutations généralisées.*

3 Homéomorphismes de type pseudo-Anosov

L'ÉTUDE des homéomorphismes des surfaces remonte à Thurston dans les années 1970. Cette étude apparaît déjà chez Nielson, mais le point de vue de Thurston est nouveau et intéressant.

On peut penser aux homéomorphismes de type pseudo-Anosov (on dira seulement pseudo-Anosov par la suite) comme les briques élémentaires pour l'étude des homéomorphismes. En effet on a un célèbre théorème :

Théorème 3.0.4 (Thurston [Thu88]). *Soit f un homéomorphisme d'une surface de genre $g \geq 1$ (éventuellement avec des composantes de bords). Alors f est isotope à un homéomorphisme ϕ qui est*

1. *réductible i.e. ϕ laisse invariant une famille de courbes sur la surface, ou*
2. *d'ordre fini i.e. une puissance de ϕ est l'identité, ou*
3. *pseudo-Anosov.*

Dans le cas réductible on peut de nouveau appliquer le théorème de Thurston et ainsi se ramener à un homéomorphisme du deuxième ou du troisième type.

Un des outils important intervenant dans cette étude, et introduit par Thurston, est la notion de feuilletage mesuré sur les surfaces. Deux objets ont été développés pour étudier ces feuilletages : les réseaux ferroviaires (*train-tracks* en anglais), vers les années 1970 (voir [FLP79]), et les surfaces plates. Ces dernières apparaissent sous forme de surfaces arithmétiques (Douady & Hubbard [DH75]) puis dans les travaux fondateurs de Masur et de Veech dans les années 1980 sur les propriétés du flot géodésiques de Teichmüller. Elles ont été depuis lors utilisées à maintes reprises dans beaucoup d'aspects de cette théorie, tant sur le plan de la géométrie que de la dynamique, jusqu'à récemment.

3.1 Premières définitions et propriétés

On rappelle qu'un homéomorphisme ϕ sur S est pseudo-Anosov s'il existe une structure plate \mathcal{S} telle que ϕ soit affine par rapport à cette structure et $D\phi$ hyperbolique i.e. $|\mathrm{Tr}(D\phi)| > 2$. Quitte à conjuguer, on peut supposer que $D\phi = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| > 1$. La *dilatation* de ϕ est $|\lambda| > 1$. Dans le cas où la métrique sur \mathcal{S} est donnée par $q = \omega^2$, $\omega \in H^1(S, \mathbb{C})$, on voit que ϕ^* admet λ comme valeur propre pour le vecteur propre $\mathrm{Re}(\omega) \in H^1(S, \mathbb{R})$.

Ainsi la dilatation d'un pseudo-Anosov est un entier algébrique de degré borné par $2g$ (respectivement, $3g - 3$) dans le cas orientable (respectivement, dans le cas non-orientable). On peut même montrer mieux :

Théorème 3.1.1 (Thurston [Thu88]). *Soit ϕ un homéomorphisme de type pseudo-Anosov sur une surface S de genre g qui laisse invariant un feuilletage mesuré orientable. Alors*

1. *L'application linéaire ϕ_* définie sur le $H_1(S, \mathbb{R})$ a une valeur propre simple $\rho(\phi_*) \in \mathbb{R}$ telle que $|\rho(\phi_*)| > |\lambda|$ pour tout conjugués Galois x de $\rho(\phi_*)$,*
2. *$|\rho(\phi_*)| > 1$ est la dilatation de ϕ .*

Ainsi dans le cas orientable, on peut « lire » l'entropie du pseudo-Anosov sur l'action en l'homologie. Il existe une réciproque qui ne semble pas ou peu connue. Nous incluons une preuve ici (voir par exemple [BB07] Lemme 4.3).

Théorème 3.1.2. *Soit ϕ un homéomorphisme de type pseudo-Anosov sur \mathcal{S} tel que $\lambda(\phi)$ soit valeur propre de ϕ_* . Alors ϕ fixe un feuilletage mesuré orientable.*

Démonstration. Sinon il existe un revêtement double des orientations $\pi : (\tilde{\mathcal{S}}, \omega) \rightarrow (\mathcal{S}, q)$. On note τ l'involution du revêtement. Soit $[w]$ un vecteur propre de ϕ_* dans $H_1(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ pour la valeur propre λ . Alors $[w]$ induit un vecteur propre $[w']$ pour l'adjoint ϕ^* agissant sur $H^1(\tilde{\mathcal{S}}, \mathbb{R})$ pour la valeur propre λ .

Le feuilletage sur \mathcal{S} définit une classe de cohomologie $[Re(\omega)]$ où $\omega^2 = \pi^*q$. Par construction $[Re(\omega)]$ est aussi un vecteur propre pour λ . Comme λ est simple (Théorème 3.1.1) les deux classes $[Re(\omega)]$ et $[w']$ sont linéairement dépendantes. Mais par construction $\tau^*[w'] = [w']$ et $\tau^*[Re(\omega)] = -[Re(\omega)]$ ce qui donne une contradiction. \square

On appelle les nombres intervenant dans le théorème des nombres de Perron. Ce sont exactement les valeurs propres des matrices positives irréductibles (type Perron-Frobenius) [Lin84]. Le problème d'identifier les dilatations parmi les nombres de Perron est un problème important et difficile.

Conjecture 3.1.1 (Thurston). *L'ensemble des dilatations est exactement l'ensemble des nombres de Perron qui sont des unités, qui sont strictement plus grands que un et que leurs conjugués Galois.*

Une question sans doute plus facile est de déterminer les corps qui sont des corps de traces.

3.2 Quelques constructions de pseudo-Anosov

Nous présentons quelques constructions de pseudo-Anosov. La construction de la section 3.2.5 est nouvelle (voir [HLM06]).

3.2.1 Construction de Thurston-Veech

Cette construction est aussi connue sous le nom de construction « bouillabaisse »¹.

Thurston [Thu88] construit des homéomorphismes pseudo-Anosov par produit de multi-twists. Plus précisément, soient Δ et Γ deux multi-courbes sur S ($\Delta = \bigcup_{i \in I} \delta_i$ et $\Gamma = \bigcup_{j \in J} \gamma_j$ où les unions sont disjointes) qui remplissent S i.e. Δ et Γ séparent la surface en disques ou anneaux. Un multi-twist le long de Γ est T_Γ la composée des twists de Dehn le long des courbes γ_i (dans l'ordre que l'on veut puisque les unions sont disjointes). Thurston [Thu88] montre que les éléments du groupe $\langle T_\Gamma, T_\Delta \rangle$ sont tous (mis-à-part les puissances et racines de T_Γ, T_Δ ainsi que leurs conjuguées) de type pseudo-Anosov.

Une construction similaire (dans le cas des feuilletages orientables) est obtenue au même moment par Veech [Vee89, section §9]. Nous expliquons cette construction puisque qu'elle va servir par la suite.

Soit (\mathcal{S}, ω) une surface de translation avec deux directions paraboliques (disons verticale et horizontale). À normalisation près on peut supposer que les paraboliques suivants sont dans le groupe de Veech :

$$P_h = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad c, d > 0.$$

1. Ce nom vient d'un exposé de J. H. Hubbard au Centre International de Rencontres Mathématiques à Marseille, en juillet 2003, le jeudi soir après la bouillabaisse.

Ainsi si $t = cd > 0$ alors la trace de $P_h P_v$ est $2 + t > 2$. Donc le produit $P_h P_v$ est de type pseudo-Anosov et le corps de traces de (S, ω) est $\mathbb{Q}[t]$.

Le procédé suivant permet de construire explicitement une même métrique plate pour P_h et P_v , et donc pour le produit.

Maintenant on note H_i , $1 \leq i \leq r$ et V_j , $1 \leq j \leq s$ les cylindres horizontaux et verticaux. Les périmètres et les hauteurs des H_i et V_j sont (x_i, y_i) et (η_j, ξ_j) respectivement. Soit E la matrice de taille $r \times s$ telle que l'entrée $E_{i,j}$ est le nombre de rectangles $(\xi_j \times y_i)$ dans l'intersection $H_i \cap V_j$. Ces rectangles ont un périmètre y_j et une hauteur ξ_j . Ainsi $E_{i,j}$ est l'intersection des âmes des cylindres H_i et V_j . Autrement dit :

$$\begin{cases} \vec{x} = {}^t E \vec{\xi} \\ \vec{\eta} = E \vec{y} \end{cases} \quad (4)$$

Les modules du cylindre V_j (respectivement, H_i) sont commensurables avec d (respectivement, c). Donc il existe $D_m = \text{Diag}(m_1, \dots, m_r)$ et $D_n = \text{Diag}(n_1, \dots, n_s)$ des matrices diagonales telles que

$$\begin{cases} D_m \vec{x} = c \vec{y} \\ D_n \vec{\eta} = d \vec{\xi} \end{cases} \quad (5)$$

Des équations (4) et (5) on tire

$$\begin{cases} {}^t E D_n \vec{\eta} = d \vec{x} \\ E D_m \vec{x} = c \vec{\eta} \end{cases}$$

et on en déduit :

$$\begin{cases} {}^t E D_n E D_m \vec{x} = cd \vec{x} \\ E D_m {}^t E D_n \vec{\eta} = cd \vec{\eta} \end{cases} \quad (6)$$

Introduisons les deux matrices $F_n = E D_n$ et $F_m = {}^t E D_m$.

Remarque 3.2.1. La construction de Thurston consiste précisément à choisir pour matrices D_n et D_m les matrices identités.

On peut montrer [Vee89] que $F_n F_m$ et $F_m F_n$ sont irréductibles. Le vecteur positif \vec{x} est donc un vecteur propre pour la matrice Perron-Frobenius $F_n F_m$, et $t = cd > 0$ est l'unique valeur propre Perron-Frobenius de $F_n F_m$. La même remarque est vraie pour la matrice $F_m F_n$.

Ceci fournit donc un algorithme explicite de construction de la surface plate. Nous verrons dans la section 3.5 une application de cette construction. Un exemple de cette construction est donné dans [HLM06].

3.2.2 Construction de Veech (par l'induction de Rauzy-Veech)

La construction suivante utilise l'induction de Rauzy-Veech. Nous présentons ici la version « améliorée » grâce aux notations de Yoccoz [MMY05].

Soit π une permutation irréductible et γ une boucle fermée (de longueur n) dans le diagramme de Rauzy réduit $D_u(\pi)$. On peut associer à γ un produit de matrices $V = V_1 \dots V_n$ où les matrices V_i sont les matrices de transitions. On suppose de plus que V est irréductible (il existe un critère simple [MMY05]).

On note $\theta > 1$ la valeur propre Perron-Frobenius de V et on construit un vecteur positif λ pour cette valeur propre. Comme V est symplectique [Vee82], θ^{-1} est aussi valeur propre et on

choisit un vecteur propre τ pour cette valeur propre (avec $\tau_{\pi_b^{-1}(d)} > 0$). Si on note $T = (\pi, \lambda)$, alors τ est une donnée de suspension pour T (quitte à induire) [BL10].

Considérons l'induction de Rauzy-Veech sur (π, λ, τ) . On a par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(n)}(\pi, \lambda, \tau) &= (\pi, V^{-1}\lambda, V^{-1}\tau) = \\ &= (\pi, \theta^{-1}\lambda, \theta\tau) = g_t(\pi, \lambda, \tau) \quad \text{avec } t = \log(\theta) > 0 \end{aligned}$$

Comme les deux surfaces de translation $\mathcal{S}(\pi, \lambda, \tau)$ et $g_t\mathcal{S}(\pi, \lambda, \tau)$ sont isométriques (Figure 4) i.e. définissent la même surface dans la composante connexe de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$, la matrice hyperbolique g_t fixe donc la surface $\mathcal{S}(\pi, \lambda, \tau)$. En d'autres termes $g_t \in \text{SL}(\mathcal{S}(\pi, \lambda, \tau))$. Ainsi il existe un pseudo-Anosov ϕ sur $\mathcal{S}(\pi, \lambda, \tau)$ tel que $D\phi = g_t$. De plus la dilatation de ϕ est θ .

Remarque 3.2.2. *La construction originale de Veech utilise la notion de « zippered rectangles » (voir section 2.1.3). Une des étapes importantes de celle-ci était l'utilisation du théorème de point fixe de Brouwer, rendant ainsi la construction non explicite. Ici nous pouvons effectuer les calculs explicitement. On pourra consulter [LT10bis, Lan10] et l'appendice pour des exemples.*

Cette construction ne capture pas tout les pseudo-Anosov, mais « presque ». En effet, les exemples obtenus par cette construction fixe un zéro (à gauche de l'intervalle I), et la séparatrice issue de ce zéro (l'intervalle I). La description donnée en section 2.2.4 sur les composantes connexes marquées implique :

Théorème 3.2.3 (Veech [Vee82]). *Soit γ une boucle fermée de $\mathcal{D}_u(\pi)$ basée en π et $V = V(\gamma)$ la matrice de transition associée. Supposons que V soit irréductible et soit λ un vecteur propre positif pour la valeur propre Perron-Frobenius $\theta > 1$ et τ un vecteur propre pour θ^{-1} . Alors*

1. $\zeta = (\lambda, \tau)$ est une donnée de suspension pour $T = (\pi, \lambda)$;
2. $A = \begin{pmatrix} \theta^{-1} & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$ est la dérivée d'un pseudo-Anosov ϕ sur $\mathcal{S}(\pi, \zeta)$;
3. La dilatation de ϕ est θ ;
4. Tout pseudo-Anosov fixant une séparatrice est obtenu par cette construction.

On peut aussi obtenir une construction similaire dans le cas de feuilletages non-orientables. L'idée est d'utiliser les échanges d'intervalles généralisés (section 2.3).

Remarque 3.2.4. *Les problèmes de comptages de géodésiques fermées ont une longue histoire. Récemment Eskin & Mirzakhani [EM08] ont obtenu une asymptotique du nombre $N(T)$ de géodésiques fermées pour la strate principale $\mathcal{Q}(1, \dots, 1) : N(T) \sim \frac{e^{hT}}{hT}$ avec $h = 6g - 6$ (voir aussi [Ham07, Raf08]).*

Ces asymptotiques sont plus faciles à obtenir en utilisant la discrétisation du flot de Teichmüller grâce à l'induction de Rauzy-Veech (Bufetov [Buf06bis]). Mais on travaille alors sur un revêtement et il n'est pas clair que les asymptotiques soient les mêmes.

Ainsi Avila & Hubert ont posés la question de savoir s'il existe une infinité de pseudo-Anosov sur une famille de surfaces dans une même strate, sans points fixes. Les premiers exemples de ces pseudo-Anosov ont été trouvés par Los [Los09]. Dans [Lan10] nous montrons que ces pseudo-Anosov peuvent même exister en complexité minimale (genre 2).

Remarque 3.2.5. Veech [Vee86, section 5] montre :

$$h \leq \liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{Log } N(T) \leq \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{Log } N(T) \leq 6h(\sigma)^4 \quad (7)$$

où h est la dimension de la strate. De plus Veech pose la question

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \text{Log } N(T) = h(\sigma) ?$$

3.2.3 Construction de Casson & Bleiler

Ce résultat est un critère homologique.

Proposition 3.2.6 (Casson & Bleiler [CB88]). *Soit f un homéomorphisme sur une surface S (éventuellement à bords). Notons $P(X)$ le polynôme caractéristique de l'application linéaire f_* définie sur $H_1(S, \mathbb{R})$. On suppose de plus $P(X)$ est irréductible sur \mathbb{Z} , n'a pas de racines de l'unité et n'est pas un polynôme en X^k pour tout $k > 1$. Alors f est isotope à un pseudo-Anosov.*

La preuve de ce résultat est très simple. Les hypothèses sont là pour exclure les cas où la classe d'isotopie serait réductible ou périodique. Par le théorème de Thurston il ne reste plus que le cas pseudo-Anosov.

Remarque 3.2.7. Bestvina a remarqué que l'on pouvait en fait remplacer l'hypothèse « P est irréductible sur \mathbb{Z} » par « P est symplectiquement irréductible sur \mathbb{Z} » i.e. P n'est pas le produit de deux polynômes réciproques non triviaux.

On donne ici deux exemples en considérant sur une surface de genre 2 un homéomorphisme donné par twists de Dehn. Sur la surface présentée ci-dessous, on considère le twist de Dehn T_γ le long de la courbe γ .

Soit $f = T_{a_1}^2 T_{c_1} T_{b_2} T_{a_2}^{-1} T_{b_1}$ et $g = T_{a_1}^2 T_{b_2}^{-1} T_{c_1}^{-1} T_{a_2}^{-1} T_{b_1}$ deux homéomorphismes de S . Alors on peut calculer leurs actions sur $H_1(S, \mathbb{R})$ dans une bonne base, soit respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les polynômes caractéristiques sont donc $P = X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ et $X^4 - X^3 + 3X^2 - X + 1$ qui satisfont bien aux hypothèses du Théorème 3.2.6. Donc

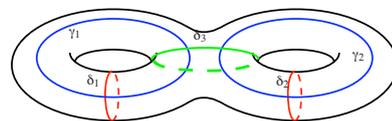


FIGURE 6 –

f et g sont isotopes à des homéomorphismes de type pseudo-Anosov ϕ_f et ϕ_g . On peut calculer leurs dilatations en considérant l'action sur le groupe fondamental de la surface [FLP79]. On obtient que $\lambda(\phi_f) = \lambda(\phi_g)$ est la racine de Perron du polynôme P (soit $\approx 1,72208$). Par ailleurs le Théorème 3.1.2 nous permet de conclure que f fixe un feuilletage mesuré orientable, tandis que g non.

Remarque 3.2.8. Comme nous le verrons plus tard (section 3.3.1), cette dilatation est la plus petite parmi les dilatations des pseudo-Anosov sur une surface de genre 2 [LT10bis].

3.2.4 Construction de Papadopoulos-Penner

Les réseaux ferroviaires, « train tracks » en anglais, sont des outils très efficaces pour coder les feuilletages mesurés. Ces objets fournissent une méthode simple pour manipuler les classes d'isotopie de feuilletages mesurés. Ils apparaissent pour la première fois dans les travaux de Williams [Wil1967], puis de Thurston [Thu88, Thu97]. Pour une référence générale sur les train

tracks, on pourra consulter le livre de Penner & Harer [HP91] ainsi que l'article de Los [Los09] qui donne un très bonne idée de la construction train tracks que nous allons rapidement résumer.

L'idée derrière cette construction est de simplifier la description des feuilletages mesurés sur une surface. Un train track est la donnée de deux objets : une donnée combinatoire (graphe) qui encode la topologie du feuilletage, et une donnée métrique (mesure) sur ce graphe. Pour



FIGURE 7 – Réseau ferroviaire d'après Thurston [Thu97]

obtenir le graphe à partir d'un feuilletage mesuré, l'idée est de contracter, via une rétraction, le feuilletage sur une sous-variété branchée. Plus formellement un graphe train track est un graphe plongé $f : \tau \rightarrow S$, connexe avec une structure « lisse ». La structure lisse et l'ordre cyclique définissent une notion de *cusps*. On a un voisinage fibré $N(\tau) \subset S$ de τ dans S et une rétraction $N(\tau) \rightarrow \tau$.

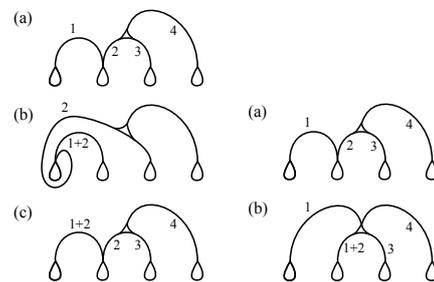
On définit naturellement une mesure en associant à chaque arrête e un nombre positif $\mu(e) \geq 0$. L'ensemble des mesures satisfaisant les *conditions d'aiguillages* est noté $E(\tau)$.

Si F est un feuilletage mesuré on note \mathcal{F} la classe de $F \in \mathcal{MF}$, où \mathcal{MF} est l'ensemble des classes d'équivalences des feuilletages mesurés sur S (à isotopie et mouvements de Whitehead près). Une construction classique permet d'obtenir une classe de feuilletages mesurés à partir d'un train track mesuré : on colle des rectangles sur les arrêtes, d'épaisseurs données par la mesure [FLP79, Pap83]. L'application $\varphi_\tau : E(\tau) \rightarrow \mathcal{MF}$ est alors un homéomorphisme sur son image.

Si F est un représentant de \mathcal{F} , on dira que F est *porté* par τ , noté $\mathcal{F} < \tau$, si quitte à retirer des petits disques au voisinage des singularités, F est contenu dans $N(\tau)$ (avec une condition de transversalité que l'on ne détaille pas ici). Si σ et τ sont deux train tracks, on dira que σ est porté par τ , noté $\sigma < \tau$, si σ est isotope à $\sigma' \subset N(\tau)$. Dans ce cas on peut former la matrice d'incidence $M(\sigma, \tau)$ qui mémorise le nombre d'intersections des arrêtes de σ avec les transversales aux arrêtes de τ . Cela définit donc une application linéaire de $E(\sigma)$ vers $E(\tau)$.

Il existe deux opérations naturelles (« right/left splits » dans l'article de Penner & Papadopoulos [PP87]) qui, à partir de τ , produisent un nouveau train track τ' tel que $\tau < \tau'$. De manière informelle ces opérations consistent à découper le voisinage $N(\tau)$ le long d'un cusp (voir [LT09] pour une description précise et figure ci-contre).

Dans la première colonne de la figure ci-contre, l'arrête 1 du train track (a) est collée sur l'arrête 2 dans (b). À isotopie près nous voyons dans (c) que la nouvelle arrête 1 + 2 possède une nouvelle mesure



$\mu(e_1) + \mu(e_2)$. Cela détermine une matrice de transition pour cette opération : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 3.2.9. On dira que τ se raffine à σ s'il existe une suite d'opérations de type « right/left splits » telle que

$$\sigma = \tau_n < \tau_{n-1} < \cdots < \tau_1 < \tau_0 = \tau.$$

Théorème 3.2.10 (Penner & Papadopoulos [PP87]). Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré et σ, τ deux train tracks tels que $\mathcal{F} < \sigma < \tau$ où $\sigma \subset N(\tau)$. Alors τ se raffine à σ i.e. $\sigma = \tau_n < \tau_{n-1} < \cdots < \tau_1 < \tau_0 = \tau$.

Idée de la preuve. On suppose à isotopie près que $N(\sigma) \subset \text{Int}(N(\tau))$. Ces voisinages sont homéomorphes. On peut montrer que le nombre de cusps sur chaque composante de bord est le même ([PP87], Lemme 2.1). Soit $\{\gamma_i\}_i$ une famille de chemins de $\text{Int}(N(\tau)) \setminus N(\sigma)$ joignant les cusps deux-à-deux. Si on coupe $N(\tau)$ le long de ces chemins γ_i , on obtient alors un nouveau voisinage homéomorphe à $N(\tau)$.

Ces chemins peuvent être très long et couper les transversales singulières de $N(\tau)$ un grand nombre de fois. À chaque croisement on obtient une opération de découpage de τ_n vers τ_{n+1} où $\tau_{n+1} < \tau_n$. La concaténation de ces opérations nous donne $\sigma = \tau_n < \tau_{n-1} < \cdots < \tau_1 < \tau_0 = \tau$. \square

Remarque 3.2.11. Dans l'article [LT09] nous utilisons plutôt des opérations duales aux opérations ci-dessus : « folding operations ».

Si f est un homéomorphisme de S , on dira que τ est invariant par f si $f(\tau) < \tau$. Le résultat fondamental, connu probablement de Thurston et démontré par Papadopoulos & Penner est que chaque pseudo-Anosov laisse invariant un train track. On peut donc lui associer une suite périodique d'opérations décrites ci-dessus (opérations de « coupage-découpage »).

Théorème 3.2.12 (Penner & Papadopoulos [PP87]). Si ϕ est un pseudo-Anosov alors il existe un train track τ invariant par ϕ tel que τ se raffine à \mathcal{F} , où \mathcal{F} est la classe du feuilletage instable de ϕ . De plus la matrice d'incidence est irréductible.

Comme pour les permutations, pour lesquelles nous avons construit les diagrammes de Rauzy, nous allons ici construire les graphes d'automates associés à un train track. Pour cela on fixe une strate (i.e. on fixe le type combinatoire du feuilletage mesuré) et on considère toutes les opérations (combinatoires) de découpages sur les classes d'isotopies de train tracks. Les composantes connexes de ces graphes sont les automates associés à un train track.

Par exemple, l'automate associé au train track donné en figure page 39 est le suivant :



FIGURE 8 – Cet automate train track est décrit par Song, Ko & Los [SKL02] et Ham & Song [HS06]. À chaque flèche on peut associer une matrice de transition.

Le Théorème 3.2.12 peut alors se reformuler de la manière suivante : si ϕ est un pseudo-Anosov alors il existe un chemin fermé γ dans un automate tel que le produit des matrices de transition $M(\gamma)$ soit irréductible et tel que la dilatation λ de ϕ soit la valeur propre Perron-Frobenius de $M(\gamma)$.

Remarque 3.2.13. La réciproque n'est pas vraie en générale. Il y a des conditions à vérifier sur $M(\gamma)$ comme le montre le résultat suivant.

Théorème 3.2.14 (Thurston). *Soit $\tau = \tau_n < \tau_{n-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = \tau$ une suite de découpages telle que la matrice d'incidence M soit irréductible. Si $\lambda > 1$ est la valeur propre Perron-Frobenius, on suppose que le vecteur propre positif associé à λ vérifie les conditions d'aiguillages de τ . Alors il existe un pseudo-Anosov ϕ tel que $\lambda = \lambda(\phi)$.*

Idée de la preuve. Soit ϕ un(e) (classe d'isotopie d') homéomorphisme sur S induisant l'application train track $\tau \rightarrow \tau$ donnée par la suite $\tau = \tau_n < \tau_{n-1} < \dots < \tau_1 < \tau_0 = \tau$. Par construction τ est invariant pour ϕ .

Par définition, le vecteur propre de M , pour λ , détermine une mesure $\mu \in E(\tau)$. Soit F un feuilletage mesuré porté par τ . L'invariance de τ peut-être lue comme $\phi(F) = \lambda F$. Comme $\lambda > 1$, l'application ϕ n'est pas d'ordre fini. Si ϕ était réductible alors soit C une courbe invariante fermée. Cette courbe est portée par τ . À isotopie et puissances près on peut toujours supposer que ϕ fixe point par point la courbe C . En particulier ϕ induit une application train track sur τ qui fixe un sous-graphe de τ (celui donné par C). La matrice M ne peut donc pas être irréductible, ce qui est une contradiction. Notons que M est la matrice de la partition de Markov naturelle associée au codage. \square

Le théorème ci-dessous est donc à rapprocher du Théorème 3.2.3 de Veech. L'avantage du théorème de Thurston est que tout les pseudo-Anosov sont construits comme cela. Par contre la métrique plate est bien plus difficile à obtenir en général. Le théorème de Thurston ne donnant qu'un seul feuilletage. Pour une correspondance entre feuilletage mesurée et métrique plate, on pourra regarder l'article de Hubbard & Masur [HM79].

3.2.5 Construction de Hubert-Lanneau-Möller

Nous venons de présenter deux types de constructions. Les premières consistent à montrer qu'un homéomorphisme est de type pseudo-Anosov, sans calculer la métrique plate explicitement (constructions de Penner & Papadopoulos et de Casson & Bleiler). Les deuxièmes consistent à construire la métrique (constructions de Thurston et de Veech).

On propose dans cette section une méthode pour construire un pseudo-Anosov pour une métrique plate donnée à l'avance.

Remarque 3.2.15. *Pour une surface plate générique, son groupe de Veech est soit trivial soit égal à $\{\pm Id\}$, suivant la composante connexe contenant la surface (on pourra consulter [Möl07] pour une preuve).*

L'idée très simple est de remarquer que l'image d'une direction complètement périodique θ par un homéomorphisme affine est une autre direction complètement périodique θ' . De plus à chaque telle direction, on peut associer les données suivantes :

1. La combinatoire des cylindres,
2. les périmètres et les hauteurs des cylindres,
3. les longueurs des liens de selles du bord des cylindres,
4. les twists.

Ces données sont assez proches des diagrammes de séparatrices introduits par Kontsevich & Zorich [KZ03].

On peut définir naturellement une version projective de ces données. On montre alors dans [HLM06] que si une surface de translation (S, ω) possède deux directions θ, θ' avec les mêmes données projectives alors il existe un homéomorphisme affine envoyant θ sur θ' . Ce théorème permet donc de construire explicitement des homéomorphismes affines sur une surface plate donnée. On en déduit :

Théorème 3.2.16 (Hubert, Laneeau & Möller [HLM06]). *Le groupe de Veech de la surface de Arnoux-Yoccoz définie en 1.8.2 possède deux hyperboliques non commutant.*

Remarque 3.2.17. *Ce théorème est non-trivial car on peut montrer par ailleurs que le groupe de Veech ne contient pas d'éléments paraboliques (voir la remarque 3.5.2).*

En combinant avec le Théorème XVI, on obtient donc :

Théorème XI (Hubert, Laneeau & Möller [HLM06]). *Le groupe de Veech de la surface de Arnoux-Yoccoz est un groupe non élémentaire qui ne contient pas de paraboliques.*

C'est le premier, et le seul pour le moment, groupe connu dans cette classe.

3.3 Systoles

Les géodésiques fermées dans les strates (pour le flot de Teichmüller g_t) correspondent à des géodésiques fermées dans \mathcal{M}_g (pour la métrique de Teichmüller). On a vu que ces géodésiques peuvent aussi s'interpréter comme des classes de conjugaison d'homéomorphismes pseudo-Anosov (la longueur des géodésiques étant alors le logarithme de la dilatation). Ainsi, si S est une surface de genre $g \geq 0$ avec $n \geq 0$ perforations ($3g - 3 + n \geq 0$), le spectre suivant

$$\{ \lambda(\phi), \phi : S \rightarrow S \text{ est de type pseudo-Anosov} \}$$

est donc très naturel à considérer. On peut montrer assez facilement que cet ensemble possède un plus petit élément $\delta_{g,n}$ [AY81, Iva88] (nous verrons pourquoi dans la preuve du Théorème XII). Avec la remarque ci-dessus, on peut donc interpréter ces nombres comme les *systoles* des espaces des modules \mathcal{M}_g . Nous allons donner deux types de propriétés :

1. des calculs explicites, pour g et n petits,
2. des inégalités *inférieures*.

Remarque 3.3.1. *Notons que les inégalités supérieures sont très facile à obtenir, puisque $\delta_{g,n}$ est obtenu comme un minimum.*

On termine cette section par un petit historique des résultats connus avant de donner des résultats nouveaux.

1. Les valeurs précises de $\delta_{g,0}$ ne sont connues que pour $g = 1$ et $g = 2$ (Cho & Ham [CH08]).
2. Les valeurs précises de $\delta_{0,n}$ ne sont connues que pour $n = 4$ et $n = 5$:
 - (a) $n = 4$: Song, Ko & Los [SKL02],
 - (b) $n = 5$: Ham & Song [HS06].
3. On a les inégalités suivantes :
 - (a) pour $g \geq 1$ (Penner, Papadopoulos, Bauer, Hironaka, Kin, McMullen)

$$\frac{\log 2}{12g - 12} \leq \log \delta_{g,0} \leq \frac{\log(2 + \sqrt{3})}{g}.$$

- (b) Pour $n \geq 4$ (Penner [Pen91], Minakawa [Min03], Hironaka & Kin [HK06])

$$\frac{\log 2}{4n - 12} \leq \log \delta_{0,n} \leq \frac{2 \log(2 + \sqrt{3})}{n - 3}.$$

- (c) Pour $g \geq 2$ fixé et $n \geq 4$ (Penner [Pen91], Tsai [Tsa09])

$$\frac{\log n}{c_g n} \leq \log \delta_{g,n} \leq \frac{c_g \log n}{n}.$$

3.3.1 Systole sur les surfaces compactes ($g \geq 1, n = 0$)

Dans cette section on pose $\delta_g := \delta_{g,0}$. Des résultats classiques (fractions continues) montrent que $\delta_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. De plus nous pouvons aussi remarquer que δ_1 est réalisé par une unique classe de conjugaison d'Anosov dans le groupe modulaire $\text{Mod}(1) = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, à savoir $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour le genre 2 nous avons une description similaire.

Théorème XII (Lanneau & Thiffeault [LT10bis]). *On a*

$$\delta_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2}} \simeq 1.72208.$$

De plus δ_2 est réalisé par une unique (à symétries près) classe de conjugaison de pseudo-Anosov dans le groupe modulaire $\text{Mod}(2)$.

Mentionnons aussi que le calcul de δ_2 a été obtenu par Cho & Ham [CH08], mais en utilisant l'ordinateur. Ici on se propose de faire ce calcul « à la main ».

Remarque 3.3.2. *Ce théorème répond à deux questions de Farb [Far06, Problème 7.3 et Question 7.4] en genre 2.*

Avant de donner une idée de la preuve, notons que les techniques que l'on a introduites dans [LT10bis] permettent de calculer δ_3 . Nous avons d'ailleurs des résultats partiels, mais ces techniques sont inefficaces pour les autres valeurs $\delta_g, g \geq 4$. Ce type de problème est en général très compliqué.

Dans toute la suite, si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme admettant une racine de Perron, on notera $\rho(P)$ cette racine.

Esquisse de la preuve du Théorème XII. Notons δ_2^+ (respectivement, δ_2^-) la plus petite dilatation d'un pseudo-Anosov préservant un feuilletage orientable (respectivement, non orientable).

On va montrer $\delta_2^+ = \delta_2^-$. On peut calculer δ_2^+ très facilement d'après une idée de Zhirov [Zhi95]. Tout d'abord par construction d'un exemple on montre que $\delta_2^+ \leq \rho(X^4 - X^3 - X^2 - X + 1) \simeq 1.72208$ (par exemple par construction par twists de Dehn, voir l'exemple en section 3.2.3).

Ensuite comme le feuilletage est orienté, δ_2^+ est la racine de Perron d'un polynôme de degré $2g = 4$ (Théorème 3.1.1). On peut lister les polynômes de degré 4 qui ont une racine de Perron plus petite que 1.72208 (en nombre fini). En effet les formules de Newton expriment les coefficients (entiers) en fonction des racines, qui sont toutes majorées en valeurs absolues par 1.72208. Par exemple dans notre cas, si $X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 1$ est un polynôme annulateur de δ_2^+ alors

$$\begin{aligned} |a| &\leq 2(\delta_2^+ + 1/\delta_2^+) \leq 5,44 \\ |b| &\leq \dots \leq 8. \end{aligned}$$

Un petit calcul nous montre que cette liste ne contient qu'un seul polynôme : notre candidat $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$!

Le calcul de δ_2^- est plus difficile car à priori δ_2^- n'est pas un nombre de Perron de degré 4. On peut seulement, quitte à passer à un revêtement double, montrer que c'est un nombre de Perron de degré au plus $6g - 6 = 6$. Mais la technique précédente ne marche pas car le nombre de polynômes de degré 12 ayant une racine de Perron plus petite que 1.72208 est trop important.

L'idée ici est de remarquer que, si ϕ est tel que $\lambda(\phi) = \delta_2^-$, alors ϕ commute avec l'involution hyperelliptique de la surface (les surfaces de genre deux étant toutes hyperelliptiques). ϕ passe

donc au quotient pour donner un homéomorphisme ψ de la sphère. Ensuite on relève ψ à un autre homéomorphisme $\tilde{\psi}$ d'une surface de translation $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$.

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\phi} & S \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{S}^2 \\
 & \nearrow \tilde{\psi} & \nearrow \tilde{\psi} \\
 & \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} \tilde{S}
 \end{array}$$

Un petit calcul nous montre que $(\tilde{S}, \tilde{\omega}) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{H}(2, 2)$ (voir section 1.8.1 pour une définition de ce lieu). On applique alors l'idée précédente pour arriver finalement à la conclusion qu'il y a 9 polynômes avec une racine plus petite strictement que 1.72208.

L'idée ensuite est d'éliminer ces polynômes. Pour cela, on suppose par l'absurde que δ_2^- est la racine de Perron d'un des polynômes de cette liste. Ceci fournit alors des informations sur le polynôme caractéristique de $\tilde{\psi}_*$, et donc sur sa trace. On obtient ainsi les nombres de Lefschetz des puissances $\tilde{\psi}^n$. En utilisant le théorème du point fixe de Lefschetz, on obtient une contradiction sur l'action de $\tilde{\psi}$ sur les zéros et les séparatrices.

Pour les détails, se référer au papier [LT10bis] ou à l'article en annexe. \square

La technique consistant à calculer les polynômes ayant une petite racine de Perron, puis d'utiliser le théorème du point fixe de Lefschetz se généralise assez bien pour les feuilletages orientables. Notons aussi que ces problèmes de trouver des polynômes avec une petite mesure Mahler sont très difficiles [Boy80]. Nous montrons :

Théorème 3.3.3 (Lanneau & Thiffeault [LT10bis]). *Pour $3 \leq g \leq 5$, δ_g^+ sont des nombres de Salem et la mesure de Mahler des polynômes minimaux sont les plus petites mesures de Mahler à degré prescrit :*

g	polynôme	$\delta_g^+ \simeq$
3	$X^6 - X^4 - X^3 - X^2 + 1$	1.40127
4	$X^8 - X^5 - X^4 - X^3 + 1$	1.28064
5	$X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$	1.17628

On obtient, pour δ_g^+ , $6 \leq g \leq 8$ des encadrements.

De plus la suite $(\delta_g^+)_{g \geq 2}$ n'est pas strictement décroissante ($\delta_6^+ \geq \delta_5^+$).

Remarque 3.3.4. *Ce théorème répond à la Question 7.2 de Farb [Far06] dans le cas orientable.*

Le tableau qui suit donne une classe d'isotopie $[f]$ de type pseudo-Anosov telle que $\lambda([f]) = \delta_g^+$ pour $2 \leq g \leq 5$ (voir Figure 6, page 38).

g	f
2	$T_{a_1}^2 T_{c_1} T_{b_2} T_{a_2}^{-1} T_{b_1}$
3	$T_{a_1} T_{a_1} T_{b_1} T_{c_1} T_{a_2} T_{b_2} T_{c_2} T_{c_2} T_{a_3}^{-1} T_{b_3}^{-1}$
4	$T_{a_1} T_{b_1} T_{c_1} T_{a_2} T_{b_2} T_{c_2} T_{b_3} T_{c_3} T_{b_4}$
5	Leininger exemple [Lei04]

Remarque 3.3.5. Lors de la rédaction de ce manuscrit, beaucoup de nouveaux résultats ont été démontrés par plusieurs auteurs : Hironaka [Hir09], Kin & Takasawa [KT10], Birman, Brinkmann & Kawamuro [BBK10], Dunfield & Venzke [DV10], McMullen [Mc9].

Hironaka [Hir09] démontre plusieurs inégalités sur δ_g^+ et montre en particulier que notre borne pour δ_g^+ est réalisée. Hironaka démontre aussi un joli théorème sur l'asymptotique des dilatations δ_g^+ , sous l'hypothèse de la Conjecture de Lanneau-Thiffeault.

Birman [BBK10] a obtenu des résultats dans le sens de ceux que nous utilisons pour nos démonstrations : des critères algébriques pour qu'une matrice entière ne soit pas la matrice de la partition de Markov d'un pseudo-Anosov.

3.3.2 Systole sur le disque ($g = 0, n > 3$)

Cette fois, et pour cette section uniquement, on pose $\delta_n := \delta_{0,n}$. On peut appliquer les techniques de la section précédente au calcul de δ_n . Ceci nous permet de retrouver et de compléter le Théorème XV (voir la section 3.4).

Théorème XIII (Lanneau & Thiffeault [LT09bis]). Pour $3 \leq n \leq 8$, la dilatation minimale δ_n d'une tresse pseudo-Anosov sur n brins est la racine de Perron des polynômes suivants :

n	$\delta_n \approx$	polynôme	tresse	strate
3	2.61803	$X^2 - 3X + 1$	$\sigma_1\sigma_2^{-1}$	$(-1; -1^3)$
4	2.29663	$X^4 - 2X^3 - 2X + 1$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$	$(-1; -1^4, 1)$
5	1.72208	$X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_3^{-1}$	$(0; -1^5, 1)$
6	1.72208	$X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$	$\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5)^2$	$(0; -1^5, 1)$
7	1.46557	$X^7 - 2X^4 - 2X^3 + 1$	$\sigma_4^{-2}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6)^2$	$(2; -1^7, 1)$
8	1.41345	$X^8 - 2X^5 - 2X^3 + 1$	$\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7)^5$	$(3, -1^8, 1)$

Remarque 3.3.6. Nous retrouvons les résultats de Song, Ko & Los [SKL02] ($n = 4$) et de Ham & Song [HS06] ($n = 5$).

3.3.3 Systoles et inégalités

Le calcul *exact* de $\delta_{g,n}$ est très compliqué, comme nous venons de le voir, et il est illusoire de trouver une formule générale pour ces nombres. On ne sait même pas montrer que la suite est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

Une idée pour attaquer différemment ce problème est de trouver des inégalités. Les inégalités supérieures ne sont pas très difficiles à trouver : des exemples suffisent. Par contre les inégalités inférieures sont bien plus dures à obtenir. On a vu [Pen91] qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\frac{\log c_1}{g} \leq \log \delta_g \leq \frac{\log c_2}{g}.$$

La borne inférieure ne dépend pas de la géométrie des pseudo-Anosov, mais seulement des matrices de type Perron-Frobenius. Le résultat est : si M est une matrice irréductible de dimension n et si λ est la valeur propre Perron-Frobenius alors $\lambda^n \geq |M| - n + 1 \geq 2$ où $|M|$ est la somme des coefficients de M . On peut montrer que δ_g est la valeur propre Perron-Frobenius d'une matrice irréductible de dimension $n \leq 12g - 12$ ce qui donne donc $\log(\delta_g) \geq \frac{\log 2}{12g-12}$.

Conjecture 3.3.1 (McMullen [Mc8] page 44). *Est ce que la suite $(g \log \delta_g)_{g \geq 2}$ est convergente ? Si oui quelle est sa limite ?*

Farb [Far06] a proposé deux variantes de ce type de problèmes.

1. Soit $H \subset \text{Mod}(g)$ un sous-groupe. Posons $\delta(H) = \min \{ \lambda(\phi), [\phi] \in H \text{ pseudo-Anosov} \}$.
2. Soit C une composante connexe d'une strate. Posons

$$\delta(C) = \min \{ \lambda(\phi), \phi \text{ pseudo-Anosov sur } (\mathcal{S}, q) \in C \}.$$

Citons deux résultats relatif au premier problème, pour le groupe de Thurston-Veech et pour le groupe de Torelli.

Théorème 3.3.7 (Leininger [Lei04]). *Soient $g \geq 1$ et Γ, Δ deux multi-courbes sur une surface de genre g . On note T_Γ et T_Δ les deux multi-twists correspondants (voir section 3.2.1). Alors*

$$\forall g \geq 1, \forall \Gamma, \Delta \quad \delta(\langle T_\Gamma, T_\Delta \rangle) \geq \lambda_L,$$

où $\lambda_L \simeq 1.17628$ est le nombre de Lehmer i.e. la racine de Perron de $X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$. De plus l'inégalité est une égalité si et seulement si $g = 5$ et Γ, Δ sont « canoniques ».

Théorème 3.3.8 (Farb, Leininger & Margalit [FLM08]). *Si $\mathcal{T}_g = \{[f] \in \text{Mod}(g), f_* = \text{Id}\}$ désigne le groupe de Torelli alors*

$$\forall g \geq 2, \delta(\mathcal{T}_g) > e^{0.197} > 1.$$

Si $P \in \mathbb{Z}[X]$, on définit la mesure de Mahler de P par $M(P) = \prod_{P(\alpha)=0} \max\{1, |\alpha|\} \geq 1$.

Conjecture 3.3.2 (problème de Lehmer). $\exists \varepsilon > 0$ tel que si $M(P) > 1$ alors $M(P) > 1 + \varepsilon$. La conjecture est même $\varepsilon = 0,17628$.

Remarque 3.3.9. *Le premier théorème répond au problème de Lehmer dans un cas particulier.*

Pour le deuxième problème, on démontre de résultat suivant (pour les composantes connexes hyperelliptiques des espaces de modules).

Théorème XIV (Boissy & Laneeau [BL10]). *Posons*

$$C^{\text{hyp}} = \bigcup_{g > 0} (\mathcal{H}^{\text{hyp}}(2g-2) \cup \mathcal{H}^{\text{hyp}}(g-1, g-1)).$$

Alors

$$\sqrt{2} < \delta(C^{\text{hyp}}) < \sqrt{2} + \frac{1}{2g}.$$

Remarque 3.3.10. *Pour $g \geq 3$ impair, on peut montrer que les composantes avec structure spin paire C^{odd} de $\mathcal{H}(g-1, g-1)$ satisfont $\delta(C^{\text{odd}}) < 1 + \frac{1}{g}$.*

Esquisse de la preuve du Théorème XIV. La preuve se déroule en deux étapes. Tout d'abord on montre que si ϕ est un pseudo-Anosov sur $(\mathcal{S}, \omega) \in C$ alors ϕ^2 possède un point régulier fixe d'indice négatif.

On en déduit que ϕ^2 fixe une séparatrice, et donc est construit grâce à l'induction de Rauzy-Veech (Théorème 3.2.3). Ainsi ϕ^2 peut-être représenté par une boucle dans un diagramme de Rauzy.

Le reste de la preuve consiste à comprendre la géométrie des diagrammes de Rauzy (réduit) relatif à ces strates. C'est ce que nous faisons dans l'article [BL10] (voir aussi en annexe). Cette étude montre que $\lambda(\phi^2) \geq 2$. Ce qui donne la borne inférieure.

Comme toujours la borne supérieure est donnée par une série d'exemples. \square

3.4 Automates des train tracks

Dans cette section nous allons considérer le disque D_n avec $n \geq 4$ trous. Il est bien connu (voir par exemple le livre de Birman [Bir75]) que le groupe des tresses

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2 \text{ et } \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ si } |i - j| = 1 \rangle$$

est isomorphe au groupe modulaire de D_n .

Une *strate* du disque, déterminée par un train track τ , est l'ensemble des types des prongs de τ que l'on notera

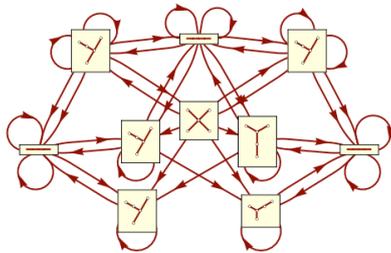
$$(l_1, \dots, l_m, (l_0))$$

Remarque 3.4.1. L'indice l_0 entre parenthèse est la composante de bord du train track sur le disque. Pour retrouver les angles coniques (langage des surfaces plates), un prong de type $l \geq 1$ correspond à un angle conique d'angle $l\pi$.

À titre d'exemple, l'automate associé à la strate (3 (1)) est représenté en Figure 8 page 40. On peut coder schématiquement cette automate train track par la figure ci-contre.



Les automates train track sur le disque sont faciles à coder. En effet on peut écraser les prongs en des points et ainsi coder un train track sur le disque par un arbre. Les opérations de collages/découpages deviennent alors aisés à décrire. L'algorithme que nous avons écrit dans [LT09] permet de construire des automates train track pour des strates arbitraires. Les graphes suivants représentent ainsi quelques automates train track construits à l'aide de notre algorithme.



L'automate ci-contre représente la strate sur le disque avec 5 trous et un 3-prong qui est nécessairement sur le bord. Avec nos notations, cela donne $n = 5, (3)$. La strate correspondante aux différentielles quadratiques est $Q(-1^5, 1)$. Il y a 10 sommets dans ce graphe.

On ne peut malheureusement pas dire grand chose en général. Ci contre l'automate pour $n = 7$ avec deux 3-prong. La strate sur le disque est donc 3 3 (3) et la strate correspondante aux différentielles quadratiques est $Q(-1^7, 1^3)$. L'automate possède 977 (classes d'isotopie de) train-tracks. Pourtant le diagramme de Rauzy correspondant n'est pas très compliqué.

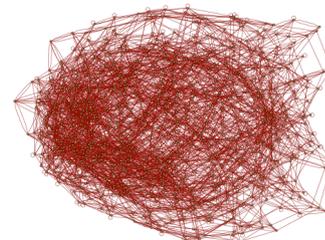




FIGURE 9 – Ci-dessus nous avons représenté deux autres automates pour le cas $n = 7$. Le premier à gauche (« the maple leaf ») correspond à la strate 3 3 3 3 (1) et le second à droite (« the scarab ») correspond à la strate 4 3 3 (1). Les strates correspondantes aux différentielles quadratiques sont donc respectivement $Q(-1^8, 1^4)$ et $Q(-1^8, 1^2, 2)$.

Il serait intéressant de comprendre la structure de ces graphes en général, au moins pour les strates sur le disque. Un autre problème, aussi très difficile dans sa version diagrammes de Rauzy, est de caractériser les produits possibles de matrices d'induction. Cela donnerait des informations sur les dilatations possibles des pseudo-Anosov, et donc des informations dans la direction de la Conjecture 3.1.1 de Thurston.

En utilisant le Théorème 3.2.14 de Thurston sur l'énumération des pseudo-Anosov, et la description des graphes, on peut répondre au problème de minimisation des dilatations pour une grande famille d'exemples.

Théorème XV (Lanneau & Thiffeault [LT09]). *On calcule la plus petite dilatation des homéomorphismes pseudo-Anosov (par strate) pour le groupe modulaire du disque D_n pour $n \leq 8$.*

Nous retrouvons ainsi les résultats de Song, Ko & Los [SKL02] et de Ham & Song [HS06].

Idée de la preuve. L'idée de la preuve (due à Song, Ko & Los [SKL02]) est de borner la dilatation d'un pseudo-Anosov en fonction de la longueur du chemin qui le représente dans l'automate. Cette borne (assez mauvaise) est classique. Ensuite on énumère les chemins ayant une longueur plus petite que cette borne ce qui nous donne facilement la systole. Ce procédé ne marche plus dès que la complexité (nombre de trous dans le disque) est grande. On utilise aussi quelques inégalités sur les matrices pour réduire la recherche de chemins. \square

3.5 Corps de traces et éléments paraboliques

On a le résultat suivant qui fournit une propriété géométrique du disque de Teichmüller stabilisé par un pseudo-Anosov ϕ en fonction des propriétés algébriques de la dilatation de ϕ . Ces résultats ont d'ailleurs été retrouvés par Calta & Smillie [CS07].

Théorème XVI (Hubert & Lanneau [HL06]). *Soit (\mathcal{S}, ω) une surface de translation et ϕ un pseudo-Anosov avec dilatation λ . On suppose que le corps de traces $\mathbb{Q}[\lambda + \lambda^{-1}]$ n'est pas totalement réel. Alors le groupe de Veech $SL(\mathcal{S}, \omega)$ ne contient aucun éléments paraboliques.*

Corollaire 3.5.1. *Le corps de traces d'une surface de Veech est totalement réel.*

En fait on peut même montrer que le groupe de Veech est commensurable à un groupe fuchsien ne contenant que des éléments hyperboliques.

Remarque 3.5.2. *On peut appliquer ce théorème aux exemples construits par Arnoux & Yoccoz [AY81]. En effet la famille ϕ_n , $n \geq 3$, de pseudo-Anosov possède comme dilatation $\lambda_n = \lambda(\phi_n)$ et λ_n est la racine Pisot des polynômes irréductibles P_n avec*

$$P_n(X) = X^n - X^{n-1} - \dots - X - 1.$$

On vérifie que le corps de traces $\mathbb{Q}[\lambda_n + \lambda_n^{-1}]$ n'est pas totalement réel.

Preuve du Théorème XVI. S'il existe un élément parabolique, P , alors en conjuguant P par ϕ , il en existe un deuxième transverse. À conjugaison près, on peut supposer que ces éléments paraboliques sont dans des directions horizontales et verticales. Notons que les groupes de Veech sont conjugués dans $SL_2(\mathbb{R})$ donc de même corps de traces. Maintenant nous retrouvons une configuration de type Veech (section 3.2.1). Reprenons les notations de cette section.

Le corps de traces de $SL(\mathcal{S}, \omega)$ est $\mathbb{Q}[t]$. Nous allons montrer que $\mathbb{Q}[t]$ est totalement réel ce qui sera une belle contradiction.

Soit σ un plongement de $\mathbb{Q}[t]$ dans \mathbb{C} et $t' = \sigma(t) \in \mathbb{C}$ un conjugué Galois de t . En appliquant σ à la première équation (6) : $F_n F_m \vec{x} = t \vec{x}$ et en se souvenant que $F_n F_m$ est une *matrice entière*, on obtient

$$F_n F_m \sigma(\vec{x}) = t' \sigma(\vec{x}) \quad (8)$$

Maintenant notons par $D_{\sqrt{m}} = \text{Diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_r})$ et $D_{\sqrt{n}} = \text{Diag}(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_s})$ les matrices diagonales. Alors

$$F_n F_m = {}^t E D_n E D_m = {}^t E D_{\sqrt{n}} D_{\sqrt{n}} E D_{\sqrt{m}} D_{\sqrt{m}} = {}^t E D_{\sqrt{n}} (E D_{\sqrt{n}}) D_{\sqrt{m}} D_{\sqrt{m}}.$$

Posons $A = E D_{\sqrt{n}}$. En substituant ceci dans la dernière équation, on a

$$F_n F_m = A {}^t A D_{\sqrt{m}} D_{\sqrt{m}}.$$

Si on posons $M = D_{\sqrt{m}} A$ alors

$$\begin{aligned} F_n F_m &= D_{\sqrt{m}}^{-1} D_{\sqrt{m}} A {}^t A D_{\sqrt{m}} D_{\sqrt{m}} = \\ &= D_{\sqrt{m}}^{-1} D_{\sqrt{m}} A {}^t (D_{\sqrt{m}} A) D_{\sqrt{m}} = \\ &= D_{\sqrt{m}}^{-1} M {}^t M D_{\sqrt{m}} \end{aligned} \quad (9)$$

Maintenant l'équation (8) et $\sigma(\vec{x}) \neq \vec{0}$ impliquent que t' est une valeur propre de $F_n F_m$. Mais l'équation (9) montre que les deux matrices $F_n F_m$ et $M {}^t M$ sont semblables, elles ont donc les mêmes valeurs propres. Mais $M {}^t M$ est symétrique, elle a donc toutes ses valeurs propres réelles. Donc $t' \in \mathbb{R}$ ce qui achève la démonstration. \square

Remarquons que Möller [Möl06] a démontré le corollaire de ce résultat pour les surfaces de Veech avec des méthodes de géométrie algébrique.

Il serait intéressant d'avoir d'autres critères pour exclure les éléments paraboliques. Par exemple on ne connaît pas de groupe de Veech (possédant un hyperbolique) sans éléments paraboliques et ayant un corps de traces totalement réel.

A Appendice : prépublications

Nous terminons ce mémoire en incluant quelques travaux.

L'article A.1 (page 50) vient d'être accepté à *Annales de l'Institut Fourier*. L'article A.2 (page 50) vient d'être accepté à *Contemporary Mathematics*.

L'article A.3 (page 50) a été soumis pour publication. L'article A.4 (page 50) est une prépublication à soumettre. L'article A.5 (page 50) est un travail en cours.

A.1 On the minimum dilatation of pseudo-Anosov diffeomorphisms on surfaces

A.2 Infinite sequences of fixed point free pseudo-Anosov homeomorphisms

A.3 On the minimum dilatation of braids on the punctured disc

A.4 Large entropy of pseudo-Anosov homeomorphism on hyperelliptic surfaces

A.5 Enumerating pseudo-Anosov Diffeomorphisms of Punctured Discs

Références

- [Ano67] D.V. ANOSOV – « Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature », *Proc. Steklov Math. Inst.* **90** (1967), AMS (1969).
- [Arn81] P. ARNOUX – « Un invariant pour les échanges d'intervalles et les flots sur les surfaces (French) », *Thèse, Université de Reims* (1981).
- [Arn94] P. ARNOUX – « Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire (french) », *Enseign. Math.* (2) **40** (1994) no. 1-2, pp. 29–48.
- [AY81] P. ARNOUX and J. C. YOCOZ – « Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov (French) », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **292** (1981), pp. 75–78.
- [Ati71] M. ATIYAH – « Riemann surfaces and spin structures », *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **4** (1971), pp. 47–62.
- [AGY06] A. AVILA, S. GOUËZEL and J.-C. YOCOZ – « Exponential mixing for the Teichmüller flow », *Publ. Math. Inst. Hautes études Sci.* **104** (2006), pp. 143–211.
- [AF07] A. AVILA and G. FORNI – « Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows », *Ann. of Math.* (2) **165** no. 2 (2007), pp. 637–664.
- [AR08] A. AVILA, and M. RESENDE – « Exponential mixing for the Teichmüller flow on the moduli space of quadratic differentials », *preprint* (2008).
- [AV07] A. AVILA, and M. VIANA – « Simplicity of Lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture », *Acta Math.* **198** (2007), no. 1, pp.1–56.
- [BM10] M. BAINBRIDGE and M. MÖLLER – « Deligne-Mumford compactification of the real multiplication locus and Teichmüller curves in genus three », arXiv :0911.4677.
- [BB07] G. BAND and P. BOYLAND – « The Burau estimate for the entropy of a braid », *Algebr. Geom. Topol.* **7** (2007), pp. 1345–1378.
- [BH92] M. BESTVINA and M. HANDEL – « Train Tracks for Automorphisms of Free Groups », *Annals. Math.* **134** (1992), pp. 1–51.

- [Bir75] J. BIRMAN – « Braids, links, and mapping class groups », *Annals of Math. Studies* **82**, Princeton University Press (1975).
- [BBK10] J. BIRMAN, P. BRINKMANN and K. KAWAMURO – « Characteristic polynomials of pseudo-Anosov maps », *preprint ArXiv 1001.5094* (2010).
- [Boi09] C. BOISSY – « Classification of Rauzy classes in the moduli space of quadratic differentials. », *preprint arXiv :0904.3826* (2009).
- [Boi10] — , travail en cours (2010).
- [BL08] C. BOISSY and E. LANNEAU – « Dynamics and geometry of the Rauzy-Veech induction for quadratic differentials », *Ergodic Theory Dynam. Systems* (2008).
- [BL10] — , « Large entropy of pseudo-Anosov homeomorphism on hyperelliptic surfaces », *preprint* (2010).
- [Bos88] M. BOSHERNITZAN – « Rank two interval exchange transformations », *Erg. Th. Dyn.* **8** (1988).
- [Boy80] D. W. BOYD – « Polynomials having small measure », *Math. Comp.* **35** (1980), pp. 1361–1377.
- [Bro71] R. BROWN – « The Lefschetz fixed point theorem », *Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill.-London* (1971).
- [Buf06] A. BUFETOV – « Decay of correlations for the Rauzy-Veech-Zorich induction map on the space of interval exchange transformations and the central limit theorem for the Teichmüller flow on the moduli space of abelian differentials », *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006), no. 3, pp. 579–623.
- [Buf06bis] — , « Logarithmic asymptotic for the number of periodic orbits of the Teichmüller flow on Veech’s space of zippered rectangles », *preprint arXiv :math/0511035* (2006).
- [BG07] A. BUFETOV, and B. GUREVICH – « Existence and Uniqueness of the Measure of Maximal Entropy for the Teichmüller Flow on the Moduli Space of Abelian Differentials », *preprint ArXiv math.DS/0703020*, (2007), pp. 1–31.
- [Cal04] K. CALTA – « Veech surfaces and complete periodicity in genus two », *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 4, pp. 871–908.
- [CS07] K. CALTA and J. SMILLIE – « Algebraically periodic translation surfaces », *J. Mod. Dyn.* **2** (2008), no. 2, pp. 209–248.
- [CB88] A. CASSON and S. BLEILER – « Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston », *London Mathematical Society Student Texts* **9**, Cambridge University Press, Cambridge (1988).
- [CM06] Y. CHEUNG and H. MASUR – « Minimal nonergodic directions on genus 2 translation surfaces », *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **26** (2006), pp. 341–351.
- [CH08] J. CHO and J. HAM – « The minimal dilatation of a genus two surface », *Experiment. Math.* **17** (2008), pp. 257–267.
- [DN88] C. DANTHONY and A. NOGUEIRA – « Involutions linéaires et feuilletages mesurés (French) », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), no. 8, pp. 409–412.
- [DN90] — , « Measured foliations on nonorientable surfaces », *Ann. Sci. école Norm. Sup.* (4) **23** (1990), pp. 469–494.
- [Del10] V. DELECROIX – « Cardinality of Rauzy classes », *preprint* (2010).
- [DH75] A. DOUADY, and J. HUBBARD – « On the density of Strebel differentials », *Invent. Math.* **30** (1975), p.175–179.

- [DV10] N. DUNFIELD and R. VENZKE – « Closed surface bundles of least volume », arXiv :1002.3423 (2010).
- [EM08] A. ESKIN and M. MIRZAKHANI – « Counting closed geodesics in Moduli space », preprint, arXiv :0811.2362, (2008).
- [EM10] — « On invariant and stationary measures for the $SL_2(\mathbb{R})$ action on moduli space », <http://www.math.uchicago.edu/eskin/> (2010).
- [Far06] B. FARB – « Some problems on mapping class groups and moduli space », *Problems on Mapping Class Groups and Related Topics* ed. by B. Farb, *Proc. Symp. Pure and Applied Math.* **74**, (2006) pp. 11–55.
- [FLM08] B. FARB, C. J. LEININGER and D. MARGALIT – « The lower central series and pseudo-Anosov dilatations », *Amer. J. Math.* **130** (2008), pp. 799–827.
- [FLM09] — , « Small dilatation pseudo-Anosovs and 3-manifolds », *preprint* (2009).
- [Fat87] A. FATHI – « Dehn twists and pseudo-Anosov diffeomorphisms », *Invent. math.* **87** pp. 129–151 (1987).
- [FLP79] A. FATHI, F. LAUDENBACH and V. POÉNARU – « Travaux de Thurston sur les surfaces », *Astérisque* **66–67** (1979).
- [FHZ01] S. FERENCZI, C. HOLTON and L. ZAMBONI – « Structure of three interval exchange transformations. I. An arithmetic study », *Ann. Inst. Fourier* **51**, 4 (2001) pp. 861–901.
- [FHZ01bis] — , « Combinatorics of three-interval exchanges », *Automata, languages and programming Lecture Notes in Comput. Sci.*, 2076, Springer, Berlin, 2001.
- [FHZ03] — , « Structure of three-interval exchange transformations. II. A combinatorial description of the trajectories », *J. Anal. Math.* **89** (2003) pp. 239–276.
- [FHZ04] — , « Structure of three-interval exchange transformations III : ergodic and spectral properties », *J. Anal. Math.* **93** (2004) pp. 103–138.
- [FTJ09] M. D. FINN, J.-L. THIFFEAULT and N. JEWELL – « Topological entropy of braids on arbitrary surfaces », *preprint* (2009).
- [GJ00] E. GUTKIN, C. JUDGE, *Affine mappings of translation surfaces : Geometry and arithmetic*, *Duke Math. J.* **103**, (2000) 191–213.
- [Ham07] U. HAMENSTÄDT – « Bernoulli Measures for the Teichmüller Flow. » Preprint ArXiv math.DS/0607386 (2007).
- [HS06] Y. HAM and W. SONG – « The minimum dilatation of pseudo-Anosov 5-braids », *Experiment. Math.* **16** (2007), pp. 167–179.
- [HK06] E. HIRONAKA and E. KIN – « A family of pseudo-Anosov braids with small dilatation », *Algebraic & Geometric Topology* **6** (2006), pp. 699–738.
- [Hir09] E. HIRONAKA – « Small dilatation pseudo-Anosov mapping classes coming from the simplest hyperbolic braid », arXiv :0909.4517 (2009).
- [Hub06] J. HUBBARD – « Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1. Teichmüller theory. Matrix Éditions, Ithaca, NY, 2006. xx+459 pp (2006).
- [HM79] J. HUBBARD and H. MASUR – « Quadratic differentials and foliations », *Acta Math.* **142** (1979), no. 3-4, p. 221–274.
- [Ker85] S. P. KERCKHOFF – « Simplicial systems for interval exchange maps and measured foliations », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **5** (1985), no. 2, pp. 257–271.
- [HL06] P. HUBERT and E. LANNEAU – « Veech groups with no parabolic element », *Duke Math. J.* **133** (2006), no. 2, pp. 335–346.

- [HLM06] P. HUBERT, E. LANNEAU and M. MÖLLER , « The Arnoux-Yoccoz Teichmüller disc », *Geom. Func. Anal.*, to appear, *math.GT/0611655* (2006).
- [HLM07] — , « Completely periodic directions and orbit closures of many pseudo-Anosov Teichmüller discs », *Math. Ann.*, to appear, *math.GT/0707.0738* (2007).
- [HLM10] — , « $GL_2(\mathbb{R})$ -orbit closures via topological splittings », *volume 14 of Surveys in Differential Geometry* (2010).
- [HS04] P. HUBERT and T.A. SCHMIDT – « Infinitely generated Veech groups », *Duke Math. J.* **123**, (2004) pp. 49–69.
- [IT92] Y. IMAYOSHI and M. TANIGUCHI – « An introduction to Teichmüller spaces », Translated and revised from the Japanese by the authors. Springer-Verlag, Tokyo, 1992. xiv+279 pp.
- [Iva88] N.V. IVANOV – « Coefficients of expansion of pseudo-Anosov homeomorphisms », *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)* **167** (1988), translation in *J. Soviet Math.* **52** (1990), pp. 2819–2822.
- [Kat] A. KATOK and A. ZEMLIKOV – « Topological transitivity of billiards in polygons », *Maths notes* **18** (1975) pp. 760–764.
- [Kat92] S. KATOK – « Fuchsian Groups », *U. Chicago Press, Chicago* (1992).
- [Kea75] M. KEANE – « Interval exchange transformations », *Math. Zeit.* **141** (1975), pp. 25–31.
- [KS00] R. KENYON and J. SMILLIE – « Billiards in rational-angled triangles », *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), pp. 65–108.
- [KT10] E. KIN and M. TAKASAWA – « Pseudo-Anosovs on closed surfaces having small entropy and the Whitehead sister link exterior », *preprint* (2010).
- [KZ97] M. KONTSEVICH, and A. ZORICH – « Lyapunov exponents and Hodge theory », *arXiv :hep-th/9701164v1* (1997).
- [KZ03] M. KONTSEVICH, and A. ZORICH – « Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities », *Invent. Math.* **153** (2003), no. 3, pp.631–678.
- [Lan03] E. LANNEAU – « Hyperelliptic components of the moduli spaces of quadratic differentials with prescribed singularities », *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), pp. 471–501.
- [Lan04] — , « Parity of the spin structure defined by a quadratic differential », *Geom. Topol. (electronic)* **8** (2004), pp. 511–538.
- [Lan08] — , « Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials with prescribed singularities », *Ann. Sci. école Norm. Sup. (4)* **41** (2008), pp. 1–56.
- [Lan10] — , « An Infinite sequence of fixed point free pseudo-Anosov homeomorphisms on a genus two surface », *preprint* (2010).
- [LT09] E. LANNEAU and J.-L. THIFFEAULT – « Enumerating pseudo-Anosov Homeomorphisms of the Punctured Disc », *preprint* (2009).
- [LT09bis] — , « On the minimum dilatation of braids on the punctured disc », *preprint* (2009).
- [LT10bis] — , « On the minimum dilatation of pseudo-Anosov diffeomorphisms on surfaces of small genera », *Annales Fourier* **60** (2010).
- [Lei04] C. J. LEININGER – « On groups generated by two positive multi-twists : Teichmüller curves and Lehmer number », *Geom. Topo.* **8** (2004), pp. 1301–1359.
- [Ler04] F. LE ROUX – « Homéomorphismes de surfaces : théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable. (French) », *Astérisque* **292** (2004).

- [Lin84] D. LIND – « The entropy of topological Markov shifts and a related class of algebraic integers », *Erg. Th. Dyn. Sys* **4** (1984), pp. 283–300.
- [Los09] J. LOS – « Infinite sequences of fixed point free pseudo-Anosov homeomorphisms. », *Erg. Th. Dyn. Sys*, to appear (2009).
- [MMY05] S. MARMI, P. MOUSSA and J.-C. YOCOZ – « The cohomological equation for Roth type interval exchange transformations », *Journal of the Amer. Math. Soc.* **18** (2005), pp. 823–872.
- [Mas82] H. MASUR – « Interval exchange transformations and measured foliations », *Ann of Math.* **141** (1982) 169–200.
- [Mas86] — , « Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards », *Duke Math. J.* **53** (1986), no. 2, pp. 307–314.
- [MaTa02] H. MASUR, S. TABACHNIKOV—« Rational billiards and flat structures », *Handbook of dynamical systems*, **1A**, North-Holland, Amsterdam (2002), pp. 1015–1089.
- [MS93] H. MASUR and J. SMILLIE – « Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov homeomorphisms », *Comment. Math. Helv.* **68** (1993), pp. 289–307.
- [Min03] H. MINAKAWA – « Examples of pseudo-Anosov braids with small dilatations », *preprint* (2003).
- [Mc1] C. McMULLEN – « Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 4, pp. 857–885.
- [Mc2] — , « Teichmüller geodesics of infinite complexity », *Acta Math.* **191** (2003), no. 2, pp. 191–223.
- [Mc3] — , « Dynamics of $SL_2(\mathbb{R})$ over moduli space in genus two », *Ann. of Math.* to appear.
- [Mc4] — , « Teichmüller curves in genus two : Discriminant and spin », *Math. Ann.* **333** (2005), pp. 87–130.
- [Mc5] — , « Teichmüller curves in genus two : The decagon and beyond », *J. reine angew. Math.* **582** (2005), pp. 173–200.
- [Mc6] — , « Teichmüller curves in genus two : Torsion divisors and ratios of sines », *Invent. Math.* **165** (2006), pp. 651–672.
- [Mc7] — , « Prym varieties and Teichmüller curves », *Duke Math. J.* **133** (2006), pp. 569–590.
- [Mc8] — , « Polynomial invariants for fibered 3-manifolds and Teichmüller geodesics for foliation », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **33** (4) (2000), pp. 519–560.
- [Mc9] — , « Entropy on Riemann surfaces and Jacobians of finite covers », *preprint* (2010).
- [Möl06] M. Möller, *Variations of Hodge structure of Teichmüller curves*, *J. Amer. Math. Soc.* **19** no. 2, (2006) 327–344.
- [Möl07] — , *Affine groups of flat surfaces*, (2007)
- [Möl08] — , *Linear manifolds in the moduli space of one-forms*, *Duke Math. J.* **144** (2008), pp. 447–487.
- [Mou06] J.-O. MOUSSAFIR, « On the Entropy of Braids », *Func. Anal. and Other Math.* **1** (2006), pp. 43–54.
- [Mum69] D. MUMFORD, « Geometric invariant theory », *Band 34 Springer-Verlag, Berlin-New York* (1965), vi+145 pp.
- [Mum71] — « Theta-characteristics of an algebraic curve », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **2** (1971), pp. 181–191.

- [Nog89] A. NOGUEIRA – « Almost all interval exchange transformations with flips are nonergodic », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** no. 3 (1989), pp. 515–525.
- [Pap83] A. PAPADOPOULOS – « Réseaux Ferroviaires, Difféomorphismes pseudo-Anosov et Automorphismes Symplectiques de l’Homologie », *orsay* 1983.
- [PP87] A. PAPADOPOULOS and R. PENNER – « A characterization of pseudo-Anosov foliations », *Pacific J. Math.* **130** (1987), pp. 359–377.
- [Pen91] R. PENNER – « Bounds on least dilatations », *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), pp. 443–450.
- [HP91] R. PENNER and J. HARER – « Combinatorics of Train Tracks », *Annals of Mathematics Studies* **125**, Princeton University Press (1991).
- [PS64] C. PISOT AND R. SALEM – « Distribution modulo 1 of the powers of real numbers larger than 1 », *Compositio Math.* **16** (1964), pp. 164–168.
- [Raf08] K. RAFI – « Closed geodesics in the thin part of moduli space », preprint (2008).
- [Rat90] M. RATNER – « On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups », *Acta Math.* **165** (1990), no. 3-4, pp. 229–309.
- [Rat90bis] — , « Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups » *Invent. Math.* **101** (1990), no. 2, pp. 449–482.
- [Rat91] — , « Raghunathan’s topological conjecture and distributions of unipotent flows », *Duke Math. J.* **63** (1991), no. 1, pp. 235–280.
- [Rat91bis] — , « On Raghunathan’s measure conjecture » *Ann. of Math. (2)* **134** (1991), no. 3, pp. 545–607.
- [Rau79] G. RAUZY – « échanges d’intervalles et transformations induites », *Acta Arith.* **34** (1979), pp. 315–328.
- [Ser] C. SERIES « On coding geodesics with continued fractions », *Ergodic theory (Sem., Les Plans-sur-Bex, 1980)* (French), pp. 67–76,
- [Sha98] N. SHAH, « Invariant measures and orbit closures on homogenous spaces for actions of subgroups generated by unipotent elements », in : S. G. Dani (ed) : Lie groups and ergodic theory (Mumbai 1996), New Delhi (1998), pp. 229–271.
- [Sha07] — , « Unipotent flows on products of $SL(2, K)/\Gamma$ ’s », preprint (2007), arXiv :0708.4151
- [SW06] J. SMILLIE and B. WEISS – « Finiteness results for flat surfaces : a survey and problem list, (2006) in Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmueller flow » *Proceedings of a conference, Fields Institute, Toronto Jan 2006*, G. Forri (ed.) (2006).
- [SW07] — , « Veech’s dichotomy and the lattice property » *Erg. Th. Dyn. Sys.*, (2007).
- [SW10] — , « Characterizations of lattice surfaces » *Inv. Math.* to appear, (2010).
- [SKL02] W. SONG, H. Ko and J. Los – « Entropies of braids. » *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), no. 4, 647–666.
- [Thu88] W. THURSTON – « On the geometry and dynamics of homeomorphisms of surfaces », *Bull. A.M.S.* **19** (1988), pp. 417–431.
- [Thu97] — « Three-dimensional geometry and topology », *Princeton Mathematical Series* Vol. 1. Edited by Silvio Levy, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1997).
- [Tro86] M. TROYANOV – « Les surfaces euclidiennes à singularités coniques », *Enseign. Math.* **32** (1986), pp. 79–94.

- [Tsa09] C. TSAI – « The asymptotic behavior of least pseudo-Anosov dilatations », *Geom. Topol.* **13** (2009), pp. 2253–2278.
- [Vas03] S. VASILYEV – « Genus two Veech surfaces arising from general quadratic differentials », *preprint ArXiv* (2003).
- [Vee82] W. VEECH – « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 1, pp. 201–242.
- [Vee86] — « The Teichmüller geodesic flow », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 3, pp. 441–530.
- [Vee89] W. VEECH, *Teichmüller curves in modular space, Eisenstein series, and an application to triangular billiards*, *Inv. Math.* **97**, (1989) 553–583.
- [Vee90] — , « Moduli spaces of quadratic differentials », *J. Analyse Math.* **55** (1990), pp. 117–170.
- [Vee92] — , « Geometric realizations of hyperelliptic curves », *Algorithms, fractals, and dynamics (Okayama/Kyoto, 1992)* Plenum, New York (1992), pp. 217–226.
- [Via08] M. VIANA – « Dynamics of Interval exchange maps and Teichmueller geodesic flows », *Handbook of dynamical systems*, Elsevier B. V., Amsterdam, (2006).
- [Wil1967] R. WILLIAMS – « One-dimensional non-wandering sets », *Topology* **6** (1967), pp. 473–487.
- [Yoc03] J.-C. YOCOZ – « Continued fraction algorithms for interval exchange maps : an introduction », *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry Volume 1 : On random matrices, zeta fonctions and dynamical systems*. Springer Verlag (2006). école de Physique des Houches, 2003.
- [Zhi95] A. ZHIROV – « On the minimum dilatation of pseudo-Anosov homeomorphisms of a double torus », *Russ. Math. Surv.* **50** (1995), pp. 223–224.
- [Zor96] A. ZORICH – « Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents », *Ann. Inst. Fourier* **46** (1996), pp. 325–370.
- [Zor07] — , « Explicit Jenkins–Strebel representatives of all strata of Abelian and quadratic differentials », *J. Mod. Dyn.* (2008), to appear, pp. 1–46.
- [Zor06] — , « Rauzy-Veech induction, Rauzy classes, generalized permutations on Mathematica », <http://perso.univ-rennes1.fr/anton.zorich>.
- [Zor06] — , « Flat surfaces », *Frontiers in number theory, physics, and geometry* 437–583, Springer, Berlin, 2006.