Systèmes Dynamiques Quantiques

Projet du pôle MSTIC de l'UJF

Alain JOYE

Thèmes et participants

- Systèmes quantiques ouverts (états stationnaires hors équilibre, décohérence, systèmes d'interactions répétées,...
- Dynamique adiabatique (pompage de charge, lindbladiens non-stat, ...)
- Modèles stochastiques (systèmes dynamiques aléatoires, bruits quantiques,...)
- Dynamiques effectives (échelles de temps, au delà de l'approximation markovienne, Maxwell-Bloch, semi-classique...)

IF / LPMMC	Syst. ouverts	Mod. aléatoires	Adiabatique	Dyn. effect.
Didier N.				X
Dumas E.				X
Faure F.	X			X
Hekking F.			X	X
Joye A.	X	X	X	X
Spehner D.	X	X	X	X
Vargas R.	X			
Vogelsberger S.	X			X

Actions

- Travaux en cours

  - *Asch, Bourget, Joye: " About the Chalker-Coddington Model"*.

  - *Brosco, Hekking, Joye: "Mathematical adiabatic charge pumping"*.

  - *Bruneau, Joye, Merkli: "Leaky Repeated Interaction Quantum Systems"*.

  - *Castella, Dumas: "Relaxation in Bloch model: convergence to Schroedinger-Boltzmann system".*

  - *De Roeck, Spehner: "Weak coupling limit for spacially extended system coupled to a free boson bath".*

  - *Faure, Panati, De Nittis: "Bloch electrons with magnetic field: Peierls substitution and duality formula for the topological conductivity"*

  - *Hamza, Joye, Stolz: "Dynamical Localization for Unitary Anderson Models".*

  - *Orzag, Spehner:"Entanglement sudden death for non markovian dynamics"*

  - *Spehner: "Perturbative convolutionless master equations for open systems: justification of the Bloch-Redfield equation."*

  - *Volgelsberger: "Loss of entanglement for harmonic oscillators coupled to heat baths"*.

- Animation scientifique

  -École thématique "Aspects de la dynamique quantique" , 3-7/11/08,
  Org. : A Joye, F Hekking.

  -Journées Systèmes Ouverts, mars 2009, Org. : A Joye

Actions

- Publications

  - Brosco, Fazio, Hekking, Joye:*“Non-abelian superconducting pumps”*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, *027002, (2008)*.

  - Bruneau, Joye, Merkli: *“Random Repeated Interaction Quantum Systems” Commun. Math. Phys.,* **284***, (2008), p. 553-581*.

  - Faure, Roy, Sjöstrand: *”Semi-classical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances” Open Math. Journal,* **1***, 35–81, (2008)*.

  - Joye: *“Repeated Interaction Quantum Systems: Determinsitic and Random” Proc. of QMath10, World Scientific, 2008*

  - Rebolledo, Spehner: *Adiabatic limits and decoherence, in: “Stochastic Analysis and Mathematical Physics” Proc. of a sat. conf. of ICM 2006, World Scientific, 2008*

  - Spehner, Haake: *Quantum measurements without macroscopic superpositions, Phys. Rev. A* **77** *(2008), 052114.*

  - Spehner, Haake: *Decoherence bypass of macroscopic superpositions in quantum measurement, J. Phys. A: Math. Theor.* **41** *(2008), 072002.*

  - Vargas: *“Repeated interaction quantum systems: Van Hove Limits and Asymptotic States”*, *J. Stat. Phys.* **133***, (2008), p. 491-511.*

Travail en cours

Opérateurs d'Anderson Unitaires et Localisation Dynamique

Eman HAMZA (MSU, Michigan, USA)
Alain JOYE (UJF, IF)
Günter STOLZ (UAB, Birmingham, USA)

Modèle d'Anderson (auto-adjoint)

Sur $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z}^d)$, $\psi = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \psi(j) e_j \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, où $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ est une B.O.N.

$$H_\omega(\lambda) = \Delta_{\text{disc}} + \lambda V_\omega$$

$$(H_\omega \psi)(n) = \sum_{\{m \mid |m-n|=1\}} \psi(m) + \lambda V_\omega(n)\psi(n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Aléatoire : $\{V_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d} = \{\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ variables aléatoires i.i.d. bornées

distribution $d\mu(v) = f(v)dv$, où supp $f \subset [0,1]$ et $f \in L^\infty$

Modèle d'Anderson (auto-adjoint)

Sur $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z}^d)$, $\psi = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \psi(j) e_j \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, où $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ est une B.O.N.

$$H_\omega(\lambda) = \Delta_{\text{disc}} + \lambda V_\omega$$

$$(H_\omega \psi)(n) = \sum_{\{m \mid |m-n|=1\}} \psi(m) + \lambda V_\omega(n)\psi(n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d$$

Aléatoire : $\{V_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d} = \{\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ variables aléatoires i.i.d. bornées distribution $d\mu(v) = f(v)dv$, où supp $f \subset [0,1]$ et $f \in L^\infty$

$d = 1$:

$$H_\omega(\lambda) \simeq \begin{pmatrix} \ddots & 1 & & & & \\ 1 & \lambda V_\omega(-1) & 1 & & & \\ & 1 & \lambda V_\omega(0) & 1 & & \\ & & 1 & \lambda V_\omega(1) & 1 & \\ & & & 1 & \lambda V_\omega(2) & 1 \\ & & & & 1 & \ddots \end{pmatrix}$$

Modèle d'Anderson

- Potentiel

  V_ω est diagonal, pure point, $\sigma(V_\omega) = \sigma_{\text{p.p.}}(V_\omega) = \overline{\{V_\omega(n) \mid n \in \mathbb{Z}^d\}}$

- Laplacien

  $\Delta_{\text{disc}} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_d$, $[\Delta_j, \Delta_k] = 0$ est t.q.

  $\Delta_{\text{disc}} \simeq \sum_j 2\cos(x_j)$, $x_j \in [0, 2\pi]$ est absolument continu

  $\sigma(\Delta_{\text{disc}}) = \sigma_{\text{a.c.}}(\Delta_{\text{disc}}) = [-2d, 2d]$

Modèle d'Anderson

- Potentiel

  V_ω est diagonal, pure point, $\sigma(V_\omega) = \sigma_{\text{p.p.}}(V_\omega) = \overline{\{V_\omega(n) \mid n \in \mathbb{Z}^d\}}$

- Laplacien

  $\Delta_{\text{disc}} = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_d$, $[\Delta_j, \Delta_k] = 0$ est t.q.

  $\Delta_{\text{disc}} \simeq \sum_j 2\cos(x_j)$, $x_j \in [0, 2\pi]$ est absolument continu

  $\sigma(\Delta_{\text{disc}}) = \sigma_{\text{a.c.}}(\Delta_{\text{disc}}) = [-2d, 2d]$

- Ergodicité

  Si s_k décalage de $k \in \mathbb{Z}^d$ sur $\Omega = \{\omega = (\omega(n))_{n \in \mathbb{Z}^d}\}$,

  il existe W_k unitaire t.q. $H_{s_k\omega}(\lambda) = W_k H_\omega(\lambda) W_k^*$.

  Conséquences : $\exists\ \Sigma := [-2d, 2d] + \lambda \text{supp} f$ et Σ_x

  t.q. $\sigma(H_\omega(\lambda)) = \Sigma$ p.s.

  $\sigma_x(H_\omega(\lambda)) = \Sigma_x$ p.s.

  où $x =$ p.p., a.c., s.c.

Modèle d'Anderson Unitaire

Analogue unitaire du laplacien: Sur $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$S_1(t) \leftrightarrow \Delta_1$ défini par

$$S_1(t) \simeq \begin{pmatrix} \ddots & rt & -t^2 & & & \\ & r^2 & -rt & & & \\ & rt & r^2 & rt & -t^2 & \\ & -t^2 & -tr & r^2 & -rt & \\ & & & rt & r^2 & \\ & & & -t^2 & -tr & \ddots \end{pmatrix} \text{ sur } l^2(\mathbb{Z})$$

où $t \in (0,1)$, et $r^2 + t^2 = 1$.

Modèle d'Anderson Unitaire

Analogue unitaire du laplacien: Sur $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$S_1(t) \leftrightarrow \Delta_1$ défini par

$$S_1(t) \simeq \begin{pmatrix} \ddots & rt & -t^2 & & & \\ & r^2 & -rt & & & \\ & rt & r^2 & rt & -t^2 & \\ & -t^2 & -tr & r^2 & -rt & \\ & & & rt & r^2 & \\ & & & -t^2 & -tr & \ddots \end{pmatrix} \text{ sur } l^2(\mathbb{Z})$$

où $t \in (0,1)$, et $r^2 + t^2 = 1$.

$S(t) \leftrightarrow \Delta_{\text{disc}}$ défini sur $l^2(\mathbb{Z}^d) \simeq l^2(\mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes l^2(\mathbb{Z})$ par

$$S(t) = S_1(t) \otimes \cdots \otimes S_d(t).$$

Modèle d'Anderson Unitaire

Analogue unitaire du potentiel Sur $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$D_\omega =$ diag$(e^{-i\theta_\omega(j)})_{j\in\mathbb{Z}^d}$ t.q. $(D_\omega\psi)(n) = e^{-i\theta_\omega(n)}\psi(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^d$

Aléatoire : $\{\theta_\omega(j)\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ variables aléatoires i.i.d.

distribution $d\mu(\theta) = \tau(\theta)d\theta$, où supp $\tau \subset [0, 2\pi]$ et $\tau \in L^\infty$

Modèle d'Anderson Unitaire

Analogue unitaire du potentiel Sur $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$D_\omega = \text{diag}(e^{-i\theta_\omega(j)})_{j\in\mathbb{Z}^d}$ t.q. $(D_\omega\psi)(n) = e^{-i\theta_\omega(n)}\psi(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^d$

Aléatoire : $\{\theta_\omega(j)\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ variables aléatoires i.i.d.

distribution $d\mu(\theta) = \tau(\theta)d\theta$, où supp $\tau \subset [0, 2\pi]$ et $\tau \in L^\infty$

Modèle d'Anderson Unitaire

$$U_\omega(t) := D_\omega S(t) \quad \text{sur } l^2(\mathbb{Z}^d) .$$

Modèle d'Anderson Unitaire

Analogue unitaire du potentiel Sur $l^2(\mathbb{Z}^d)$

$D_\omega = \text{diag}(e^{-i\theta_\omega(j)})_{j\in\mathbb{Z}^d}$ t.q. $(D_\omega\psi)(n) = e^{-i\theta_\omega(n)}\psi(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^d$

Aléatoire : $\{\theta_\omega(j)\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ variables aléatoires i.i.d.

distribution $d\mu(\theta) = \tau(\theta)d\theta$, où supp $\tau \subset [0, 2\pi]$ et $\tau \in L^\infty$

Modèle d'Anderson Unitaire

$$U_\omega(t) := D_\omega S(t) \quad \text{sur } l^2(\mathbb{Z}^d).$$

Propriétés

- D_ω diagonal pure point, $\sigma(D_\omega) = \overline{\{e^{-i\theta_\omega(j)}, \ j \in \mathbb{Z}^d\}}$
- $S(t)$ est abs. continu, $\sigma(S(t)) = \{e^{\pm i d \arccos(1-t^2(1+\cos(y)))}, y \in [0, 2\pi)\}$
- $U_\omega(t)$ est ergodique, $\sigma(U_\omega(t)) = \exp(-i \text{ supp}\tau)\sigma(S(t))$ p.s.

Rem: Le paramètre t correspond à λ

Motivation et premières versions de U_ω (Bourget, Howland, J. '03 et J. '04)

Localisation

Spectrale :

- $\exists\ I \subset \mathbb{R}$ t.q. $\sigma(H_\omega(\lambda)) \cap I \subset \Sigma_{\text{p.p.}}$, p.s.
- $\exists\ I \subset \mathbb{S}$ t.q. $\sigma(U_\omega(t)) \cap I \subset \Sigma_{\text{p.p.}}$, p.s.

Dynamique:

- $\exists\ I \subset \mathbb{R}$ t.q. $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\langle e_j | e^{-itH_\omega(\lambda)} P_I^\omega e_k\rangle| \leq Ce^{-\gamma|j-k|}$, p.s.
- $\exists\ I \subset \mathbb{S}$ t.q. $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_j | U_\omega^n(t) P_I^\omega e_k\rangle| \leq Ce^{-\gamma|j-k|}$, p.s.,

où P_I^ω proj. spectral sur I de $H_\omega(\lambda)$, resp. de $U_\omega(t)$

Localisation

Spectrale :

- $\exists\ I \subset \mathbb{R}$ t.q. $\sigma(H_\omega(\lambda)) \cap I \subset \Sigma_{\text{p.p.}}$, p.s.

- $\exists\ I \subset \mathbb{S}$ t.q. $\sigma(U_\omega(t)) \cap I \subset \Sigma_{\text{p.p.}}$, p.s.

Dynamique:

- $\exists\ I \subset \mathbb{R}$ t.q. $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\langle e_j | e^{-itH_\omega(\lambda)} P_I^\omega e_k\rangle| \leq Ce^{-\gamma|j-k|}$, p.s.

- $\exists\ I \subset \mathbb{S}$ t.q. $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\langle e_j | U_\omega^n(t) P_I^\omega e_k\rangle| \leq Ce^{-\gamma|j-k|}$, p.s.,

où P_I^ω proj. spectral sur I de $H_\omega(\lambda)$, resp. de $U_\omega(t)$

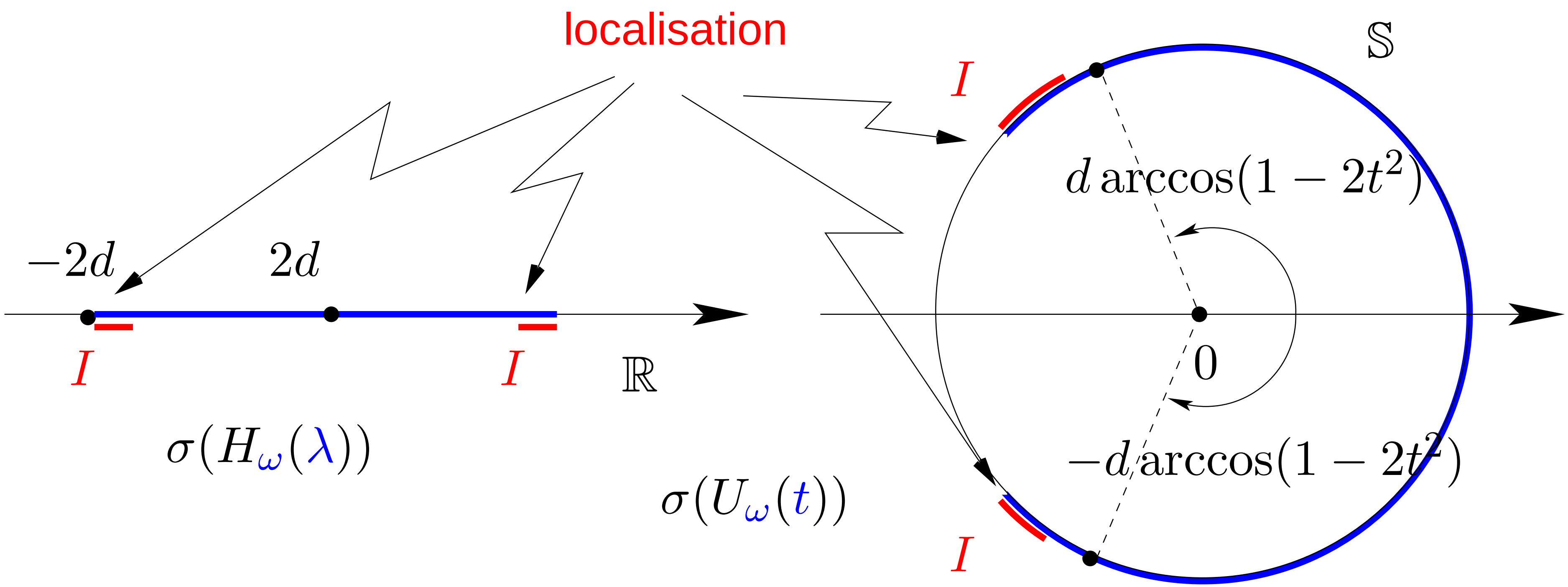
Remarques :

- Loc. dyn. $\Rightarrow$ loc. spec. (Enss-Veselic '83)
- Loc dyn. $\Rightarrow$ $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \| |X|^p U_\omega^n(t) P_I^\omega \psi \| < \infty$ p.s.,
  $\forall p \in \mathbb{N},\ \psi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, où $Xe_j = je_j$, $j \in \mathbb{Z}^d$.
- Si $d \geq 1$, il y a loc. spec. sur $\mathbb{S}$ si $0 \leq t$ assez petit (J. 05)
- Si $d = 1$, il y a loc. spec. sur $\mathbb{S}$ $\forall\ t \in [0, 1)$ (HJS 06)

Résultats

Théorème [HJS '08]

- Si $d = 1$, il y a loc. dyn. sur $\mathbb{S}$ $\forall\, t \in [0,1)$.
- Si $d \geq 1$, il y a loc. dyn. sur $\mathbb{S}$ si $0 \leq t$ assez petit.
- Si $d \geq 1$ et $\forall\, t \in [0,1)$, il y a loc. dyn. en bord de bandes



Méthode de “Aizenman-Molchanov” (’93)

Moments fractionnaires de la résolvante :

Soit $G_\omega(j,k;z) := \langle e_j | (U_\omega(t) - z)^{-1} e_k \rangle$. On montre que :

Loc. dyn. sur $I \subset \mathbb{S}$ suit de l’estimation : $\exists\, 0 < s < 1$ et $C(s), \gamma(s) > 0$,

$$\mathbb{E}(|G_\omega(j,k;z)|^s) \leq C(s) e^{-\gamma(s)|j-k|} \qquad \text{(AM)}$$

pour tout z t.q. $\arg z \in I$, $|z| \neq 1$.

On montre (AM) faisant usage de

- $d = 1$ et $\forall\, t \in [0,1)$: positivité de l’exposant de Lyapunov
- $d \geq 1$, si $0 \leq t$ petit: perturbations de rang un et lemme de découplage.
- $d \geq 1$ et $\forall\, t \in [0,1)$: “Queues de Lifshitz”, i.e. fluctuations spectrales fortes et densité d’états faible en bord de bandes.

Remarque : Cela complète l’analogie aves les résultats connus pour $H_\omega(\lambda)$