Suites numériques

Bernard Ycart

Vous savez déjà étudier une suite et calculer sa limite. La nouveauté réside dans la rigueur. La notion de convergence a une définition mathématique, que vous devez connaître et savoir appliquer. Ne vous contentez pas de comprendre les théorèmes, ils sont pour la plupart très naturels ; travaillez sur les démontrations. L'idéal serait que vous soyez capables de les refaire.

Table des matières

8 novembre 2011

1 Cours

1.1 Vocabulaire

Définition 1. *Soit E un ensemble. On appelle* suite à valeurs dans E *une application de $\mathbb{N}$ dans E. L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.*

Dans ce chapitre, nous nous préoccuperons surtout des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ (nous dirons aussi suites de réels) et très peu des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ (suites de complexes). Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera typiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté. Les entiers n sont les *indices* de la suite et leurs images u_n sont les *termes* de la suite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet différent de l'ensemble $\{u_n\,,\ n\in\mathbb{N}\}$. En particulier une suite aura toujours une infinité de termes, même si ces termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs différentes. Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, la suite est $(u_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, et l'ensemble $\{u_n\,,\ n\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble $\{-1, 1\}$.

Il existe deux manières de définir une suite de réels à partir d'une fonction :

- *définition explicite :*
$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = f(n)\,,$$
  où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple :
  1. $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = n$
  2. $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = 1/(n+1)$
  3. $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_n = 2^{-n}$.
- *définition par récurrence :*
$$u_0\in\mathbb{R}\,,\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = F(u_n)\,,$$
  où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les mêmes exemples peuvent être définis par :
  1. $u_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = u_n + 1$
  2. $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = u_n/(u_n+1)$
  3. $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = u_n/2$.

Voici deux exemples génériques.

Définition 2.

1. *Soit a un réel. On appelle* suite arithmétique *de raison a une suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et*
$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = u_n + a\,.$$
2. *Soit r un réel. On appelle* suite géométrique *de raison r une suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et*
$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\quad u_{n+1} = r\,u_n\,.$$

On vérifie facilement par récurrence qu'une suite arithmétique de raison a a pour terme général $u_n = u_0 + na$. De même, une suite géométrique de raison r a pour terme général $u_n = u_0\, r^n$.

Définition 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est :*

- constante *si* $\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} = u_n$ *;*
- croissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} \geqslant u_n$ *;*
- décroissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} \leqslant u_n$ *;*
- strictement croissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} > u_n$ *;*
- strictement décroissante *si* $\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+1} < u_n$ *;*
- monotone *si elle est croissante ou décroissante*
- majorée *si* $\{u_n\ , n \in \mathbb{N}\}$ *est majoré ;*
- minorée *si* $\{u_n\ , n \in \mathbb{N}\}$ *est minoré ;*
- bornée *si* $\{u_n\ , n \in \mathbb{N}\}$ *est borné ;*
- périodique *si* $\exists p \in \mathbb{N}^*\ , \ \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad u_{n+p} = u_n$.

Il arrive qu'une suite ne soit définie que sur une partie de $\mathbb{N}$: par exemple $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On sera également amené à réduire la suite aux indices au-delà d'un certain entier n_0 : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. L'expression « à partir d'un certain rang » reviendra souvent dans ce qui suit. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété P *à partir d'un certain rang* signifie que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ la possède pour un certain n_0. On dit aussi « P est vraie pour n assez grand ». Voici quelques exemples.

Définition 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est*

- *constante à partir d'un certain rang (on dit aussi stationnaire) si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ , \ \forall n \geqslant n_0\ , \quad u_{n+1} = u_n$ *;*
- *croissante à partir d'un certain rang si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ , \ \forall n \geqslant n_0\ , \quad u_{n+1} \geqslant u_n$ *;*
- *périodique à partir d'un certain rang si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ , \ \exists p \in \mathbb{N}^*\ , \ \forall n \geqslant n_0\ , \quad u_{n+p} = u_n$ *;*

Par exemple, la suite $(\lfloor 4/(n+1) \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang $n_0 = 4$. La suite des décimales de $1/90$ est constante à partir du rang $n_0 = 2$. La suite $(|n-5|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 = 5$. La suite des décimales de $53/2475$ est périodique, de période $p = 2$ à partir du rang $n_0 = 3$. Quel que soit le nombre rationnel x, la suite des décimales de x est périodique à partir d'un certain rang.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « majorée à partir d'un certain rang », alors elle est majorée tout court. En effet si $u_n \leqslant M$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, M\}\ .$$

De même une suite minorée à partir d'un certain rang est minorée, une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

Les opérations sur les réels s'étendent aux suites en des opérations terme à terme.

- *addition :* $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$,

- *multiplication :* $(u_n)(v_n) = (u_n v_n)$,
- *multiplication par un réel :* $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$,
- *comparaison :* $(u_n) \leqslant (v_n) \iff \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_n \leqslant v_n$.

L'addition a les mêmes propriétés que celle des réels : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Muni de l'addition et de la multiplication par un réel, c'est un espace vectoriel. Cependant, le produit de deux suites peut être nul sans que les deux suites le soient : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition et de la mutiplication est un anneau commutatif non intègre.

Etant donnée une suite (u_n), on appelle *suite extraite* ou *sous-suite*, une suite formée de certains termes de (u_n), c'est-à-dire une suite de la forme $(v_k) = (u_{\varphi(k)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par exemple si (u_n) est la suite géométrique $((-2)^n)$, et $\varphi(k) = 2k$, alors $(v_k) = (4^k)$: on a extrait de la suite (u_n) la suite des termes d'indice pair.

1.2 Convergence

On dit que la suite (u_n) *converge* vers un réel l (sa limite) si tout intervalle ouvert contenant l, contient aussi tous les u_n pour n assez grand.

Définition 5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et l un réel. On dit que la suite (u_n)* converge vers *l, (ou* tend vers *l, ou* a pour limite *l) si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\; \forall n \geqslant n_0\;, \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon\;.$$

On notera :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \quad \textit{ou bien} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l\;.$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Observons que le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, dépend de ε. La figure 1 représente les 50 premiers termes de la suite $(u_n) = (1 + \sin(n)/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La limite est $l = 1$. On a :

$$|u_n - l| = \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}\;.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ (sur la figure $\varepsilon = 0.05$). Posons $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ ($n_0 = 21$ pour $\varepsilon = 0.05$). Pour tout $n \geqslant n_0$, $1/n < \varepsilon$, donc $|u_n - l| < \varepsilon$. Sur la figure 1, on constate en fait que $u_n \in [0.95, 1.05]$ pour $n \geqslant 18$.

On étend la notion de convergence aux limites infinies de la façon suivante.

Définition 6. *Soit (u_n) une suite de réels.*

1. *On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\; \forall n \geqslant n_0\;, \quad u_n \geqslant A\;.$$

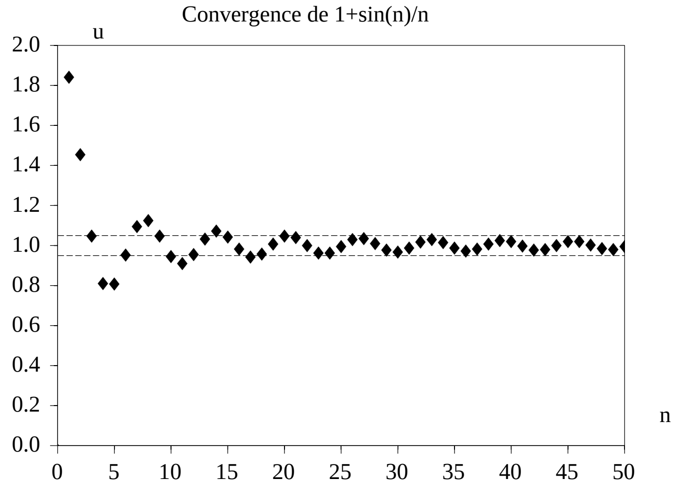

FIGURE 1 – *Convergence de la suite* $1+\sin(n)/n$.

2. *On dit que* (u_n) *tend vers* $-\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\quad u_n \leqslant A\ .$$

Il est commode de pouvoir dire qu'une suite « tend vers l'infini », mais cela induit une certaine ambiguïté sur la notion de convergence.

De même qu'il faut voir ε comme un « petit » réel (proche de 0), dans la définition 6 il faut comprendre A comme grand (proche de l'infini). Une suite tend vers $+\infty$ si ses termes restent au-dessus de n'importe quelle quantité, à partir d'un certain rang.

Voici quelques exemples classiques.

- *Suites arithmétiques :* $(u_n) = (u_0 + an)$
  1. Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  2. Si $a = 0$, (u_n) est constante (tend vers u_0).
  3. Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- *Suites géométriques :* $(u_n) = (u_0\, r^n)$
  1. Si $u_0 = 0$, (u_n) est constante (tend vers 0).
  2. Si $r \leqslant -1$, et $u_0 \neq 0$, (u_n) ne converge pas.
  3. Si $-1 < r < 1$, (u_n) tend vers 0.
  4. Si $r = 1$, (u_n) est constante (tend vers u_0).
  5. Si $r > 1$ et $u_0 > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  6. Si $r > 1$ et $u_0 < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- *Suites de Riemann :* $(u_n) = (n^\alpha)$

1. Si $\alpha > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
2. Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante (tend vers 1).
3. Si $\alpha < 0$, (u_n) tend vers 0.

Pour bien comprendre la notion de convergence, nous allons en étudier quelques conséquences faciles, rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit (u_n) une suite de réels :*

1. *si (u_n) converge, alors sa limite est unique ;*
2. *si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est bornée ;*
3. *si pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$ et si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est constante à partir d'un certain rang ;*
4. *si (u_n) converge vers l, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers l ;*
5. *si les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l (finie ou infinie), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Démonstration : Les démonstrations des 5 points se ressemblent.

1. Supposons que (u_n) vérifie la définition 5 pour deux réels l et l' distincts. Posons $\varepsilon = |l - l'|/3$. Alors les intervalles $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $[l' - \varepsilon, l' + \varepsilon]$ sont disjoints. À partir d'un certain rang, les u_n devraient appartenir aux deux à la fois : c'est impossible.
2. Fixons $\varepsilon > 0$, et n_0 tel que u_n reste dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ pour tout $n \geqslant n_0$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, l + \varepsilon\} ,$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, l - \varepsilon\} .$$
3. Soit l la limite. Si l n'était pas un entier, pour ε suffisamment petit, l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ ne contiendrait aucun entier, donc aucun des u_n. Donc l doit être un entier. Posons $\varepsilon = 1/2$. L'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ ne contient qu'un seul entier, l. Comme à partir d'un certain rang tous les u_n sont dans cet intervalle, et qu'ils sont tous entiers, ils sont tous égaux à l.
4. Soit $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme φ est strictement croissante, pour tout n_0 il existe k_0 tel que $\varphi(k) \geqslant n_0$ pour tout $k \geqslant k_0$. Si tous les (u_n) sont dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ à partir du rang n_0, tous les $u_{\varphi(k)}$ sont dans le même intervalle à partir du rang k_0.
5. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit k_0 tel que u_{2k} reste dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ pour tout $k \geqslant k_0$. Soit k'_0 tel que u_{2k+1} reste dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ pour tout $k \geqslant k_0$. Alors pour tout $n \geqslant \max\{2k_0, 2k'_0+1\}$, $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. La démonstration pour une limite infinie est analogue.

□

1.3 Opérations sur les limites

La combinaison de la notion de limite avec les opérations habituelles sur les suites se passe sans trop de mauvaises surprises : globalement, les résultats que l'on attend sont vrais. Nous les énoncerons dans le théorème 1. Les démonstrations sont basées sur le lemme suivant.

Lemme 1.

1. *La somme de deux suites convergeant vers* 0 *converge vers* 0.
2. *Le produit d'une suite convergeant vers* 0 *par une suite bornée, converge vers* 0.

Démonstration :

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| < \varepsilon/2$. De même, soit n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|v_n| < \varepsilon/2$. Alors pour tout $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$,
$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ ,$$
d'où le résultat.
2. Si la suite (u_n) est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout entier n, $|u_n| \leqslant M$. Soit (v_n) une suite convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| \leqslant \varepsilon/M$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a donc :
$$|u_n\, v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M|v_n| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \ .$$
D'où le résultat.

□

Théorème 1.

1. *La somme de deux suites convergeant vers une limite finie est convergente et sa limite est la somme des limites.*
2. *Le produit de deux suites convergeant vers une limite finie est convergent et sa limite est le produit des limites.*

Démonstration : Pour nous ramener au lemme 1, observons d'abord qu'une suite (u_n) a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n - l)$ tend vers 0.

1. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l', alors $(u_n - l)$ et $(v_n - l')$ convergent vers 0. Donc $(u_n - l + v_n - l')$ converge vers 0 d'après le point *1.* du lemme 1, d'où le résultat.

2. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l', nous voulons montrer que $(u_nv_n - ll')$ converge vers 0. Ecrivons :

$$u_nv_n - ll' = u_n(v_n - l') + (u_n - l)l' \ .$$

Il suffit donc de montrer séparément que les deux suites $(u_n(v_n - l'))$ et $((u_n - l)l')$ tendent vers 0, d'après le premier point du lemme 1. Mais chacune de ces deux suites est le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée ((u_n) est bornée car elle est convergente). D'où le résultat, par le point *2.* du lemme 1.

$\square$

Le théorème 1 est l'outil de base pour étudier des convergences de suites à partir des exemples classiques de la section précédente. On utilise aussi la composition par une fonction continue. On peut donner deux définitions équivalentes de la continuité, dont l'une est parfaitement adaptée aux suites convergentes.

Définition 7. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x un réel. On dit que f est* continue au point x *si et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers x, la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$.*

Toutes les fonctions qui interviennent dans ce cours sont continues en tout point où elles sont définies, et nous le supposerons pour l'instant. Par exemple, la fonction $f \ : x \mapsto 1/x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Donc si une suite (u_n) converge vers $l \neq 0$, la suite des inverses $(1/u_n)$ converge vers $1/l$. En utilisant le théorème 1, on en déduit que le quotient de deux suites convergentes converge vers le quotient des limites, pourvu que la limite du dénominateur soit non nulle.

Voici un exemple de calcul de limite, résumant l'ensemble des techniques que nous avons vues jusqu'ici. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$u_n = \frac{2n + \cos(n)}{n\sin(1/n) + \sqrt{(n+1)(n+2)}} \ .$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n :

$$u_n = \frac{2 + \frac{\cos(n)}{n}}{\sin(1/n) + \sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}} \ .$$

Les suites $(\frac{1}{n})$, $(\frac{2}{n})$, $(\sin(1/n))$ et $(\frac{\cos(n)}{n})$ tendent vers 0. On en déduit que (u_n) tend vers 2.

Si la limite de (u_n) ou celle de (v_n) est infinie, différentes situations peuvent se produire pour la somme et le produit. Nous les résumons dans les tableaux 1 et 2. Dans ces deux tableaux les points d'interrogations sont des indéterminations : tous les cas sont possibles. Par exemple :

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

TABLE 1 – *Limites possibles de $(u_n + v_n)$ en fonction des limites de (u_n) et (v_n).*

- $u_n = n$, $v_n = -n + 1/n$: la suite $(u_n + v_n)$ tend vers 0 ;
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$;
- $u_n = n$, $v_n = -n + (-1)^n$: la suite $(u_n + v_n)$ ne converge pas.

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

TABLE 2 – *Limites possibles de $(u_n v_n)$ en fonction des limites de (u_n) et (v_n).*

1.4 Convergence des suites monotones

La notion de limite est très liée aux notions de borne supérieure (plus petit des majorants) et borne inférieure (plus grand des minorants). Etant donnée une suite (u_n), nous appellerons borne supérieure et borne inférieure de (u_n) les quantités

$$\sup\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \inf\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Théorème 2.

1. *Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.*
2. *Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
3. *Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.*
4. *Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Démonstration : Rappelons que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie. Si l'ensemble $\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, il admet une borne supérieure finie : notons-la l. Puisque l est le plus petit des majorants, pour tout $\varepsilon > 0$, $l-\varepsilon$ n'est pas un majorant. Donc il existe n_0 tel que $l-\varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant l$. Mais si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$l-\varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant l \;,$$

donc (u_n) converge vers l.

Si la suite n'est pas majorée, pour tout A, il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant A$. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$A \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \;,$$

donc la suite (u_n) tend vers l'infini.

Si la suite (u_n) est décroissante, on applique ce qui précède à la suite croissante $(-u_n)$. □

Définition 8. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Elles sont dites* adjacentes *si*

1. *(u_n) est croissante,*
2. *(v_n) est décroissante,*
3. *$(v_n - u_n)$ tend vers 0.*

Proposition 2. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Démonstration : Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, alors (v_n-u_n) est décroissante. Si (v_n-u_n) tend vers 0, alors pour tout n, $v_n-u_n \geqslant 0$. Donc

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0 \;.$$

La suite (u_n) est croissante, et majorée par v_0, donc elle converge. La suite (v_n) est décroissante, et minorée par u_0, donc elle converge. Comme la différence tend vers 0, les deux limites sont égales (théorème 1). □

Voici un exemple très classique. Posons :

$$u_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!} \;.$$

La suite (u_n) est strictement croissante car $u_{n+1}-u_n = 1/(n+1)! > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n\,n!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \;.$$

La différence v_n-u_n tend vers 0, donc les deux suites convergent vers la même limite. Cette limite est le nombre $\mathrm{e} \simeq 2.718$. Les deux suites fournissent un encadrement extrêmement précis de e, pour un nombre de termes calculés relativement faible. Pour $n=10$, la différence v_n-u_n vaut $2.76\,10^{-8}$, et pour $n=100$, elle vaut $1.07\,10^{-160}$.

Ce même encadrement est aussi un moyen de montrer que e est irrationnel. Supposons en effet que e s'écrive $\mathrm{e} = p/q$, avec p et q entiers. On aurait $u_q < p/q < v_q$, soit :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q\,q!} \;.$$

Multiplions ces inégalités par $(q\,q!)$. Le nombre entier $(p\,q!)$ devrait être encadré strictement par deux entiers consécutifs, ce qui est impossible.

1.5 Comparaison de suites

Le résultat de base pour comparer deux suites est le suivant.

Théorème 3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} v_n \;.$$

Démonstration : Supposons $\lim u_n > \lim v_n$. Alors la limite de la suite $(u_n - v_n)$ est strictement positive. Notons l cette limite. Pour n assez grand, $u_n - v_n \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$, donc $u_n - v_n > 0$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Observons que la conclusion reste vraie si au lieu d'être comparables pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n le sont « à partir d'un certain rang ». Ceci vaut d'ailleurs pour tous les résultats de cette section. Par contre le fait de supposer $u_n < v_n$ implique seulement $\lim u_n \leqslant \lim v_n$: bien que $1/n < 2/n$, les deux suites $(1/n)$ et $(2/n)$ ont la même limite.

Le théorème 3 ne permet pas de démontrer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge. Pour cela, on utilise souvent le résultat suivant.

Théorème 4. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que (v_n) tend vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |v_n|$, alors u_n tend vers 0.*

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$:

$$|u_n| \leqslant |v_n| \leqslant \varepsilon \;,$$

d'où le résultat. □

On en déduit le corollaire suivant que l'on trouve dans certains livres sous le nom de « théorème des gendarmes ».

Corollaire 1. *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \;.$$

alors (v_n) converge vers l.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 4 aux deux suites $(w_n - v_n)$ et $(w_n - u_n)$. □

Voici un exemple d'application. Soit

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n+2} \; .$$

Comme $(-1)^n$ vaut $+1$ ou -1, on a l'encadrement suivant.

$$\frac{n-1}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n+2} \; .$$

Les deux bornes de cette double inégalité tendent vers 1, donc $\lim u_n = 1$.

La comparaison vaut aussi pour les limites infinies.

Théorème 5. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.*

1. *Si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.*
2. *Si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.*

Démonstration : Pour tout A, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$:

$$v_n \geqslant u_n \geqslant A \; ,$$

donc v_n tend vers $+\infty$ si u_n tend vers $+\infty$. La démonstration de l'autre affirmation est analogue. □

On dispose d'un vocabulaire adapté à la comparaison des suites.

Définition 9. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels.*

1. *On dit que la suite (u_n) est* dominée *par la suite (v_n) si :*

$$\exists M \in \mathbb{R} \, , \; \forall n \in \mathbb{N} \; , \quad |u_n| \leqslant M|v_n| \; .$$

   On écrit $u_n = O(v_n)$, qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».

2. *On dit que la suite (u_n) est* négligeable *devant la suite (v_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \, , \; \forall n \geqslant n_0 \; , \quad |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n| \; .$$

   On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit « u_n est un petit o de v_n ».

3. *On dit que la suite (u_n) est* équivalente *à la suite (v_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \, , \; \forall n \geqslant n_0 \; , \quad |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n| \; .$$

   On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit « u_n est équivalent à v_n ».

Très souvent, on appliquera ces définitions pour une suite (v_n) non nulle ; dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport u_n/v_n.

Proposition 3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que les v_n sont tous non nuls. Alors :*

1. *(u_n) est* dominée *par (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) est bornée :*

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M\ .$$

2. *(u_n) est* négligeable *devant (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) tend vers 0 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geqslant n_0\ , \quad \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon\ .$$

3. *(u_n) est* équivalente *à (v_n) si et seulement si (u_n/v_n) tend vers 1 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0\,,\ \forall n \geqslant n_0\ , \quad \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon\ .$$

Par exemple :

$$\sqrt{4n^2+1} = O(n)\ ,\ \sqrt{4n^2+1} = o(n^2)\ ,\ \sqrt{4n^2+1} \sim 2n\ .$$

L'équivalent de $n!$ donné par la formule de Stirling est souvent utile :

$$n! \ \sim\ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ .$$

Observons que $u_n = o(v_n)$ entraîne $u_n + v_n \sim v_n$, ce qui permet de calculer les équivalents de toutes les fonctions polynomiales de n. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $u_n \sim v_n$, et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$. Voici un exemple.

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}\ .$$

Comme $1 + n = o(n^2)$, $n^2 + n + 1 \sim n^2$, donc $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8n^3+n^2} \sim 2n$, donc $\lim u_n = 1/2$.

Attention, il ne faut pas utiliser des équivalents pour des sommes. Par exemple :

$$u_n = n + (-1)^n \sim n \quad \text{et} \quad v_n = -n + (-1)^n \sim -n$$

Pourtant, $u_n + v_n$ n'est pas équivalent à 0.

Voici trois résultats de comparaison de suites tendant vers l'infini, à connaître par cœur.

Théorème 6. *Soit a un réel strictement positif et r un réel strictement supérieur à* 1. *Alors :*

1. $r^n = o(n!)$;
2. $n^a = o(r^n)$;
3. $\ln(n) = o(n^a)$.

Démonstration :

1. Ecrivons le rapport de r^n à $n!$ comme suit.
$$\frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{k} \;.$$
La suite $(r/k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc il existe k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $r/k \leqslant 1/2$. Donc pour $n \geqslant k_0$:
$$\frac{r^n}{n!} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{r}{k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0} \;.$$
La suite $(1/2)^{n-k_0}$ tend vers 0, d'où le résultat.
2. Posons $r = 1 + h$, avec $h > 0$, et écrivons la formule du binôme de Newton :
$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \;.$$
Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on peut minorer r^n par $\binom{n}{k}h^k$. Fixons $k = \lfloor a \rfloor + 1$. Pour $n > 2k$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ peut être minoré comme suit.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{1}{k!} \;.$$
Donc pour tout $n > 2k$:
$$\frac{n^a}{r^n} < \left(\frac{2^k k!}{h^k}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^{k-a} \;.$$
Le membre de droite tend vers 0, car par définition $k = \lfloor a \rfloor + 1 > a$.
3. Pour tout $n > 0$, posons :
$$k_n = \lfloor \ln(n) \rfloor \quad \text{et} \quad \alpha_n = \ln(n) - k_n \;.$$
La suite (k_n) est une suite d'entiers qui tend vers l'infini, car $k_n > \ln(n) - 1$. Les α_n sont des réels compris entre 0 et 1. Ecrivons :
$$\frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{k_n + \alpha_n}{\mathrm{e}^{a(k_n+\alpha_n)}} \leqslant \frac{k_n}{(\mathrm{e}^a)^{k_n}} + \frac{1}{(\mathrm{e}^a)^{k_n}} \;.$$

Dans le membre de droite, le premier terme peut-être vu comme une suite extraite de la suite n/r^n, avec $r = \mathrm{e}^a$. Nous avons vu que cette suite tend vers 0 au point 2. Donc toute suite extraite tend aussi vers 0. Le dénominateur du second terme tend vers l'infini. Donc $\ln(n)/n^a$ est majoré par la somme de deux suites qui convergent vers 0. D'où le résultat.

□

Il est bon d'avoir en tête une échelle des « infiniment petits » et des « infiniment grands », c'est-à-dire des suites qui tendent vers 0 ou vers $+\infty$. Pour présenter ces échelles sous forme synthétique, nous utilisons la notation $u_n \ll v_n$, qui est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

1. *Infiniment petits*

$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln(\ln(n))} \ll 1$$

2. *Infiniment grands*

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n!$$

1.6 Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = F(u_n) \ .$$

La suite est celle des itérés successifs de l'application F à partir de u_0 :

$$u_1 = F(u_0), u_2 = F(F(u_0)) = F \circ F(u_0), u_3 = F \circ F \circ F(u_0), \ldots$$

On notera $F^{\circ n}$ la composée de F avec elle-même n fois :

$$u_n = F^{\circ n}(u_0) = F \circ F \circ \ldots \circ F(u_0) \ .$$

Il existe un moyen simple de visualiser les premiers termes de la suite $(F^{\circ n}(u_0))$ à partir du graphe de la fonction F, représenté dans le plan. Portons u_0 en abscisse et traçons le segment vertical allant de $(u_0, 0)$ à $(u_0, F(u_0))$. Traçons ensuite le segment horizontal rejoignant la première bissectrice, de $(u_0, F(u_0))$ à $(F(u_0), F(u_0))$. L'abscisse du nouveau point est u_1. On itère alors le procédé en traçant alternativement des segments verticaux et horizontaux. On obtient ainsi une sorte de « toile d'araignée » (figure 2).

Cette représentation graphique suffit pour se faire une idée du comportement qualitatif d'une suite récurrente réelle. Elle permet de détecter les convergences ou divergences ainsi que les comportements oscillants.

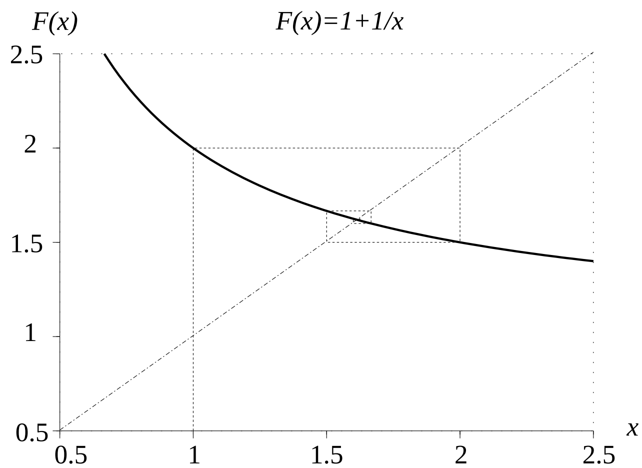

FIGURE 2 – *Représentation d'itérés successifs par une « toile d'araignée ».*

Pour étudier la suite (u_n), le premier travail consiste à identifier les limites possibles. Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n+1}), qui est une suite extraite, converge vers la même limite l. Donc, si F est continue en l (définition 7), on doit avoir :

$$l = F(l) \ .$$

On dit que l est un *point fixe* de F, car si $u_0 = l$, alors la suite est constante. Il peut se faire que F ait plusieurs points fixes. Le comportement de la suite u_n (monotonie, convergence ou non vers un point fixe), dépend de u_0.

Plutôt qu'une discussion générale, nous allons traiter l'exemple historique sans doute le plus célèbre : les rapports des nombres de Fibonacci. Les nombres de Fibonacci sont définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, et pour $n \geqslant 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ .$$

Voici les 20 premiers.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$$

La suite (a_n) est une suite croissante d'entiers, elle ne s'annule pas. Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = a_{n+1}/a_n$. La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$, et pour $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \ .$$

C'est une récurrence du type $u_{n+1} = F(u_n)$, avec

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} \ .$$

La figure 2 représente les premières valeurs de u_n en toile d'araignée. Pour étudier (u_n), commençons par chercher les points fixes de l'application F, en résolvant l'équation

$$1 + \frac{1}{x} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 0 \ .$$

L'équation a deux solutions,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ .$$

La première solution, $\phi \simeq 1.618$, est le célèbre nombre d'or ; on le retrouve (paraît-il) un peu partout, des pyramides d'Egypte aux coquilles de nautiles en passant par la Joconde. Comme u_n reste positif, la seule limite possible pour (u_n) est ϕ. Nous allons démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 4.

1. *La suite des termes pairs (u_{2k}) est croissante*
2. *La suite des termes impairs (u_{2k+1}) est décroissante*
3. *Chacune de ces deux suites converge vers ϕ (elles sont adjacentes).*

En d'autres termes, les termes u_n approchent ϕ, alternativement à gauche et à droite.

Démonstration : En soustrayant les deux équations

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \quad \text{et} \quad \phi = 1 + \frac{1}{\phi} \ ,$$

on obtient :

$$u_{n+1} - \phi = \frac{\phi - u_n}{u_n \phi} \ .$$

Comme $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - \phi$ et $u_n - \phi$ sont de signe opposé. Puisque $u_0 < \phi$, on obtient par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$:

$$u_{2k} < \phi < u_{2k+1} \; .$$

On peut aussi exprimer $u_{n+2} - \phi$ en fonction de $u_n - \phi$:

$$u_{n+2} - \phi = \frac{u_n - \phi}{\phi^2(u_n + 1)} \; .$$

Or $u_n > 0$, $\phi > 1$, $u_0 < \phi$ et $u_1 > \phi$. On en déduit par récurrence que pour les termes pairs :

$$0 < \phi - u_{2k+2} < \frac{1}{\phi^2}(\phi - u_{2k}) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(\phi - u_0) \; .$$

Pour les termes impairs :

$$0 < u_{2k+3} - \phi < \frac{1}{\phi^2}(u_{2k+1} - \phi) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(u_1 - \phi) \; .$$

Donc la suite des termes pairs est croissante et la suite des termes impairs décroissante. Mais de plus :

$$\phi - u_{2k} = O(\phi^{-2k}) \quad \text{et} \quad u_{2k+1} - \phi = O(\phi^{-2k}) \; .$$

Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent vers ϕ, car $\phi > 1$, donc ϕ^{-2k} tend vers 0. □

1.7 Suites de Cauchy

Est-il possible de savoir si une suite converge (vers une limite finie), sans connaître sa limite ? La notion de suite de Cauchy répond à cette question. Elle traduit l'idée intuitive que les termes d'une suite convergente doivent être proches les uns des autres à partir d'un certain rang.

Définition 10. *Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est une* suite de Cauchy *si pour tout $\varepsilon > 0$ les distances entre termes $|u_{n+k} - u_n|$ sont inférieures à ε à partir d'un certain rang :*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \, , \; \forall n \geqslant n_0 \, , \; \forall k \in \mathbb{N} \, , \quad |u_{n+k} - u_n| \leqslant \varepsilon \; .$$

Il n'est pas surprenant qu'une suite convergente soit une suite de Cauchy.

Théorème 7. *Si une suite de réels converge vers une limite finie, alors c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration : En utilisant l'inégalité triangulaire, écrivons :

$$|u_{n+k} - u_n| = |u_{n+k} - l + l - u_n| \leqslant |u_{n+k} - l| + |l - u_n| \; .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon/2$, donc aussi $|u_{n+k} - l| \leqslant \varepsilon/2$. On a donc, pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leqslant |u_{n+k} - l| + |l - u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

□

L'intérêt de cette notion est qu'elle *caractérise* les suites réelles convergentes : la réciproque du théorème précédent est vraie dans $\mathbb{R}$.

Théorème 8. *Dans* $\mathbb{R}$*, toute suite de Cauchy converge.*

Nous donnerons une démonstration de ce théorème en complément du cours (section 3.2).

1.8 Suites à valeurs complexes

On étend aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ toutes les propriétés des suites de réels, sauf celles qui font référence à l'ordre. On ne parle pas de suite complexe croissante, décroissante, majorée ou minorée, car contrairement à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ n'est pas naturellement muni d'une relation d'ordre. Pour les propriétés où la distance $|x - y|$ intervient, la valeur absolue est remplacée par le module, qui se note de la même façon. Par exemple une suite (z_n) est bornée si pour tout n, $|z_n| \leqslant M$. Elle converge vers $l \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \, , \; \forall n \geqslant n_0 \; , \quad |z_n - l| \leqslant \varepsilon \; ,$$

qu'il faut comprendre comme « tous les termes de la suite restent dans un disque de rayon ε autour de la limite à partir d'un certain rang » (voir la figure 3 pour une illustration).

Le théorème suivant montre que la convergence d'une suite de complexes équivaut à la convergence de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Théorème 9. *Soit* (z_n) *une suite de complexes. La suite* (z_n) *converge vers* l *dans* $\mathbb{C}$ *si et seulement si les suites* $(\mathrm{Re}(z_n))$ *et* $(\mathrm{Im}(z_n))$ *convergent respectivement vers* $\mathrm{Re}(l)$ *et* $\mathrm{Im}(l)$*.*

Démonstration : Elle est essentiellement basée sur l'encadrement suivant entre le module d'un nombre complexe et les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire. Soit $z = a + ib$ un complexe, alors

$$\max\{|a|, |b|\} \leqslant |z| \leqslant |a| + |b| \tag{1}$$

On note a_n et b_n la partie réelle et la partie imaginaire de z_n. Si $|z_n - l|$ reste inférieur à ε, alors il en est de même pour $|a_n - \mathrm{Re}(l)|$ et $|b_n - \mathrm{Im}(l)|$, par la première inégalité de

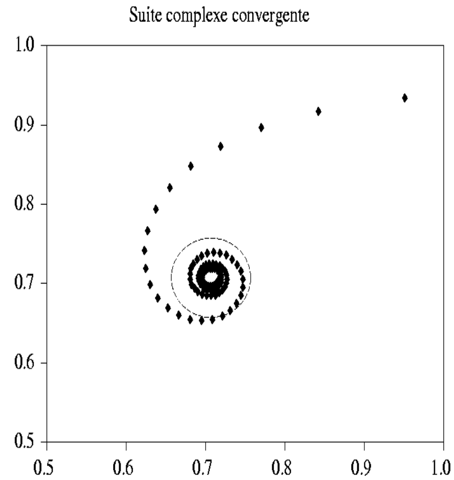

Figure 3 – *Convergence dans* $\mathbb{C}$ *de la suite* $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n/4}/n)$.

(1). Réciproquement, si $|a_n - \mathrm{Re}(l)|$ et $|b_n - \mathrm{Im}(l)|$ sont inférieurs à $\varepsilon/2$, alors $|z_n - l|$ est inférieur à ε, par la seconde inégalité de (1). □

Posons par exemple

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n/4}}{n} .$$

Les parties réelle et imaginaire sont :

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\cos(n/4)}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sin(n/4)}{n}$$

Les deux suites convergent vers $\sqrt{2}/2$, et (z_n) converge vers $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. La figure 3 représente dans le plan complexe les 100 premiers termes de la suite (z_n), ainsi que le cercle de rayon $\varepsilon = 0.05$ centré en $l = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si x est rationnel, la suite des décimales de x est périodique.
2. ☒ Si x est décimal, la suite des décimales de x est constante à partir d'un certain rang.
3. ☒ Toute suite récurrente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, est périodique à partir d'un certain rang.
4. ☐ Si F est une application croissante, la suite $(F^{\circ n}(u_0))$ est croissante.
5. ☒ Si f est une application croissante, la suite $(f(n))$ est croissante.
6. ☒ Si P est une application polynôme, la suite $(P(n))$ est monotone à partir d'un certain rang.
7. ☐ La suite $(\mathrm{e}^{ni\pi/4})$ est périodique de période 4.
8. ☒ La suite $((-1)^k)$ est une suite extraite de la suite $(\mathrm{e}^{ni\pi/4})$.
9. ☒ On peut extraire de la suite $(\mathrm{e}^{ni\pi/4})$ une sous-suite constante.

Vrai-Faux 2. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Toute suite croissante et minorée tend vers $+\infty$.
2. ☒ Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
3. ☒ Toute suite croissante et bornée converge.
4. ☐ Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. ☒ Si la suite des décimales de x converge, alors x est un nombre rationnel.
6. ☐ Si $r \leqslant 1$ alors $(\cos(n)\, r^n)$ tend vers 0.
7. ☒ Si $r < 1$ alors $(\cos(n)\, r^n)$ tend vers 0.

Vrai-Faux 3. Soit (u_n) une suite de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si (u_n) tend vers 0, alors pour tout n, $u_n < 1$.
2. ☒ Si (u_n) tend vers 0, alors $u_n < 1$ pour n assez grand.
3. ☒ Si (u_n) tend vers 2, alors $u_n > 1$ pour n assez grand.
4. ☒ Si (u_n) tend vers 0 alors $(\cos(n)\, u_n)$ tend vers 0.
5. ☐ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\, u_n)$ tend vers 1.

6. ☒ Si (u_n) tend vers 1 alors $(\cos(n)\, u_n)$ est bornée.
7. ☐ Si la suite $(|u_n|)$ converge vers l, alors la suite (u_n) converge vers l ou vers $-l$.
8. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.
9. ☒ Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n^2}) converge vers l.
10. ☒ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^2) converge vers 1.
11. ☐ Si la suite (u_n) converge vers 1, alors la suite (u_n^n) converge vers 1.

Vrai-Faux 4. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si pour tout n, $(u_n) \geqslant \sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. ☐ Si pour tout n, $(u_n) \geqslant -\sqrt{n}$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.
3. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) tendent vers 1, alors (v_n) tend vers 1.
4. ☐ Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) converge.
5. ☒ Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) est bornée.
6. ☒ Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
7. ☐ Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
8. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors (u_n/v_n) est bornée.
9. ☐ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.
10. ☒ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$.

Vrai-Faux 5. Soit (u_n) une suite de réels croissante et non majorée. Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi) :

1. ☒ La suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang.
2. ☐ La suite (u_n^2) est croissante.
3. ☒ La suite $(\sqrt{|u_n|})$ tend vers $+\infty$.
4. ☒ La suite $(\exp(-u_n))$ tend vers 0.
5. ☐ La suite $(1/u_n)$ est décroissante.

Vrai-Faux 6. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ $n2^n = O(2^n)$.
2. ☒ $2^{n+1} = O(2^n)$.
3. ☐ $2^{n^2+n} = O(2^{n^2})$.
4. ☒ $n2^n = o(3^n)$.

5. $\square$ $n2^n/\sqrt{n+1} = O(2^n)$.
6. $\boxtimes$ $n2^n/\sqrt{n^2+1} \sim 2^n$.
7. $\square$ $3^n/n = O(2^n)$.
8. $\boxtimes$ $2^n/n = o(2^n)$.
9. $\square$ $n2^{-n} = O(2^{-n})$.
10. $\boxtimes$ $n3^{-n} = o(2^{-n})$.
11. $\square$ $n2^{-n}/\sqrt{n+1} = O(2^{-n})$.
12. $\boxtimes$ $n2^{-n}/\sqrt{n^2+1} \sim 2^{-n}$.
13. $\boxtimes$ $3^{-n}/n = O(2^{-n})$.
14. $\boxtimes$ $2^{-n}/n = o(2^{-n})$.

2.2 Exercices

Exercice 1. On considère les suites (u_n) définies par :

$$u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\ , \quad u_n = \frac{2n+3}{2n+1}\ , \quad u_n = \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\ ,$$

$$u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1}\ , \quad u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1}\ , \quad u_n = \frac{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+n+1}\ .$$

Pour chacune de ces suites :

1. Montrer qu'elle converge vers 1.
2. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer en fonction de ε le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit :

1. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}\ .$$
2. $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}\ .$$
3. $$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}\ .$$
4. $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\ , \quad u_n = s_{2n+1} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n}\ .$$

5.
$$u_0 = a > 0 \ , \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \ , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ .$$

6.
$$u_0 = a > 0 \ , \quad v_0 = b > a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ , \quad v_{n+1} = \frac{2}{1/u_n + 1/v_n} \ .$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite de réels.

1. Montrer que si les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.
3. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent, alors (u_n) converge.
4. Montrer par un exemple que les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) et (u_{n^2}) peuvent converger sans que (u_n) converge.

Exercice 4. Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :
$$\frac{\ln n}{n} = o(\frac{1}{\sqrt{n}}) \ , \quad \frac{n^2 \ln n}{2^n} = o(\frac{1}{n^4}) \ , \quad \frac{10^n}{n!} = o((3/2)^{-n}) \ .$$
2. Suites tendant vers $+\infty$:
$$10^n = o(\frac{\sqrt{n!}}{(4/3)^n}) \ , \quad n^4\, 2^{n^2} = o((6/5)^{n^3}) \ , \quad (\ln n)^4 \sqrt{n} = o(n^2 \ln(\ln n)) \ .$$

Exercice 5. Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :
$$\frac{\ln(n^2 + n)}{n} = O(\frac{\ln(n)}{n}) \ , \quad \frac{n^2 + \ln(n^2)}{(2n+1)^3} = O(\frac{1}{n}) \ , \quad \frac{3}{2^{2n+1} + n^4} = O(4^{-n}) \ .$$
2. Suites tendant vers $+\infty$:
$$\frac{2n + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n+3}} = O(n^{2/3}) \ , \quad \ln(n^2 + 2n + 3) = O(\ln(n)) \ , \quad \frac{4n^2 + 3n\cos(n)}{5n - \sin(n+3)} = O(n) \ .$$

Exercice 6. Démontrer les relations de comparaison suivantes.

1. Suites tendant vers 0 :

$$\frac{4n^3-\sqrt{n^5+3n^4}}{(\sqrt{2}n+\sqrt{n})^4}\sim\frac{1}{n}\ ,\quad \frac{\ln(2^{n+\sqrt{n}})}{\ln(2^{n\sqrt{n}})}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\ ,\quad \frac{\sqrt[3]{n^2+2n\cos(n)}}{\sqrt{n^3+n^2\sin(n)}}\sim n^{-5/6}\ .$$

2. Suites tendant vers $+\infty$:

$$\frac{2n+\ln(n^3)}{\sqrt{4n+5}}\sim\sqrt{n}\ ,\quad \frac{\ln(2^{n^2+3n})}{\ln(2^{n\sqrt{n}}}\sim\sqrt{n}\ ,\quad \frac{\sqrt[3]{n^2+2n\cos(n)}}{\sqrt{n+\sin(n)}}\sim\sqrt[6]{n}\ .$$

Exercice 7. Démontrer les résultats suivants.

1.
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\sqrt{\mathrm{e}}\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{1/2}}\right)^n=+\infty\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1\ .$$

2.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2^n}{n^6+2^{3n}}=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}+(-1)^n}{n^{-3}+(-1)^{3n}}=1\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1/2}+(-1/2)^n}{n^{-3}+(-1/2)^{3n}}=+\infty\ .$$

3.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}=1\ .$$

4.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3-n^2}=+\infty\ ,\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}=1\ .$$

5.
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}=-1\ .$$

Exercice 8. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$, si pour tous réels a,b tels que $a<b$, $A\cap]a,b[\neq\emptyset$.

1. Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Montrer que si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors l'intervalle $]a,b[$ contient une infinité d'éléments de A.
2. Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$, et x un réel quelconque. Montrer que x est la limite d'une suite d'éléments de A. Indication : considérer les intervalles $]x-1/n,x+1/n[$, pour $n\in\mathbb{N}$.
3. Réciproquement, soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que tout réel soit limite d'une suite d'éléments de A. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$c_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$$

la moyenne arithmétique des n premiers termes. La suite (c_n) est appelée « suite des moyennes de Cesaro » de (u_n).

1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (c_n) converge aussi vers 0.
2. En déduire que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (c_n) converge aussi vers l.
3. Pour $u_n = (-1)^n$, montrer que (c_n) tend vers 0.
4. Soit (u_n) une suite de réels telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers l. Montrer que la suite (u_n/n) converge également vers l.
5. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite (u_{n+1}/u_n) converge vers $l > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge également vers l.

Exercice 10. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x^3}{4}\ .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -3$, $u_0 = -1$, $u_0 = 1$, $u_0 = 3$.
2. Déterminer les points fixes de F.
3. Montrer que $F([0, 2]) \subset [0, 2]$ et que $F([-2, 0]) \subset [-2, 0]$.
4. Montrer que (u_n) est décroissante, pour tout $u_0 \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[$, croissante pour tout $u_0 \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$.
5. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 11. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \sqrt{2 + x}\ .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 3$. Montrer que 2 est le seul point fixe de F.
2. Pour $u_0 \in [-2, 2[$, montrer que (u_n) est croissante, et tend vers 2.
3. Pour $u_0 > 2$, montrer que (u_n) est décroissante, et tend vers 2.
4. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 12. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1} .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = -1$, puis $u_0 = 1$. Montrer que 0 est le seul point fixe de F.
2. On suppose $u_0 < 0$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers 0.
3. On suppose $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) est décroissante et tend vers 0.

Exercice 13. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x + x^2) .$$

1. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = 1/2$, $u_0 = 2$, $u_0 = -1/2$. Déterminer les points fixes de F. Montrer que $F([0,1]) \subset [0,1]$ et que $F([-1,0]) \subset [-1,0]$.
2. On suppose $u_0 \in [0,1[$. Montrer que (u_n) est décroissante et donner sa limite.
3. On suppose $u_0 > 1$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
4. On suppose $u_0 \in [-1,0]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant 2^{-n}$. En déduire que (u_n) tend vers 0.
5. On suppose $u_0 < -1$. Montrer qu'on peut se ramener aux trois cas précédents. Donner la limite de (u_n) selon les valeurs de u_0.

Exercice 14. Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, et pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n+1} .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{n+1} .$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 1 + \frac{a-1}{n!} .$$

Exercice 15. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 2n^2 - 2}{n^2} .$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

Exercice 16. Soit a un réel et r un réel non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N} , \quad u_{n+1} = r\, u_n + a .$$

1. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique de raison r.
2. On pose $\lambda = a/(1-r)$. Montrer que la suite constante dont tous les termes sont égaux à λ est solution de l'équation de récurrence (E).
3. Montrer que la suite $(u_n - \lambda)$ est une suite géométrique.
4. En déduire l'expression suivante de u_n :

$$u_n = \frac{a}{1-r} + \left(u_0 - \frac{a}{1-r}\right) r^n .$$

Exercice 17. On considère l'équation de récurrence qui engendre la suite de Fibonacci :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N} , \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n .$$

1. Soit r un réel. Montrer qu'une suite géométrique de raison r vérifie (E) si et seulement si r est solution de l'équation $r^2 = r + 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $u_n = a\phi^n + b(-1/\phi)^n$, où a et b sont deux réels, et ϕ est le nombre d'or :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad -\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} .$$

   Montrer que la suite (u_n) vérifie l'équation de récurrence (E).
3. Calculer les valeurs de a et b telles que

$$\begin{cases} a + b & = & 1 \\ a\phi - b/\phi & = & 1 \end{cases}$$

4. En déduire l'expression suivante du n-ième nombre de Fibonacci :

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right) .$$

5. À partir de cette expression, retrouver le résultat du cours :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi \ .$$

Exercice 18. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= (a_n - b_n)/2 \\ b_{n+1} &= (a_n + b_n)/2 \ . \end{cases}$$

On pose $z_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\, z_n \ .$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \frac{1}{2^{n/2}}\, \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4} \ .$$

3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite (z_n) converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1.

$\boxed{\text{A}}$ La suite $(n^2 - 2(-1)^n)$ est croissante à partir d'un certain rang.
$\boxed{\text{B}}$ La suite $(n^2 + (-2)^n)$ est croissante à partir d'un certain rang.
$\boxed{\text{C}}$ La suite $(n + (-1)^n)$ est croissante à partir d'un certain rang.
$\boxed{\text{D}}$ La suite $(2n + (-1)^n)$ est croissante.
$\boxed{\text{E}}$ La suite $(3n - 2(-1)^n)$ est croissante à partir d'un certain rang.

Question 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$\boxed{\text{A}}$ Si (u_n) est périodique, alors toute suite extraite de (u_n) est périodique.
$\boxed{\text{B}}$ Si les suites extraites (u_{2k}) et (u_{k^2}) sont bornées, alors (u_n) est bornée.
$\boxed{\text{C}}$ Si (u_n) est croissante, alors toute suite extraite de (u_n) est croissante.
$\boxed{\text{D}}$ Si (u_n) est périodique, alors on peut extraire de (u_n) une suite constante.

$\boxed{\text{E}}$ Si les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont monotones, alors (u_n) est monotone.

Question 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, et l un réel.

$\boxed{\text{A}}$ La suite (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > n_0\ , \quad (u_n - l) \in]-1/k, 1/k[\ .$$

$\boxed{\text{B}}$ La suite (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > n_0\ , \quad -\varepsilon^2 < (u_n - l) < \sqrt{\varepsilon}\ .$$

$\boxed{\text{C}}$ La suite (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > n_0\ , \quad (u_n - l) < \sqrt{\varepsilon}\ .$$

$\boxed{\text{D}}$ La suite (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\forall k > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n > n_0\ , \quad (l - u_n) < 1/k\ .$$

$\boxed{\text{E}}$ La suite (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \exists n > n_0\ , \quad |u_n - l| < \varepsilon\ .$$

Question 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$\boxed{\text{A}}$ Si (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si aucune suite extraite de (u_n) n'est majorée.

$\boxed{\text{B}}$ Si (u_n) ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$, alors (u_n) est bornée.

$\boxed{\text{C}}$ Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

$\boxed{\text{D}}$ Si les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) ne sont pas majorées, alors (u_n) tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{E}}$ Si les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent, alors (u_n) est bornée.

Question 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est non nul.

$\boxed{\text{A}}$ Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) tend vers $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ tend vers 0.

$\boxed{\text{B}}$ Si (u_n) est bornée et (v_n) tend vers $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{C}}$ Si (u_n) est bornée et (v_n) tend vers $+\infty$, alors $(|u_n| v_n)$ tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{D}}$ Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) est majorée, alors $(u_n v_n)$ tend vers 0.

$\boxed{\text{E}}$ Si (u_n) est bornée et (v_n) vers $+\infty$, alors (u_n/v_n) tend vers 0.

Question 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$\boxed{\text{A}}$ Si les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont bornées et monotones, alors la suite (u_n) converge vers une limite finie.

$\boxed{\text{B}}$ Si (u_n) est monotone et bornée, alors les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent vers la même limite finie.

$\boxed{\text{C}}$ Si (u_n) est monotone et converge vers une limite finie, alors les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont adjacentes.

$\boxed{\text{D}}$ Si (u_n) est non majorée, alors les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) tendent vers $+\infty$.

$\boxed{\text{E}}$ Si (u_n) est monotone et non majorée, alors (u_n) est croissante.

Question 7.

$\boxed{\text{A}}$ $n^2\ln(n) = O(n^2)$

$\boxed{\text{B}}$ $n^2\ln(n^2) \sim n^2\ln(n)$

$\boxed{\text{C}}$ $n^2\ln(n) = o(n^3)$

$\boxed{\text{D}}$ $n^2\ln(n) = o(n^2\ln(n^2))$

$\boxed{\text{E}}$ $n^2\ln(n^2) = O(n^2\ln(n))$

Question 8.

$\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{(n+3)^3\,2^n}{(n+2)^2\,3^n} \sim (2/3)^n$

$\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{(n+3)^3\,2^n}{(n+2)^2\,3^n} = o((3/4)^n)$

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{(n+3)^3\,2^n}{(n+2)^2\,2^{2n+1}} = O(2^{-n})$

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{(n+3)^2\,2^n}{(n+2)^2\,2^{2n+1}} \sim 2^{-n}$

$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{(n+3)^2\,2^n}{(n+2)^2\,2^{2n+1}} = O(2^{-n})$

Question 9. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.

$\boxed{\text{A}}$ Quel que soit u_0, la suite (u_n) est monotone.

$\boxed{\text{B}}$ Quel que soit u_0, la suite (u_n) converge vers 0 ou vers 1.

$\boxed{\text{C}}$ Si $u_0 \in \{0, 1\}$, alors la suite (u_n) est constante.

$\boxed{\text{D}}$ Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{E}}$ Si $|u_0| < 1$ alors la suite (u_n) tend vers 0.

Question 10. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs complexes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \quad z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2(1+1/n)} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/8}\ .$$

$\boxed{\text{A}}$ La suite $\mathrm{Re}(z_n)$ tend vers 0.

$\boxed{\text{B}}$ La suite (z_n) converge vers i.

$\boxed{\text{C}}$ La suite $(\mathrm{Arg}(z_n - \mathrm{i}))$ converge.

$\boxed{\text{D}}$ La suite $(\mathrm{Arg}(z_n - \mathrm{i}))$ est périodique.

$\boxed{\text{E}}$ La suite $(|z_n - 1|)$ ne converge pas.

Réponses : 1–AD 2–CD 3–AB 4–AE 5–BE 6–BE 7–CE 8–BE 9–CE 10–AB

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

1. Quand dit-on que la suite (u_n) est *croissante à partir d'un certain rang* ?
2. Quand dit-on que la suite (u_n) est *majorée* ?
3. Quand dit-on que la suite (u_n) *tend vers* $+\infty$?
4. Démontrer que si la suite (u_n) est majorée à partir d'un certain rang, alors elle est majorée.
5. Démontrer que si la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Exercice 1 : Dans tout l'exercice, k désigne un entier strictement positif, et δ un réel tel que $0 < \delta < 1$.

1. Démontrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = 1 \ .$$
2. En déduire que la suite $(n^k/(n+1)^k)$ est minorée par $1-\delta/2$, à partir d'un certain rang.
3. Pour tout $n \geq 1$, on pose :
$$u_n = \frac{(1+\delta)^n}{n^k} \ .$$
Montrer que la suite (u_{n+1}/u_n) est minorée par $(1+\delta)(1-\delta/2)$ à partir d'un certain rang. En déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que pour tous réels β_0, β_1 tels que $1 < \beta_0 < \beta_1$, $\beta_0^n = o(\beta_1^n)$.
5. Déduire des questions précédentes que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $\beta > 1$, $n^k = o(\beta^n)$.
6. Démontrer les relations de comparaison suivantes.
$$n^{100} = o(1.01^n) \ , \quad 2^{-n} = o(n^{-10}) \ , \quad \frac{2^{n+1}+n^{10}}{2^{2n+3}+(n+4)^5} = O(2^{-n}) \ .$$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$, avec :
$$F(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 \ .$$

1. Montrer que le seul point fixe de F est 4.

2. Représenter le graphe de F. Utiliser les diagrammes en toile d'araignée pour deviner le comportement de la suite (u_n) pour $u_0 = 0.2$, et $u_0 = 5.5$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sqrt{u_{n+1}} - 2 = \frac{3}{2(\sqrt{u_{n+1}} + 2)}(\sqrt{u_n} - 2) \; .$$
4. Montrer que si $u_0 \in [0, 4[$, alors pour tout $n \geq 0$, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} < 4$.
5. En déduire que si $u_0 \in [0, 4[$, alors la suite (u_n) converge vers 4.
6. Montrer que si $u_0 \in]4 + \infty[$, alors pour tout $n \geq 0$, $4 < u_{n+1} < u_n$.
7. En déduire que si $u_0 \in]4, +\infty[$, alors la suite (u_n) converge vers 4.
8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|\sqrt{u_{n+1}} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|\sqrt{u_n} - 2| \; .$$
9. En déduire que $|u_n - 4| = O(2^{-n})$.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. On dit que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang si :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\; \forall n \geqslant n_0 \;, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \; .$$
Ceci équivaut à :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\; \forall n \geqslant n_0 \,,\; \forall k \in \mathbb{N} \;, \quad u_{n+k} \geqslant u_n \; .$$
(Démonstration par récurrence sur k.)
2. On dit que la suite (u_n) est majorée si :
$$\exists M \in \mathbb{R} \,,\; \forall n \in \mathbb{N} \;, \quad u_n \leqslant M \; .$$
3. On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R} \,,\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \,,\; \forall n \geqslant n_0 \;, \quad u_n \geqslant A \; .$$
4. Supposons que la suite (u_n) soit majorée par M à partir du rang n_0 :
$$\forall n \geqslant n_0 \;, \quad u_n \leqslant M \; .$$
Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N} \;, \quad u_n \leqslant \max\Big\{ u_0, \ldots, u_{n_0-1}, M \Big\} \; .$$
Donc la suite (u_n) est majorée par $\max\Big\{ u_0, \ldots, u_{n_0-1}, M \Big\}$.

5. Soit n_0 le rang à partir duquel la suite (u_n) est croissante.

$$\forall n \geqslant n_0\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\,,\quad u_{n+k} \geq u_n\ .$$

Si la suite (u_n) n'est pas majorée, elle n'est pas non plus majorée à partir du rang n_0 d'après la question précédente.
Soit A un réel quelconque. Ecrivons que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas majorée par A.

$$\exists n_1 \geq n_0\ ,\quad u_{n_1} \geqslant A\ .$$

Puisque la suite u_n est croissante à partir du rang n_0 et comme $n_1 \geq n_0$,

$$\forall n \geqslant n_1\ ,\quad u_n \geqslant u_{n_1} \geqslant A\ .$$

Donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant n_1\ ,\quad u_n \geqslant A\ .$$

Nous avons donc montré que (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 1 :

1. Ecrivons :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n}\ .$$

Quand n tend vers $+\infty$, $1/n$ tend vers 0, donc $1+1/n$ tend vers 1, donc $1/(1+1/n)$ tend vers 1. Montrons par récurrence que pour tout $k \geq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} = 1\ .$$

C'est vrai pour $k = 1$ d'après ce qui précède. Supposons-le vrai pour k.

$$\frac{n^{k+1}}{(n+1)^{k+1}} = \frac{n^k}{(n+1)^k}\,\frac{n}{n+1}$$

Or le produit de deux suites qui tendent vers 1 tend aussi vers 1. Donc le résultat est vrai pour $k+1$. Il est donc vrai pour tout $k \geq 1$.

2. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\left|\frac{n^k}{(n+1)^k} - 1\right| \leqslant \frac{\delta}{2}\ .$$

En particulier, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{n^k}{(n+1)^k} \geqslant 1 - \frac{\delta}{2}\ .$$

3.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1+\delta)^{n+1}}{(n+1)^k}\,\frac{n^k}{(1+\delta)^n} = (1+\delta)\frac{n^k}{(n+1)^k}\ .$$
En utilisant le résultat de la question précédente, pour $n \geq n_0$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant (1+\delta)(1-\delta/2) = 1+\delta/2-\delta^2/2\ .$$
Posons $1+\delta/2-\delta^2/2 = \alpha$. Par hypothèse, $0<\delta<1$, donc $\delta^2<\delta$, donc $\alpha>1$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$:
$$u_n \geqslant u_{n_0}\alpha^{n-n_0}\ .$$
C'est vrai pour $n = n_0$. Supposons-le vrai pour n. Alors :
$$u_{n+1} \geqslant \alpha u_n \geqslant \alpha u_{n_0}\alpha^{n-n_0} = u_{n_0}\alpha^{n+1-n_0}\ .$$
Comme $\alpha > 1$, la suite géométrique (α^n) tend vers $+\infty$, donc la suite $(u_{n_0}\alpha^{n-n_0})$ tend vers $+\infty$. Donc la suite (u_n) tend aussi vers $+\infty$.

4. Si β_0 et β_1 sont deux réels tels que $1<\beta_0<\beta_1$, alors :
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_0^n}{\beta_1^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^n = 0 \iff \beta_0^n = o(\beta_1^n)\ .$$

5. Le résultat de la question 3 entraîne que pour tout $k\in\mathbb{N}$, et pour tout $\delta\in]0,1[$,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(1+\delta)^n} = 0 \iff n^k = o((1+\delta)^n)\ .$$
Soit $\beta>1$ un réel. De deux choses l'une, soit $\beta<2$ et on applique directement ce qui précède avec $\delta=\beta-1$, soit $\beta\geq 2$. Dans ce dernier cas,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\beta^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(3/2)^n}\,\frac{(3/2)^n}{\beta^n} = 0\,,$$
d'après ce qui précède. Donc $n^k = o(\beta^n)$.

6. Comme cas particuliers, $n^{100} = o(1.01^n)$ et $n^{10} = o(2^n)$. En prenant l'inverse, $2^{-n} = o(n^{-10})$.
Pour la dernière relation de comparaison, écrivons :
$$n^{10} = o(2^n) \implies n^{10} = o(2^{n+1}) \implies (2^{n+1}+n^{10}) \sim 2^{n+1}\ .$$
De façon analogue,
$$(n+4)^5 = o(2^{2n+3}) \implies 2^{2n+3}+(n+4)^5 \sim 2^{2n+3}\ .$$
Donc :
$$\frac{2^{n+1}+n^{10}}{2^{2n+3}+(n+4)^5} \sim \frac{2^{n+1}}{2^{2n+3}} = \frac{1}{4}2^{-n} = O(2^{-n})\ .$$

Exercice 2 :

1. Observons que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}^+$, donc les points fixes éventuels de F sont les solutions positives ou nulles de :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sqrt{x}+1=x &\iff \frac{3}{2}\sqrt{x}=x-1 \\ &\implies 9x=4x^2-8x+4 \\ &\iff (x-4)(4x-1)=0\ . \end{aligned}$$

   Des deux solutions trouvées, seule $x=4$ est telle que $x-1\geq 0$. Donc $x=4$ est le seul point fixe de F.

2. Voir figure 4 : pour $u_0<4$ la suite est croissante et converge vers 4, pour $u_0>4$ la suite est croissante et converge vers 4.

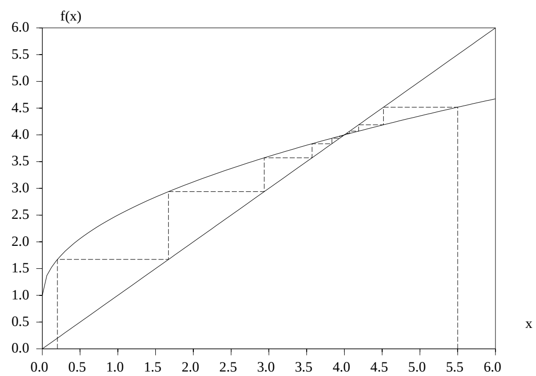

FIGURE 4 – *Suites définies par $u_0\geqslant 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{3}{2}\sqrt{u_n}+1$.*

3. Ecrivons l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n ainsi que la relation exprimant que 4 est point fixe.

$$u_{n+1}=\frac{3}{2}\sqrt{u_n}+1 \quad \text{et} \quad 4=\frac{3}{2}\sqrt{4}+1\ .$$

   Soustrayons les deux :

$$u_{n+1}-4=\frac{3}{2}(\sqrt{u_n}-2) \iff \sqrt{u_{n+1}}-2=\frac{3}{2(\sqrt{u_{n+1}}+2)}(\sqrt{u_n}-2)\ .$$

4. L'expression de F montre que $F(x)$ est toujours supérieur ou égal à 1, donc $u_{n+1}\geq 1$. En utilisant l'identité de la question précédente :

$$2-\sqrt{u_{n+1}}=\frac{3}{2(\sqrt{u_{n+1}}+2)}(2-\sqrt{u_n})\leqslant\frac{1}{2}(2-\sqrt{u_n})\ .$$

Puisque pour tout n, $u_n \geq 0$, on en déduit que $0 \leqslant u_n < u_{n+1} < 4$ équivaut à $\sqrt{u_n} < \sqrt{u_{n+1}} < 2$. Or l'inégalité ci-dessus montre d'une part que $2 - \sqrt{u_{n+1}}$ est positif si $2 - \sqrt{u_n}$ est positif, d'autre part que $2 - \sqrt{u_{n+1}} < 2 - \sqrt{u_n}$. D'où le résultat, par récurrence.

5. D'après la question précédente, si $u_0 \in [0, 4[$, la suite est croissante, et majorée par 4. Donc elle converge, et comme 4 est le seul point fixe, elle converge vers 4.

6. Reprenons le même raisonnement :

$$\sqrt{u_{n+1}} - 2 = \frac{3}{2(\sqrt{u_{n+1}} + 2)}(\sqrt{u_n} - 2) \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - 2)\ .$$

Donc si $\sqrt{u_n} > 2$, alors $\sqrt{u_{n+1}} > 2$, et d'autre part $\sqrt{u_{n+1}} - 2 < \sqrt{u_n} - 2$. Donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$, d'où le résultat.

7. Si $u_0 \in]4, +\infty[$, d'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. Comme 4 est le seul point fixe, la limite est 4.

8. Nous avons déjà vu que pour $0 < u_0 < 4$,

$$0 < 2 - \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(2 - \sqrt{u_n})\ ,$$

et pour $u_0 > 4$,

$$0 < \sqrt{u_{n+1}} - 2 \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - 2)\ ,$$

Dans les deux cas :

$$|\sqrt{u_{n+1}} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|\sqrt{u_n} - 2|\ .$$

9. Nous avons montré que dans tous les cas, la suite (u_n) converge vers 4. Elle est donc bornée, et la suite $|\sqrt{u_n} - 2|$ l'est aussi.

$$|u_n - 4| = |\sqrt{u_n} - 2|\,|\sqrt{u_n} + 2| = O(|\sqrt{u_n} - 2|)\ .$$

Il suffit donc de montrer que $|\sqrt{u_n} - 2| = O(2^{-n})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = |\sqrt{u_n} - 2|/2^{-n}$. Nous devons montrer que la suite (v_n) est bornée. Calculons v_{n+1}/v_n.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|\sqrt{u_{n+1}} - 2|}{|\sqrt{u_n} - 2|}\,\frac{2^{-n}}{2^{-n-1}} \leqslant 1\ ,$$

d'après l'inégalité de la question précédente. La suite (v_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est bornée.

3 Compléments

3.1 Les lapins de Fibonacci

Voici comment Guillaume Libri présente Fibonacci dans son « Histoire des Sciences Mathématiques en Italie ».

> On connaît très peu la vie de cet homme auquel les sciences ont de si grandes obligations, et l'on est réduit à chercher dans ses écrits. Dans la préface [ajoutée en 1228] du premier et du plus important de ses ouvrages (le traité de l'Abbacus) écrit en Latin en 1202 Léonard raconte que son père, étant notaire des marchands pisans à la douane de Bougie, en Afrique [aujourd'hui Béjaïa en Algérie] l'appela auprès de lui et voulut qu'il étudiât l'arithmétique ; et il dit qu'ayant voyagé ensuite en Égypte, en Syrie, en Sicile et en Provence, après avoir appris la méthode indienne, il se persuada que cette méthode était bien plus parfaite que les méthodes adoptées dans ces différentes contrées, et qu'elle était même supérieure à l'algorithme, et à la méthode de Pythagore. Enfin il nous apprend que s'étant occupé plus attentivement de ce sujet, et y ayant ajouté ses propres recherches, et ce qu'il avait pu tirer d'Euclide, il a voulu composer un ouvrage en quinze chapitres pour instruire les Latins dans cette science.

Et d'abord, comment s'appelait-il vraiment ? Lui-même n'était pas constant dans les signatures de ses ouvrages.

> Incipit liber abbaci compositu a Leonardo filio Bonaccii pisano, in anno 1202

> Incipit pratica geometrice composita a Leonardo Bigollosio Fillio Bonacii pisano in anno MCCXXI

Son prénom était donc Léonard, il était de la famille des Bonaccii, et natif de Pise. Bigollosio est probablement un surnom qu'il reprenait à son compte. Voici ce qu'en dit Libri.

> On sait seulement que pour prix des immenses services qu'il avait rendu aux sciences, on lui donna le sobriquet de Bigollone, probablement parce que l'étude des sciences l'absorbait tout entier, et l'empêchait de se livrer au commerce, occupation favorite de ses concitoyens.
>
> [. . .] On trouve dans les manuscrits tantôt Bigollo, tantôt Bigollosus, etc ; mais c'est toujours la même racine du mot Bigollone, employé par les anciens écrivains italiens et qui s'est changé plus tard en Bighellone.

Difficile de suivre Libri : en Italien moderne, bighellone signifie à peu près dilettante, voire pire. Il est peu probable que Fibonacci, s'adressant à ses protecteurs, se soit lui-même qualifié de bon-à-rien ! Il est possible qu'il ait voulu se présenter plutôt comme « voyageur ». En tout cas, le nom Fibonacci n'apparaît pas avant Libri, qui explique :

« Fibonacci est une contraction de filius Bonacci, contraction dont on trouve de nombreux exemples dans la formation des noms de famille toscanes ». Admettons : voilà donc Fibonacci dûment baptisé. La suite de Fibonacci apparaît dans un petit problème du « Liber Abaci », sous le titre « Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur ». Euh : vous préférez peut être lire le texte en Français ?

> *Combien de couples de lapins proviennent d'un même couple en une année.*
>
> Un homme met un couple de lapins dans un endroit fermé par un mur, pour découvrir combien de couples de lapins auront été engendrés à partir du premier couple au bout d'une année : par nature un couple de lapins engendre un autre couple chaque mois, et il commence à se reproduire deux mois après sa naissance. Comme le premier couple se reproduit le premier mois, nous devons doubler : le premier mois il y a donc deux couples. Durant le second mois, le premier des couples engendre un autre couple : donc le second mois il y a 3 couples. Parmi ceux-là 2 s'accouplent, et ainsi engendrent 2 couples durant le troisième mois. Ils sont donc 5 à ce mois-là. Parmi ceux-là 3 s'accouplent et au quatrième mois il y a 8 couples.
>
> [. . .]
>
> Vous pouvez voir de plus sur le côté comment nous avons procédé : nous avons ajouté le premier nombre avec le second, c'est-à-dire 1 et 2 ; le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, le quatrième avec le cinquième etc. jusqu'à ajouter le dixième avec le onzième, c'est-à-dire 144 avec 233 et nous avons obtenu la somme des couples de lapins qui est 377, et donc cela peut être fait indéfiniment pour n'importe quel nombre de mois.

Les livres de Fibonacci (plus de deux siècles avant Gutemberg) n'étaient pas imprimés, et ne l'ont pas été avant le XIX^{e} siècle. Au début du XVII^{e} siècle, la suite de Fibonacci est retrouvée indépendamment par Johannes Kepler (1571–1630) puis par Albert Girard (1595–1632). Dans sa lettre de mai 1608, Kepler raisonne par condition nécessaire pour contruire une suite d'entiers dont les rapports successifs convergent vers le nombre d'or, qu'il appelle la « proportion divine ». Il reprend cette suite dans un petit opuscule offert en étrenne à son protecteur pour le nouvel an 1611 : « L'Étrenne ou la neige sexangulaire ». Voici ce que Girard écrit, parmi les annotations de sa traduction en français des Arithmétiques de Diophante :

> Puis que je suis entré en la matiere des nombres rationaux j'adjousteray encor deux on trois particularitez non encor par cy devant practiquées, comme d'explicquer les radicaux extremement pres, par certains nombres à ce plus aptes & idoines que les autres, tellement que si l'on entreprenoit les mesmes choses par des autres nombres ce ne seroit sans grandement augmenter le nombres des characteres ; & pour exemple soit proposé d'explicquer par des rationaux la raison des segmens de la ligne coupée en la moyenne & extreme raison, soit faicte une telle progression 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, &c. dont chasque nõbre soit egal aux deux precedens, alors deux nombres pris

> immediatemẽt denotteront la mesme raison, comme 5 à 8 ou 8 à 13 &c. & tant plus grands, tant plus pres, comme ces deux 59475986 & 96234155, tellement que 13, 13, 21 constituent assez precisement un triangle Isosceles ayant l'angle du pentagone.

En clair, et même s'il a fait une erreur de calcul, Girard introduit la suite de Fibonacci et affirme comme Kepler que le rapport de deux termes successifs converge vers le nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$. Aucun des deux n'avait de démonstration rigoureuse de la convergence, ni l'expression explicite du n-ième terme de la suite. Cette expression, trouvée par Euler en 1765 est redécouverte par Binet en 1843 et porte depuis le nom de ce dernier. En 1877, Edouard Lucas publie ses « Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure ». Il y expose plusieurs propriétés curieuses de la suite de Fibonacci, liées aux nombres premiers, au triangle de Pascal, etc. Ce n'est que le début d'une longue histoire. Il y a de nos jours de nombreux spécialistes des nombres de Fibonacci, qui organisent des congrès réguliers, et une revue leur est entièrement consacrée.

Quant au nombre d'or, il sera chargé à partir de la fin du XIXe siècle d'une mystique pseudo-scientifique, liée au renouveau des sciences occultes : rares sont les monuments ou les lieux dans lesquel en divisant telle longueur par telle autre, on ne retrouve plus ou moins approximativement le nombre d'or, preuve irréfutable de l'omniprésence d'intelligences supra-humaines.

3.2 Limite sup et limite inf

Quand on définit une notion mathématique, le fait qu'elle refuse de s'appliquer à certains objets la rend aussitôt suspecte. La suite $((-1)^n)$ ne converge pas. Serait-ce que la notion de limite est insuffisante ?

Au contraire de la limite d'une suite, la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble existent toujours (elles peuvent être infinies).

Soit (u_n) une suite de réels. Considérons la suite d'ensembles (U_n) où U_n est défini par :

$$U_n = \{u_m\,,\ m \geqslant n\}\ .$$

Posons alors :

$$\underline{u}_n = \inf U_n \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup U_n\ ,$$

Comme les ensembles U_n sont emboîtés ($U_{n+1} \subset U_n$), la suite $(\underline{u}_n)$ est croissante, donc elle admet une limite (éventuellement infinie), par le théorème 2. Sa limite est la *limite inférieure* de la suite (u_n). La *limite supérieure* est la limite de la suite (décroissante) $\overline{u}_n$.

Définition 11.

1. *On appelle limite inférieure de la suite* (u_n)*, et on note* $\liminf u_n$ *ou* $\underline{\lim}\, u_n$*, la quantité*

$$\liminf u_n = \sup\{\underline{u}_n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{où} \quad \underline{u}_n = \inf\{u_m\,,\ m \geqslant n\}\ .$$

2. *On appelle limite supérieure de la suite* (u_n), *et on note* $\limsup u_n$ *ou* $\overline{\lim}\, u_n$, *la quantité*

$$\limsup u_n = \inf\{\overline{u}_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{où} \quad \overline{u}_n = \sup\{u_m\ ,\ m \geqslant n\}\ .$$

On retient de façon abrégée que

$$\liminf u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geqslant n} u_m \quad \text{et} \quad \limsup u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geqslant n} u_m\ .$$

La $\liminf$ et la $\limsup$ existent pour toute suite réelle. Voici trois exemples.

u_n	$\liminf u_n$	$\limsup u_n$
$\sin(n)$	-1	1
$n\sin(n)$	$-\infty$	$+\infty$
$\sin(n)/n$	0	0

On peut voir la $\liminf$ comme la plus petite limite d'une suite extraite de la suite (u_n), et la $\limsup$ comme la plus grande. Elles peuvent éventuellement être infinies. On peut toujours extraire de (u_n) deux sous-suites qui convergent vers ces deux limites. Elles fournissent une caractérisation de la convergence : une suite converge si et seulement si sa $\liminf$ est égale à sa $\limsup$.

Proposition 5. *Une suite de réels* (u_n) *converge vers* l *si et seulement si*

$$\liminf u_n = \limsup u_n = l\ .$$

Démonstration : Ce résultat reste vrai si la suite tend vers $\pm\infty$. Nous le démontrons pour une limite finie. Rappelons la construction de $\liminf$ et $\limsup$, comme limite des suites $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$, où

$$\underline{u}_n = \inf U_n \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup U_n\ ,$$

avec

$$U_n = \{u_m\ ,\ m \geqslant n\}\ .$$

Démontrons d'abord la condition suffisante. Par construction, la suite (u_n) est encadrée par les suites $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$.

$$\underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n\ .$$

Si les deux suites $(\underline{u}_n)$ et $(\overline{u}_n)$ ont la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite, par le théorème des gendarmes (corollaire 1).

Réciproquement, si la suite (u_n) converge, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les ensembles U_n sont inclus dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, ce qui implique :

$$l - \varepsilon \leqslant \underline{u}_n \leqslant \overline{u}_n \leqslant l + \varepsilon\ .$$

Donc,

$$l - \varepsilon \leqslant \liminf u_n \leqslant \limsup u_n \leqslant l + \varepsilon\ .$$

Cet encadrement étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il entraîne :

$$l = \liminf u_n = \limsup u_n \ .$$

$\square$

Nous avons maintenant les bons outils pour démontrer le théorème 8 :

Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.

Démonstration : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Commençons par montrer que (u_n) est bornée. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leqslant \varepsilon \ .$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{n_0} - \varepsilon \leqslant u_{n_0+k} \leqslant u_{n_0} + \varepsilon \ .$$

La suite (u_n) est bornée à partir du rang n_0, donc bornée tout court. Donc pour tout n, l'ensemble $U_n = \{u_m \ , \ m \geqslant n\}$ est borné et les quantités $\underline{u}_n = \inf U_n$ et $\overline{u}_n = \sup U_n$ sont finies. Nous avons déjà observé que $(\underline{u}_n)$ est une suite croissante et $(\overline{u}_n)$ une suite décroissante, car les ensembles U_n sont emboîtés. Nous allons démontrer que les suites $(\underline{u}_n)$ et $(\overline{u}_n)$ sont adjacentes, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{u}_n - \underline{u}_n = 0 \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+k} - u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_{n_0+k} \leqslant u_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Donc pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n_0} - \varepsilon$ est un minorant de l'ensemble U_n et $u_{n_0} + \varepsilon$ en est un majorant. Par définition des bornes inférieure et supérieure :

$$u_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{u}_n \leqslant \overline{u}_n \leqslant u_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Donc $\overline{u}_n - \underline{u}_n < \varepsilon$, ce que nous voulions démontrer. $\square$

3.3 Dichotomies

Comme application de la proposition 2 (deux suites adjacentes convergent vers la même limite), nous présentons sur deux exemples une technique d'encadrement très efficace, la *dichotomie* (action de partager en deux).

Le premier exemple est un résultat d'existence de point fixe.

Proposition 6. *Soit f une application continue de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même. Alors f admet un point fixe :*

$$\exists a \in [0,1]\;,\quad f(a) = a\;.$$

Démonstration : La démonstration que nous proposons est *constructive* : on peut la transformer en un algorithme pour calculer une valeur approchée du point fixe.

Posons $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. Si $f(u_0) = u_0$, ou si $f(v_0) = v_0$, inutile d'aller plus loin, on a trouvé un point fixe. Sinon, on a forcément $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. Examinons le point $1/2$: si $f(1/2) = 1/2$, le point fixe est trouvé. Si $f(1/2) > 1/2$, on pose $u_1 = 1/2$ et $v_1 = v_0$. Si $f(1/2) < 1/2$, on pose $u_1 = u_0$ et $v_1 = 1/2$. On itère ensuite la construction. Supposons que u_n et v_n ont été construits de sorte que $f(u_n) > u_n$ et $f(v_n) < v_n$. On examine le point $x = (u_n + v_n)/2$: si $f(x) = x$, le point fixe est trouvé. Si $f(x) > x$, on pose $u_{n+1} = x$ et $v_{n+1} = v_n$. Si $f(x) < x$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = x$.

Plaçons nous dans le cas où la procédure se prolonge jusqu'à l'infini (on ne trouve jamais de point fixe). Vu la manière dont elles ont été construites, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $v_n - u_n = 2^{-n}$. Donc elles convergent vers la même limite a. Comme f est continue les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent vers $f(a)$. Par construction, $f(u_n) > u_n$, donc $f(a) \geqslant a$. De même, $f(v_n) < v_n$, donc $f(a) \leqslant a$. Donc $f(a) = a$: a est bien un point fixe. $\square$

Voici un résultat beaucoup plus important, démontré également par dichotomie : le *théorème de Bolzano-Weierstrass*.

Théorème 10. *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration : Soit m un minorant et M un majorant de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}\;,\quad m \leqslant u_n \leqslant M\;.$$

Posons $a_0 = m$ et $b_0 = M$, et $\varphi(0) = 0$. Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et considérons les deux moitiés : l'une au moins contient une infinité de termes de la suite (u_n). Supposons que $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ contienne une infinité de termes de la suite. On note $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, et $\phi(1) > 0$ un entier tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$. Si la première moitié ne contient qu'un nombre fini de termes, on la remplace par l'autre moitié $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $(M-m)/2^k$, et des valeurs extraites $u_{\phi(k)} \in [a_k, b_k]$. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Par le théorème des gendarmes (corollaire 1) la suite $(u_{\varphi(k)})$ converge vers la même limite que (a_n) et (b_n). □

3.4 Fractions continues

Voici une autre situation où l'on rencontre des suites adjacentes comme approximations numériques d'un réel. Nous allons construire par récurrence une suite de rationnels (u_n) qui encadrent un réel x de manière optimale, en un sens qui sera précisé plus loin.

On construit d'abord une suite d'entiers (a_n) de la façon suivante. Soit (a_0) la partie entière de x. On calcule l'inverse de la partie décimale, $1/D(x)$ qui est un réel supérieur à 1. On note a_1 sa partie entière. On itère ensuite le procédé, en prenant pour chaque entier la partie entière de l'inverse de la partie décimale. Voici ce que cela donne pour $x = \pi$.

$$\begin{array}{lll}
a_0 = \lfloor \pi \rfloor & = 3 & d_0 = \pi - a_0 \\
a_1 = \lfloor 1/d_0 \rfloor & = 7 & d_1 = 1/d_0 - a_1 \\
a_2 = \lfloor 1/d_1 \rfloor & = 15 & d_2 = 1/d_1 - a_2 \\
a_3 = \lfloor 1/d_2 \rfloor & = 1 & d_3 = 1/d_1 - a_3 \\
a_4 = \lfloor 1/d_3 \rfloor & = 292 & d_4 = 1/d_3 - a_4 \\
a_5 = \lfloor 1/d_4 \rfloor & = 1 & d_5 = 1/d_4 - a_5
\end{array}$$

Vous pourrez vérifier que la suite (a_n) associée à $\sqrt{2}$ est $(1, 2, 2, 2, \ldots)$. La suite associée au nombre d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ est $(1, 1, 1, 1, \ldots)$.

La suite des entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant donnée, on fabrique une suite de rationnels u_n en reprenant le processus à l'envers.

$$u_0 = a_0\,,\ u_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}\,,\ u_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}\ .$$

Le terme général u_n est

$$u_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Le terme « fraction continue » est assez clair. Il n'y a pourtant pas de rapport direct avec les fonctions continues. Il vaudrait mieux dire, comme en anglais, « fraction continuée ».

Voici les premiers termes de la suite (u_n) pour $x = \pi$, et la valeur numérique de $\pi - u_n$. Le premier terme $u_1 = 22/7$ était déjà connu d'Archimède comme approximation de

π. Le troisième, 355/113 a été proposé par Adrien Métius en 1624. Les Chinois, tel Zu Zhong Chi au V[e] siècle, connaissaient ces deux approximations. L'exemple tel que nous le présentons, figure dans un texte écrit par Leonhard Euler (1707-1783) en 1748.

n	u_n	$\pi - u_n$
0	3	0.1415926535
1	$\frac{22}{7}$	−0.0012644893
2	$\frac{333}{106}$	0.0000832196
3	$\frac{355}{113}$	−0.0000002668
4	$\frac{103993}{33102}$	0.0000000006
5	$\frac{104348}{33215}$	−0.0000000003

Les u_n s'approchent rapidement de π, et de plus ils encadrent la valeur exacte : les deux sous-suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont adjacentes. On démontre le résultat suivant.

Théorème 11. *Soit x un réel et (u_n) la suite des fractions continues associée à x. Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont adjacentes et convergent vers x.*

Pour tout n, notons h_n et b_n les deux entiers premiers entre eux tels que $u_n = h_n/b_n$. Alors :

$$\frac{1}{b_n(b_{n+1}+b_n)} < \left| x - \frac{h_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n b_{n+1}} \; .$$

Cet encadrement montre que l'erreur commise en approchant x par u_n est majoré par l'inverse du carré du dénominateur. La taille du dénominateur est en quelque sorte le prix que l'on accepte de payer pour une approximation rationnelle de x. On démontre que parmi les rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à b_n, c'est u_n qui est le plus proche de x. L'approximation par fractions continues est donc la meilleure possible.

3.5 Applications contractantes

Le principal problème des suites récurrentes est que selon la valeur initiale u_0 et la fonction F que l'on itère, tous les comportements sont possibles, même les plus sauvages. Pour vous en convaincre, essayez de suivre le plus longtemps possible la toile d'araignée de la figure 5.

Il existe pourtant une situation particulièrement agréable, celle où l'application F est *contractante*.

Définition 12. *Soit ρ un réel tel que $0 < \rho < 1$. Soit F une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On dit que F est* contractante *de rapport ρ si pour tous x et y distincts dans I,*

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \rho |x - y| \; .$$

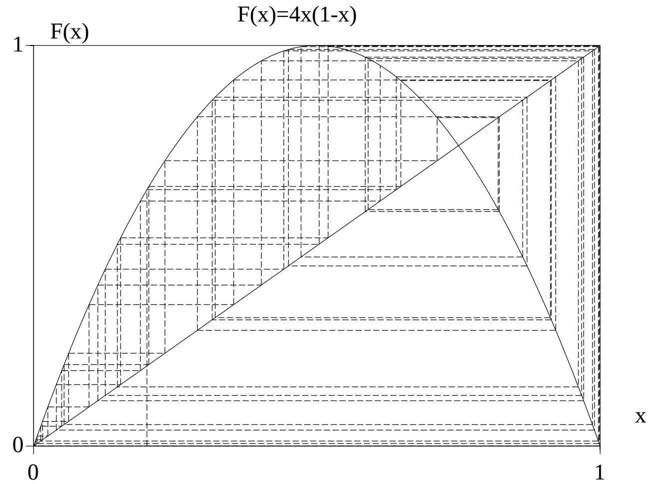

Figure 5 – *Comportement chaotique d'une suite récurrente.*

Théorème 12. *Soit F une application contractante. Alors F possède un point fixe unique et pour tout $u_0 \in I$ la suite des itérés $(F^{\circ n}(u_0))$ converge vers ce point fixe.*

La démonstration sera l'occasion d'utiliser la notion de suite de Cauchy.

Démonstration :

Notons $u_n = F^{\circ n}(u_0)$. Nous allons montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy. Observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant \rho|u_n - u_{n-1}| \;,$$

et donc par récurrence,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant \rho^n|u_1 - u_0| \;.$$

Utilisons l'inégalité triangulaire pour écrire :

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+k} - u_n| & \leqslant & |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+2} - u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+k} - u_{n+k-1}| \\ & \leqslant & |u_1 - u_0|(\rho^n + \rho^{n+1} + \cdots + \rho^{n+k-1}) \\ & = & |u_1 - u_0|\rho^n(1 + \rho + \cdots + \rho^{k-1}) \\ & = & |u_1 - u_0|\rho^n \dfrac{1-\rho^k}{1-\rho} \\ & < & \dfrac{|u_1 - u_0|}{1-\rho}\,\rho^n \;. \end{array}$$

Comme $\rho < 1$, la suite géométrique (ρ^n) tend vers 0, donc la distance $|u_{n+k} - u_n|$ peut être rendue arbitrairement petite, pour n assez grand. Donc (u_n) est une suite de Cauchy.

Par le théorème 8, la suite (u_n) converge. Soit l sa limite. La suite $(F(u_n))$ est telle que :

$$|F(u_n) - F(l)| < |u_n - l| \ .$$

Donc $(F(u_n))$ converge vers $F(l)$ (F est continue) et $F(l) = l$.

S'il y avait deux points fixes différents l et l', ils seraient tels que

$$|l - l'| = |F(l) - F(l')| < |l - l'| \ ,$$

ce qui est impossible. □

3.6 Méthode de Newton

Supposons que l'on souhaite résoudre numériquement l'équation

$$f(z) = 0 \ .$$

La méthode consiste à écrire une solution z comme point fixe d'une fonction F, choisie de manière à être contractante, avec le meilleur rapport de contraction possible sur un intervalle contenant le point fixe. Supposons que f soit une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que l'on connaisse une valeur x_0 pas trop éloignée de la solution. L'équation de la tangente en x_0 au graphe de f est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \ .$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, cette droite coupe l'axe des x au point :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \ .$$

Il est raisonnable d'espérer que x_1 soit beaucoup plus proche de la solution cherchée que x_0. La suite itérative que l'on se propose de calculer est donc $(F^{\circ n}(x_0))$, avec :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

(Il faut bien sûr s'assurer que la suite est bien définie, c'est-à-dire que pour tout n, $f'(x_n) \neq 0$.)

Par exemple, si on souhaite calculer numériquement $\sqrt{2}$, on pourra l'écrire comme solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$, et contruire la suite définie par $x_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \ .$$

La figure 6 montre une illustration graphique.

La précision de la méthode est décrite par le théorème suivant, que nous admettrons.

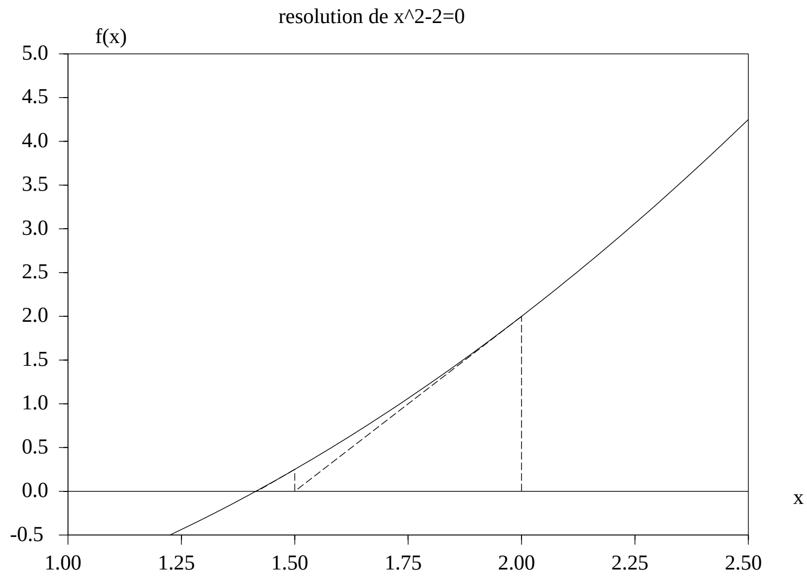

FIGURE 6 – *Méthode de Newton.*

Théorème 13. *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et z un réel tel que $f(z) = 0$. On suppose que f est deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant z, et que $f'(z) \neq 0$. Notons :*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\ , \quad \text{et} \quad M = \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\ .$$

Il existe h, $0 < h < 1/M$ tel que pour tout $x_0 \in [z-h, z+h]$, la suite itérative $(F^{\circ n}(x_0))$ est définie et vérifie :

$$|F^{\circ n}(x_0) - z| < \frac{1}{M}(M|x_0 - z|)^{2^n}\ . \tag{2}$$

La majoration (2) traduit une convergence extrêmement rapide. Supposons pour fixer les idées que $M = 1$ et $|x_0 - z| = 10^{-1}$, alors la précision sera de 10^{-2} à la première itération, 10^{-4} à la seconde, 10^{-8} à la troisième, et on peut s'attendre à 32 décimales exactes à la cinquième itération. Chaque itération double le nombre de décimales exactes. En ce qui concerne la constante M, il est intuitivement normal que la méthode soit d'autant plus performante que la dérivée seconde est plus faible (la courbe est plus proche de sa tangente), et la dérivée plus grande.

Exemple : Reprenons l'équation $z^2 - 2 = 0$, en partant de $x_0 = 2$. Voici les 5 premières valeurs de la suite $(F^{\circ n}(2))$, à comparer avec $\sqrt{2} \simeq 1.4142135623730950488$.

n	$F^{\circ n}(2)$
1	1.5000000000000000000
2	1.4166666666666666666
3	1.4142156862745098039
4	1.4142135623746899106
5	1.4142135623730950488

La méthode de Newton est extrêmement précise. En revanche, elle nécessite une initialisation relativement proche de la solution que l'on cherche. Utiliser la méthode à partir d'un point quelconque peut conduire à des résultats numériquement instables, dans la mesure où deux suites récurrentes, même si elles partent de points très voisins, peuvent converger vers des valeurs très éloignées.

Exemple : Considérons l'équation $\sin(\pi z) = 0$, dont les solutions sont les entiers relatifs. Si $f(x) = \sin(\pi x)$, alors :

$$F(x) = x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi \cos(\pi x)} .$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $F^{\circ 5}(x_0)$ pour quelques valeurs de x_0 proches de 0.5, valeur en laquelle f' s'annule.

x_0	0.491	0.493	0.495	0.497	0.499	0.501	0.503	0.505	0.507	0.509
$F^{\circ 5}(x_0)$	$-11.$	$-14.$	$-20.$	$-33.$	$-101.$	102.	34.	21.	15.	12.