Nombres réels

Bernard Ycart

Vous savez déjà compter, et vous connaissez les propriétés des réels. Une seule nouveauté dans ce chapitre, la notion de borne (supérieure ou inférieure) d'un ensemble. Au-delà des définitions, vous allez commencer à vous habituer aux « epsilons strictement positifs », à comprendre comme des quantités pouvant prendre des valeurs arbitrairement petites. À part ça, pas grand chose de neuf ni de difficile dans ce chapitre d'introduction à l'analyse.

Table des matières

8 novembre 2011

1 Cours

1.1 Opérations

Nous ne présenterons pas de construction axiomatique de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Cette section rappelle quelques notations, les propriétés des opérations (addition, multiplication) et de la relation d'ordre.

Nous utilisons les notations classiques suivantes pour les ensembles emboîtés de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notation	Ensemble	Exemples
$\mathbb{N}$	Entiers naturels	$0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	Entiers relatifs	$-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Q}$	Rationnels	$1.2, 1/2, 0.0012, \frac{355}{113}, \ldots$
$\mathbb{R}$	Réels	$\sqrt{2}, \pi, \mathrm{e}, \ldots$
$\mathbb{C}$	Complexes	$1 + 2\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \ldots$

L'exposant * signifie « privé de 0 ». Ainsi, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Pour les calculs usuels (à la main, sur les calculettes ou par ordinateur), ce sont forcément des nombres décimaux, donc rationnels, que l'on manipule. Pourtant l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas un cadre de calcul mathématiquement suffisant, pour plusieurs raisons, qui seront énoncées dans la suite de ce chapitre. La première, reconnue dès l'antiquité grecque, est que certaines quantités, qui pourtant apparaissent couramment en géométrie élémentaire, ne s'expriment pas comme rapports d'entiers. La plus simple est la diagonale d'un carré de côté 1, à savoir $\sqrt{2}$: nous verrons plus loin que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ; $\sqrt[3]{5}$, π, ou e n'en sont pas non plus.

Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre sont rappelées ci-dessous.

Addition

- *Associativité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
- *Élément neutre :* $\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad x + 0 = 0 + x = x$
- *Opposé :* $\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad x + (-x) = x - x = 0$
- *Commutativité :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad x + y = y + x$

L'ensemble des réels muni de l'addition est un *groupe commutatif*.

Multiplication L'ensemble $\mathbb{R}^*$ (ensemble des réels privé de 0), muni de la multiplication, est un autre groupe commutatif.

- *Associativité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad x(yz) = (xy)z$
- *Élément neutre :* $\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad x\,1 = 1\,x = x$
- *Inverse :* $\forall x \in \mathbb{R}^*\,, \quad x\,(1/x) = (1/x)\,x = 1$
- *Commutativité :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad xy = yx$
- *Distributivité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad x(y + z) = (xy) + (xz)$

L'ensemble des réels muni de l'addition et de la multiplication est un *corps commutatif*.

Relation d'ordre

- *Réflexivité :* $\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad x \leqslant x$
- *Transitivité :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$
- *Antisymétrie :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longrightarrow x = y$
- *Ordre total :* $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x$

Les trois premières propriétés définissent une relation d'ordre. Ici l'ordre est total car deux réels quelconques peuvent toujours être comparés.

Pour des raisons de commodité, on utilise aussi couramment les notations $\geqslant, <, >$:

Notation	Définition
$x \geqslant y$	$y \leqslant x$
$x < y$	$x \leqslant y$ et $x \neq y$
$x > y$	$x \geqslant y$ et $x \neq y$

On utilise aussi les ensembles de réels notés $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$.

Ensemble	Définition	Notation
Réels positifs ou nuls	$\{x \in \mathbb{R}\,, \quad x \geqslant 0\}$	$\mathbb{R}^+$
Réels strictement positifs	$\{x \in \mathbb{R}\,, \quad x > 0\}$	$\mathbb{R}^{+*}$
Réels négatifs ou nuls	$\{x \in \mathbb{R}\,, \quad x \leqslant 0\}$	$\mathbb{R}^-$
Réels strictement négatifs	$\{x \in \mathbb{R}\,, \quad x < 0\}$	$\mathbb{R}^{-*}$

La relation d'ordre est compatible avec l'addition par un réel quelconque, et avec la multiplication entre réels positifs.

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\,, \quad x < y \Longrightarrow x + z < y + z$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\,,\ \forall z \in \mathbb{R}^+\,, \quad x \leqslant y \Longrightarrow x\,z \leqslant y\,z$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}\,,\ \forall z \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad x < y \Longrightarrow x\,z < y\,z$

Comme conséquence de ces relations de compatibilité, on obtient les règles suivantes qui permettent de combiner des inégalités.

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}\,, \quad (x \leqslant y \text{ et } z \leqslant t) \Longrightarrow x + z \leqslant y + t$$

On peut donc ajouter deux inégalités de même sens (*attention : on ne peut pas ajouter deux inégalités de sens opposés ni soustraire deux inégalités de même sens*).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,,\ \forall z, t \in \mathbb{R}^+\,, \quad (x \leqslant y \text{ et } z \leqslant t) \Longrightarrow x\,z \leqslant y\,t$$

On peut multiplier deux inégalités de même sens, si elles concernent des réels positifs ou nuls. (*attention : on ne peut pas mutiplier deux inégalités de sens opposés, ni diviser des inégalités de même sens, ni multiplier des inégalités qui concernent des réels négatifs*). Pour se ramener à des inégalités de même sens, ou à des réels positifs, il peut être utile de changer de signe ou de passer à l'inverse.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad (x \leqslant y) \Longrightarrow (-x \geqslant -y)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad (x \leqslant y) \Longrightarrow (1/x \geqslant 1/y)$

1.2 Bornes

Définition 1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et M un réel. On dit que M est un* majorant *de A si :*

$$\forall x \in A\,, \quad x \leqslant M\,.$$

De même, $m \in \mathbb{R}$ est un minorant *de A si :*

$$\forall x \in A\,, \quad m \leqslant x\,.$$

On dit qu'un ensemble de réels A admet un *plus grand élément* (respectivement *plus petit élément*) s'il existe $x \in A$ tel que pour tout $y \in A$, $y \leqslant x$ (respectivement : $y \geqslant x$). Donc le plus grand élément (s'il existe il est nécessairement unique) est à la fois un majorant de A et un élément de A. Le fait que l'ordre sur $\mathbb{R}$ soit total entraîne que tout ensemble *fini* de réels admet un plus petit élément et un plus grand élément. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est un ensemble fini de réels, nous noterons $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$ le plus petit et $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ le plus grand élément. Nous réserverons les notations min et max aux ensembles finis. Un ensemble *infini* de réels n'admet pas nécessairement de plus petit ou de plus grand élément. Voici quelques exemples.

Ensemble	Plus petit élément	Plus grand élément
$\mathbb{N}$	0	Non
$\mathbb{Z}$	Non	Non
$\{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	1
$\{(-1)^n(1-1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	Non
$\{(-1)^n(1+1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n+1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	Non	$3/2$
$\{(-1)^n-1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	Non

Non seulement $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément mais de plus aucun réel n'est plus grand que tous les éléments de $\mathbb{N}$. Par contre, les 5 derniers ensembles du tableau ci-dessus sont *bornés* au sens suivant.

Définition 2. *Soit A une* partie *de $\mathbb{R}$ (un ensemble de réels). On dit que A est :*

- majorée *s'il existe un majorant de A,*
- minorée *s'il existe un minorant de A,*
- bornée *si A est à la fois majorée et minorée.*

Si M est un majorant de A, alors $M+1$, $M+2$ et plus généralement tout réel plus grand que M sont aussi des majorants. Nous admettrons pour l'instant le théorème suivant, dont nous donnerons une démonstration dans la section 1.6.

Théorème 1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément.*

2. *Si A est minorée, alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément.*

Définition 3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, on appelle* borne supérieure *de A et on note* $\sup(A)$ *le plus petit des majorants de A.*
2. *Si A est minorée, on appelle* borne inférieure *de A et on note* $\inf(A)$ *le plus grand des minorants de A.*

Du fait que l'ordre des réels est total, la borne supérieure et la borne inférieure, si elles existent, sont nécessairement uniques. Lorsque A admet un plus grand élément, la borne supérieure de A est ce plus grand élément. Lorsque A admet un plus petit élément, la borne inférieure de A est ce plus petit élément. On étend la définition de sup et inf aux ensembles non majorés et non minorés par la convention suivante.

1. *Si A n'est pas majorée,* $\sup(A) = +\infty$
2. *Si A n'est pas minorée,* $\inf(A) = -\infty$

Reprenons comme exemples les 6 ensembles du tableau précédent.

Ensemble	Borne inférieure	Borne supérieure
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$
$\{1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	0	1
$\{(-1)^n(1-1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	1
$\{(-1)^n(1+1/n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	$3/2$
$\{(-1)^n+1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-1	$3/2$
$\{(-1)^n-1/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$	-2	1

Dans le cas où A est majorée et n'admet pas de plus grand élément, alors $\sup(A)$ n'appartient pas à A, mais on trouve néanmoins des éléments de A arbitrairement proches de la borne supérieure.

Proposition 1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A est majorée, alors*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad \sup(A) - \varepsilon \leqslant a \leqslant \sup(A)$$

2. *Si A est minorée, alors*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists a \in A\,,\quad \inf(A) \leqslant a \leqslant \inf(A) + \varepsilon$$

Démonstration : Comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants, $\sup(A)-\varepsilon$ ne peut pas être un majorant. Il existe donc un élément de A supérieur à $\sup(A)-\varepsilon$. Comme $\sup(A)$

est un majorant, cet élément est inférieur à $\sup(A)$. Le raisonnement pour $\inf(A)$ est analogue. □

Nous allons souvent rencontrer dans ce cours des réels ε strictement positifs arbitrairement petits. On peut s'en faire une idée concrète en pensant $\varepsilon = 0.001$, ou bien $\varepsilon = 10^{-6}$. Prenons comme exemple $A = \{1/n^2\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. La borne inférieure est $\inf(A) = 0$. La proposition 1 permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de l'ensemble inférieur à ε. Et d'ailleurs l'équivalence ci-dessous permet de l'exhiber.

$$1/n^2 \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \sqrt{1/\varepsilon}\ .$$

Pour $\varepsilon = 0.001$, $1/40^2 < \varepsilon$.

La proposition 1 admet la réciproque suivante.

Proposition 2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si x est un majorant de A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists a \in A\ ,\quad x - \varepsilon \leqslant a\ ,$$

   alors $x = \sup(A)$.

2. *Si x est un minorant de A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists a \in A\ ,\quad a \leqslant x + \varepsilon\ ,$$

   alors $x = \inf(A)$.

Démonstration : Si

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists a \in A\ ,\quad x - \varepsilon \leqslant a\ ,$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc si x est un majorant, c'est bien le plus petit.

Le raisonnement pour $\inf(A)$ est analogue. □

La borne supérieure peut donc être caractérisée de deux manières différentes.

- $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A
- $\sup(A)$ est le seul majorant x de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A entre $x - \varepsilon$ et x.

De manière analogue,

- $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A
- $\inf(A)$ est le seul minorant x de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A entre x et $x + \varepsilon$.

En liaison avec la proposition précédente, voici pour terminer cette section une application simple des notions de borne supérieure et inférieure, que l'on retrouve dans beaucoup de démonstrations.

Proposition 3. *Soient a et b deux réels.*

1. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, $a \geqslant b - \varepsilon$ alors $a \geqslant b$.*
2. *Si pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leqslant b + \varepsilon$ alors $a \leqslant b$.*

Démonstration : Considérons la première affirmation. l'ensemble $\{b-\varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ a pour borne supérieure b. L'hypothèse affirme que a est un majorant de cet ensemble. Il est donc supérieur ou égal à la borne supérieure, par définition de celle-ci. Or d'après la proposition 2, la borne supérieure de $\{b - \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ est b. La seconde affirmation est analogue. □

L'ensemble $\{b - \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0\}$ de la démonstration précédente est un *intervalle* de $\mathbb{R}$. Nous les décrivons dans la section suivante.

1.3 Intervalles

Définition 4. *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaires :*

$$\forall c, d \in I\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad (c \leqslant x \leqslant d) \implies (x \in I)\ .$$

Par exemple, $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, car tout réel compris entre deux réels positifs est positif. Mais $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un, car il contient 1 et -1 sans contenir 0. L'ensemble vide et les singletons sont des cas très particuliers d'intervalles. Nous allons utiliser sup et inf pour caractériser tous les intervalles contenant au moins deux éléments. Ils se répartissent en 9 types, décrits dans le tableau ci-dessous. Dans ce tableau, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Description	Définition	Notation
fermé borné (segment)	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ a \leqslant x \leqslant b\}$	$[a, b]$
borné, semi-ouvert à droite	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ a \leqslant x < b\}$	$[a, b[$
borné, semi-ouvert à gauche	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ a < x \leqslant b\}$	$]a, b]$
ouvert borné	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ a < x < b\}$	$]a, b[$
fermé non majoré	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ a \leqslant x\}$	$[a, +\infty[$
ouvert non majoré	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ a < x\}$	$]a, +\infty[$
fermé non minoré	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ x \leqslant b\}$	$]-\infty, b]$
ouvert non minoré	$\{x \in \mathbb{R}\,,\ x < b\}$	$]-\infty, b[$
droite réelle	$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$

Voici la discussion pour les intervalles bornés. Si un intervalle I est borné et contient deux éléments, il admet une borne inférieure et une borne supérieure distinctes. Notons

$$a = \inf(I) \quad \text{et} \quad b = \sup(I)\ .$$

Par définition de sup et inf, tout élément x de I est entre a et b :

$$\forall x \in I\ , \quad a \leqslant x \leqslant b\ .$$

Nous allons montrer que tout réel x tel que $a < x < b$ appartient à I. En effet, si $a < x < b$, x n'est ni un majorant, ni un minorant de I. Il existe donc deux éléments y et z de I tels que $y < x < z$. Par la définition 4, x appartient à I. Selon que a et b appartiennent ou non à I, on obtient les 4 premiers types du tableau.

Considérons maintenant un intervalle minoré mais non majoré. Soit a la borne inférieure. Tout élément de I est supérieur ou égal à a. Montrons que I contient tous les réels x strictement supérieurs à a. Comme x n'est pas un minorant, I contient un élément $y < x$, et comme I n'est pas majoré, il contient un élément $z > x$. Donc x appartient à I. Selon que a appartient ou non à I, on obtient 2 types d'intervalles non majorés. Les deux types d'intervalles non minorés sont analogues.

Enfin, si un intervalle I n'est ni majoré, ni minoré, pour tout réel x, on peut trouver deux réels y et z dans I tels que $y < x < z$, ce qui entraîne $x \in I$. Donc $I = \mathbb{R}$.

1.4 Rationnels et irrationnels

Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs. La somme de deux rationnels, ainsi que leur produit, sont des rationnels. Muni de l'addition et de la multiplication, $\mathbb{Q}$ est un corps commutatif totalement ordonné, comme $\mathbb{R}$. En revanche, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure. L'ensemble des rationnels dont le carré est inférieur ou égal à 2 est non vide, majoré, mais il n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, car $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est une application du résultat suivant.

Proposition 4. *Soient m et n deux entiers strictement positifs. Le nombre $\sqrt[n]{m}$ est soit entier, soit irrationnel.*

Démonstration : Nous allons démontrer que si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, alors il est entier. Soient p et q deux entiers premiers entre eux tels que $\sqrt[n]{m} = p/q$. Alors, $q^n m = p^n$. Mais alors q divise p^n, or q et p sont premiers entre eux. Ce n'est possible que si $q = 1$ et $m = p^n$. □

Observons que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle ; il en est de même pour leur produit. Par contre la somme ou le produit de deux irrationnels peuvent être rationnels (par exemple $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$).

Les rationnels et les irrationnels sont intimement mêlés, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2. *Si un intervalle de $\mathbb{R}$ contient au moins deux points distincts, il contient au moins un rationnel et un irrationnel.*

On traduit cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soit I un intervalle contenant deux points a et b, tels que $a < b$. Soit q un entier strictement supérieur à $1/(b-a)$ et p le plus petit entier strictement supérieur à aq. On a donc :

$$p - 1 \leqslant aq < p \ ,$$

et comme q est strictement positif,

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant a < \frac{p}{q} \ .$$

D'où :

$$a < \frac{p}{q} \leqslant a + \frac{1}{q} < a + (b-a) = b \ .$$

Donc l'intervalle $]a, b[$, inclus dans I, contient le rationnel $\frac{p}{q}$.

De même, l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[$ contient un rationnel r ; donc $]a, b[$ contient $r\sqrt{2}$, qui est irrationnel. □

En fait, tout intervalle contenant au moins deux points contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

Les rationnels que l'on manipule le plus souvent sont les nombres décimaux, qui sont les multiples entiers de 10^{-n}, où n est le nombre de chiffres après la virgule :

$$3.141592 = 3 + 141592\,10^{-6} = \frac{3141592}{1000000} \ .$$

Les nombres décimaux sont le moyen le plus courant d'approcher les réels.

1.5 Approximation des réels

Nous définissons d'abord les outils de base de l'approximation que sont la valeur absolue, la distance et la partie entière.

La *valeur absolue* d'un réel x, notée $|x|$, est $\max\{x, -x\}$. Elle est égale à x si x est positif, $-x$ si x est négatif.

Si x et y sont deux réels quelconques, la valeur absolue du produit xy est le produit des valeurs absolues ; $|xy| = |x||y|$. Par contre, on peut seulement encadrer la valeur absolue de la somme.

Proposition 5. *Soient x et y deux réels quelconques. La valeur absolue de leur somme est majorée par la somme des valeurs absolues, et minorée par la différence des valeurs absolues.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;, \quad \Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y| \;. \tag{1}$$

Démonstration : Quitte à échanger x et y, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $|x| \geqslant |y|$. Si l'un des deux est nul, alors les inégalités sont vérifiées : ce sont des égalités. Sinon, il suffit d'examiner les 4 cas possibles selon le signe de x et y.

1. $x > 0$ et $y > 0$: $|x + y| = x + y = |x| + |y| > |x| - |y|$
2. $x > 0$ et $y < 0$: $|x + y| = x + y = |x| - |y| < |x| + |y|$
3. $x < 0$ et $y > 0$: $|x + y| = -x - y = |x| - |y| < |x| + |y|$
4. $x < 0$ et $y < 0$: $|x + y| = -x - y = |x| + |y| > |x| - |y|$

Observez que dans tous les cas, l'une des deux inégalités est une égalité, mais ce n'est pas toujours la même. $\square$

En remplaçant y par $-y$, on obtient le même encadrement pour la valeur absolue d'une différence.

$$\Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$$

On appelle *distance* entre deux réels x et y la valeur absolue de leur différence. La proposition 5, appliquée à $(x - y) + (y - z)$, entraîne :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;, \quad |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| \;.$$

Pour aller d'un point à un autre, on ne peut qu'allonger le parcours si on s'impose de passer par un troisième : c'est l'*inégalité triangulaire*.

Étant donné un réel x et un réel ε strictement positif, nous dirons que a est une *approximation* (ou une *valeur approchée*) de x « à ε près » si la distance de a à x est inférieure à ε, ce qui équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

$$|x - a| < \varepsilon \iff x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\iff a \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\;.$$

Les approximations décimales se construisent à l'aide de la partie entière. La *partie entière* d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \;.$$

On en déduit :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \ .$$

La partie entière de π est 3. Attention : la partie entière de $-\pi$ est -4, et non -3. On appelle *partie décimale* de x et on note $D(x)$, la différence de x avec sa partie entière.

$$D(x) = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[\ .$$

Soit x un réel, et n un entier. Considérons la partie entière de $10^n x$:

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \ ,$$

donc,

$$10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant x < 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor + 10^{-n} \ ,$$

Le nombre décimal $d_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ est l'*approximation de x par défaut à 10^{-n} près.* Observez que d_n et d_{n+1} coïncident jusqu'à la dernière décimale de d_n :

$$d_n \leqslant d_{n+1} \leqslant x < d_{n+1} + 10^{-(n+1)} < d_n + 10^{-n}$$

Par exemple, pour $x = \pi$,

$$d_0 = 3 \, , \ d_1 = 3.1 \, , ; d_2 = 3.14 \, , \ d_3 = 3.141 \, , \ d_4 = 3.1415 \, , \ d_5 = 3.14159 \ldots$$

Réciproquement, la donnée d'une suite de décimaux $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \, , \ 10^n d_n \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \, , \ d_n \leqslant d_{n+1} < d_n + 10^{-n}$

détermine un réel x tel que pour tout n $d_n \leqslant x \leqslant d_n + 10^{-n}$. La suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et *converge vers x*. Notez (d_n) peut déterminer un réel dont elle n'est pas la suite d'approximations décimales, dans le cas où x est lui même décimal :

$$1 = 0.99999999 \ldots$$

En théorie, on peut approcher un réel x par un nombre décimal à n'importe quelle précision. En pratique, la précision habituelle sur des calculs d'ordinateurs est de l'ordre de 10^{-15}.

1.6 Construction des bornes

Le but de cette section est de démontrer le théorème 1 : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$:

$$\exists M \in \mathbb{R} \, , \ \forall x \in A \ , \quad x \leqslant M \ .$$

Si $x \leqslant M$, alors $-x \geqslant -M$. Si A est non vide et majorée, alors $-A = \{-x\,,\ x \in A\}$ est une partie non vide et minorée. Si la borne supérieure de A (plus petit des majorants de A) existe, alors la borne inférieure de $-A$ (plus grand des minorants) existe aussi et réciproquement ; de sorte que nous nous dispenserons de démontrer l'existence de la borne inférieure.

La démontration va consister à construire explicitement la borne supérieure, en déterminant ses approximations décimales par défaut. Nous vérifierons ensuite que le réel ainsi construit est bien le plus petit des majorants.

Démonstration : [du théorème 1] Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\{\, \lfloor 10^n x \rfloor\,,\ x \in A \,\}\ .$$

est un ensemble d'entiers, majoré par M. Il admet donc un plus grand élément. Divisons chacun de ses éléments par 10^{-n} :

$$D_n = \{\, 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor\,,\ x \in A \,\}\ .$$

L'ensemble D_n est l'ensemble des approximations par défaut à 10^{-n} près des éléments de A. Comme le précédent, il admet un plus grand élément, que nous noterons d_n. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} \geqslant d_n$. Nous allons démontrer par l'absurde que

$$d_{n+1} < d_n + 10^{-n}\ .$$

Si ce n'était pas le cas, il existerait $x \in A$ tel que

$$10^{-(n+1)} \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \geqslant d_n + 10^{-n}$$

Mais alors $\lfloor 10^n x \rfloor$ serait supérieur ou égal à $10^n d_n + 1$, ce qui contredit la définition de d_n. La suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une suite d'approximations décimales et détermine un réel unique que nous notons b. Nous voulons montrer b est la borne supérieure de A. Montrons d'abord que c'est un majorant de A. Toujours par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $x > b$. Fixons n tel que $10^{-n} < x - b$. Alors

$$10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor > 10^{-n} \lfloor 10^n b \rfloor = d_n\ ,$$

ce qui contredit la définition de d_n. Il nous reste à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $b - \varepsilon < x$. Fixons n tel que $10^{-n} < \varepsilon$. Par construction, il existe $x \in A$ tel que $d_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$. Donc

$$b - \varepsilon < b - 10^{-n} \leqslant d_n \leqslant x\ .$$

□

Ne nous leurrons pas : la démonstration qui précède, si elle présente l'avantage de construire explicitement la borne supérieure, n'est pas parfaitement étanche. Vous avez dû admettre qu'une suite d'approximations décimales détermine un réel, ce qui pour être parfaitement intuitif, n'en est pas moins un acte de foi. Pour le justifier, il vous manque une construction axiomatique de l'ensemble des réels, que nous vous raconterons certainement un jour, mais qui pour l'heure dépasse sensiblement le niveau de ce chapitre.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ A possède une borne supérieure, finie ou infinie.
2. ☒ Si A est minorée, alors A possède une borne inférieure finie.
3. ☐ Si $x \leqslant \sup(A)$ alors $x \in A$.
4. ☐ Si A contient au moins 2 réels distincts, alors A contient un rationnel.
5. ☐ Si A est infinie, alors A contient une infinité d'irrationnels.
6. ☒ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant lui-même deux points distincts, alors A contient une infinité d'irrationnels.
7. ☐ Si A contient un intervalle de $\mathbb{R}$, alors A contient une infinité de rationnels.

Vrai-Faux 2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $|A| = \{|x|\,,\ x \in A\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si A est majorée, alors $|A|$ possède une borne supérieure finie.
2. ☒ 0 est un minorant de $|A|$.
3. ☒ $|A|$ possède toujours une borne inférieure finie.
4. ☐ $|A|$ possède toujours une borne supérieure finie.
5. ☒ A est bornée si et seulement si $|A|$ est majorée.
6. ☒ Si A est un intervalle, alors $|A|$ est un intervalle.
7. ☐ Si $|A|$ est un intervalle, alors A est un intervalle.
8. ☐ Si A est un intervalle ouvert, alors $|A|$ est un intervalle ouvert.
9. ☒ Si A est un intervalle fermé, alors $|A|$ est un intervalle fermé.

Vrai-Faux 3. Soit a un réel quelconque. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a < \varepsilon)$, alors $a < 0$.
2. ☒ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $a \geqslant 1$.
3. ☒ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - 2\varepsilon)$.
4. ☐ Si $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$, alors $(\forall \varepsilon \geqslant 0\,,\ a > 1 - \varepsilon^2)$.
5. ☒ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1/\sqrt{n})$, alors $a > 1$.
6. ☐ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a < 1/\sqrt{n})$, alors $a < 0$.
7. ☒ Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a > 1 - 1/\sqrt{n})$, alors $(\forall \varepsilon > 0\,,\ a > 1 - \varepsilon)$.

Vrai-Faux 4. Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si $a+b$ est rationnel, alors soit a est rationnel soit b est rationnel.
2. ☒ Si $a+b$ est irrationnel, alors soit a est irrationnel soit b est irrationnel.
3. ☒ Si a est rationnel, alors sa partie décimale est rationnelle.
4. ☐ Si a est irrationnel, alors la partie décimale de $a+b$ est irrationnelle.
5. ☒ Si la partie décimale de a est rationnelle, alors a est rationnel.

Vrai-Faux 5. Soient a et b deux réels quelconques. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ $|ab| = |a|\,|b|$.
2. ☒ $|a| - |b| \leqslant |a-b|$.
3. ☐ $|a-b| \leqslant \max\{|a|, |b|\}$.
4. ☒ $|a-b| = |a-(a+b)/2| + |(a+b)/2 - b|$.
5. ☐ $|a-b| = |a-(a+b)| + |(a+b) - b|$.
6. ☐ Si $|a-b| < |a|$, alors $|ab| = ab$.
7. ☐ $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
8. ☒ $\lfloor a+b \rfloor \geqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
9. ☒ $\lfloor a+b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
10. ☐ $D(a+b) = D(a) + D(b)$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour chacun des ensembles de réels suivants :

$$\{(-1)^n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ \{(-1)^n/n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}\ ,\ \{(-1)^n n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

$$\left\{\frac{n+1}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+1}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,\ \left\{\frac{2n+(-1)^n}{n+2}\,,\ n \in \mathbb{N}\right\}\ ,$$

$$\left\{\frac{m+n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{2m+n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ ,\ \left\{\frac{m-n}{m+2n}\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*\right\}\ .$$

1. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
2. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
3. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 2. On considère les ensembles de réels suivants :

$$\{x \in \mathbb{R}\,,\ |x| > 1\}\ ,\ \Big\{x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 \leqslant 1\Big\}\ ,\ \Big\{x \in \mathbb{R}\,,\ x^3 < 1\Big\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^*\,,\ 1/x \leqslant 1\}\ ,\ \{x \in \mathbb{R}^*\,,\ 1/x > 1\}\ ,\ \Big\{x \in \mathbb{R}^*\,,\ 1/x^2 < 1\Big\}$$

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^+,\, \sin x \leqslant 0\Big\}\ ,\ \Big\{x \in \mathbb{R}^{+*},\, \sin\frac{1}{x} \leqslant 0\Big\}\ ,\ \left\{x \in \mathbb{R}^{+*},\, |\sin\frac{1}{x}| < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\ .$$

1. Ecrire l'ensemble comme un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
2. L'ensemble est-il majoré ? minoré ?
3. L'ensemble admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
4. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble.

Exercice 3. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \subset B$ implique $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ et $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}\ .$$
3. Montrer que si l'intersection $A \cap B$ est non vide, alors elle admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que
$$\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\} \quad \text{et} \quad \inf(A \cap B) \geqslant \max\{\inf(A), \inf(B)\}\ .$$
4. On note $A + B = \{a + b\,,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure finies. Montrer que
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)\ .$$
5. On note $AB = \{ab\,,\ a \in A\,,\ b \in B\}$. Montrer que AB admet une borne supérieure et une borne inférieure. Montrer que, si A et B sont inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors
$$\sup(AB) = \sup(A)\,\sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(AB) = \inf(A)\,\inf(B)\ .$$

Exercice 4. Soient A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cap B$ est un intervalle.
2. Montrer que si $A \cap B$ est non vide, alors $A \cup B$ est un intervalle.
3. Montrer par un exemple que $A \cup B$ peut être un intervalle même si $A \cap B$ est vide.
4. On note $A + B = \{a + b\,,\ a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est un intervalle.

5. On note $AB = \{ab\,,\ a \in A\,,\ b \in B\}$. Montrer que AB est un intervalle.

Exercice 5. Soient x et y deux rationnels distincts tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels.

1. On considère les deux réels $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. Montrer que leur produit est rationnel, leur somme irrationnelle. En déduire qu'ils sont irrationnels.
2. Soient r et s deux rationnels. Montrer que $r\sqrt{x} + s\sqrt{y}$ est irrationnel.
3. Montrer par des exemples que $\sqrt{x}\sqrt{y}$ peut être rationnel ou irrationnel.
4. Montrer que les réels suivants sont irrationnels.

$$1 + \sqrt{2}\,,\ \sqrt{2} + \sqrt{3}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2\,,$$
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}\,,\ \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\,,\ (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})^2\,.$$

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant deux points distincts. Montrer que I contient :

1. une infinité de rationnels,
2. une infinité d'irrationnels,
3. une infinité de nombres décimaux,
4. une infinité de nombres multiples entiers d'une certaine puissance négative de 2 (nombres dyadiques).

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soient x et y deux réels quelconques.

$\boxed{\text{A}}$ Si $x < y$ alors $x^2 \leqslant y^2$.
$\boxed{\text{B}}$ Si $0 < x < y$ alors $0 < 1/y < 1/x$.
$\boxed{\text{C}}$ Si $x < y$ alors $1 - x > 1 - y$.
$\boxed{\text{D}}$ Si $x < y$ alors $x^2 < xy$.
$\boxed{\text{E}}$ Si $0 < x < y$ alors $xy^2 < x^2y$.

Question 2. On considère l'ensemble A suivant.

$$A = \left\{ (-2)^n\,,\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\boxed{\text{A}}$ L'ensemble A est majoré.
$\boxed{\text{B}}$ L'ensemble A possède une borne inférieure finie.

C L'ensemble A possède un plus petit élément.

D $\sup(A) = +\infty$.

E $\inf(A \cap \mathbb{R}^+) = 0$.

Question 3. On considère l'ensemble A suivant.

$$A = \left\{ 1 + (-1)^{n+1} + (-1/2)^n \,,\ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

A L'ensemble A est majoré.

B L'ensemble A possède un plus grand élément.

C $\sup(A) = 2$.

D 1 est un minorant de A.

E $\inf(A \cap \mathbb{R}^+) = -1$.

Question 4. Soit x un réel.

A Si pour tout ε strictement positif $x < \varepsilon$, alors $x = 0$.

B Si pour tout ε strictement positif $x^2 < \varepsilon$, alors $x = 0$.

C Si pour tout entier n strictement positif $x < n$, alors $x \leqslant 0$.

D Si pour tout entier n strictement positif $x < 2^{-n}$, alors $x \leqslant 0$.

E Si pour tout entier n strictement positif $x < n^{-2}$, alors $x = 0$.

Question 5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

A Si I contient -3 et 1, alors $[0, 1] \subset I$.

B Si I contient -3 et 1, alors I est borné.

C Si I est majoré, alors il admet un plus grand élément.

D Si I contient sa borne supérieure, alors il contient au moins deux réels.

E Si I est non vide et non majoré, alors il contient au moins deux réels.

Question 6. Soit x un réel.

A Si $\sqrt{x}$ est irrationnel, alors $\sqrt[4]{x}$ est irrationnel.

B Si $\sqrt{x}$ est rationnel, alors $\sqrt[3]{x}$ est irrationnel.

C Si $\sqrt{x}$ est irrationnel, alors $\sqrt{3x}$ est irrationnel.

D Si $\sqrt{x}$ est rationnel, alors x^3 est rationnel.

E Si $\sqrt[4]{x}$ est irrationnel, alors $\sqrt[3]{x}$ est irrationnel.

Question 7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

A Si I est non vide, alors il contient au moins un rationnel.

B Si I contient au moins deux réels distincts, alors il contient au moins deux irrationnels.

C Si I contient un rationnel et un irrationnel, alors il contient un nombre décimal.

D Si I contient un nombre rationnel, alors il contient un nombre décimal.

E Si I contient un multiple entier d'une puissance négative de 2, alors il contient un irrationnel.

Question 8. Soient x et y deux réels quelconques.

A $|x-y| \leqslant |x|+|y|$.

B $|x|-|y| \leqslant |x-y|$.

C $|x-y| \leqslant \Big| |x|-|y| \Big|$.

D $|x+y| < |x|+|y|$.

E $|x+y| < |x-y| + 2|y|$.

Question 9. Soit a un réel et ε un réel strictement positif.

A $\Big\{ x \in \mathbb{R} \,,\ |x| < |a-\varepsilon| \Big\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

B $\Big\{ x \in \mathbb{R} \,,\ |x-a| > \varepsilon \Big\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

C $\Big\{ x \in \mathbb{R} \,,\ |a-x| \leqslant \varepsilon \Big\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

D $\Big\{ x \in \mathbb{R} \,,\ x-a > \varepsilon \Big\} =]-\infty, a+\varepsilon[$.

E $\Big\{ x \in \mathbb{R} \,,\ |x| < |a-\varepsilon| \Big\} =]-|a-\varepsilon|, |a-\varepsilon|[$.

Question 10. Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ un réel positif non entier.

A $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$.

B $\lfloor 1-x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$.

C $x + D(x) = \lfloor x \rfloor$.

D $D(2-x) = 2 - D(x)$.

E $D(-x) = 1 - D(x)$.

Réponses : 1–BC 2–DE 3–AC 4–BD 5–AE 6–AD 7–BC 8–AB 9–CE 10–BE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit a un réel.

1. Quand dit-on que a est un *majorant* de A ?
2. Quand dit-on que a est le *plus grand élément* de A ?
3. Quand dit-on que a est la *borne supérieure* de A ?
4. Quand dit-on que A est un intervalle ?
5. Démontrer que si A est un intervalle majoré, non minoré, et si a est la borne supérieure de A, alors $A =]-\infty, a\,[$ ou bien $A =]-\infty, a\,]$.

Exercice 1 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ et B une partie non vide de $\mathbb{R}^{+*}$. On note $A\!:\!B$ l'ensemble des quotients d'un élément de A par un élément de B.

$$A\!:\!B = \Big\{ a/b \,,\ a \in A \,,\, b \in B \Big\} .$$

1. Montrer que si m est un minorant de A et M un majorant de B alors m/M est un minorant de $A\!:\!B$.
2. Montrer que si B n'est pas majorée alors :
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists x \in A\!:\!B\,,\quad x < \varepsilon\ .$$
3. Montrer que si B n'est pas majorée, alors $\inf(A\!:\!B) = 0$.
4. Montrer que si $A \neq \{0\}$ et si $\inf(B) = 0$ alors $A\!:\!B$ n'est pas majoré.
5. On suppose que A et B sont deux intervalles. Montrer que $A\!:\!B$ est un intervalle.
6. Soit ε un réel strictement positif quelconque. On pose et $A = B =]0, \varepsilon]$. Montrer que $A\!:\!B = \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 2 : Dans tout l'exercice, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ désigne un irrationnel positif.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est irrationnel.
2. Montrer par un exemple que x^2 peut être rationnel.
3. Montrer que si x^2 est rationnel, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, x^{2n} est rationnel et x^{2n+1} est irrationnel.
4. Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ deux rationnels. Montrer que $ax + b$ est rationnel si et seulement si $a = 0$.
5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ quatre rationnels. On suppose que c et d ne sont pas tous les deux nuls. Montrer que $(ax + b)/(cx + d)$ est rationnel si et seulement si $ad - bc = 0$.

Exercice 3 : Soient x et y deux réels quelconques.

1. Montrer, en utilisant l'inégalité triangulaire, que $2|x| \leqslant |x + y| + |x - y|$.
2. En déduire que $|x| + |y| \leqslant |x + y| + |x - y|$.

Exercice 4 :

1. Soit x un réel et n un entier. Montrer que $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.
2. Soient x et y deux réels. Montrer que $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. On dit que a est un *majorant* de A si :
$$\forall x \in A\,,\ x \leqslant a\ .$$
2. On dit que a est le *plus grand élément* de A si a est un majorant de A et s'il appartient à A.
$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A\,,\ x \leqslant a\ .$$

3. On dit que a est la *borne supérieure* de A si c'est le plus petit des majorants de A.
4. On dit que A est un intervalle si tout point entre deux points de A est aussi dans A.
$$\forall x, y \in A\,,\ \forall z \in \mathbb{R}\,,\quad (x \leqslant z \leqslant y) \implies z \in A\,.$$
5. Démontrer que $A =]-\infty, a[$ ou bien $A =]-\infty, a]$ équivaut à montrer les deux inclusions suivantes.
$$A \subset [-\infty, a] \quad \text{et} \quad]-\infty, a[\subset A\,.$$
Montrons d'abord la première. Par définition, la borne supérieure est un majorant. Donc aucun réel strictement supérieur à a ne peut appartenir à A. Donc :
$$x \notin]-\infty, a] \implies x \notin A\,.$$
La contraposée est :
$$x \in A \implies x \in]-\infty, a]\,,$$
ce qui équivaut à la première inclusion.
Montrons la seconde inclusion. Soit x un réel strictement inférieur à a. Puisque A n'est pas minoré, x n'est pas un minorant. Donc il existe $c \in A$ tel que $c < x$. Puisque a est le plus petit des majorants de A, x n'est pas un majorant. Donc il existe $d \in A$ tel que $x < d$. Les deux réels c et d appartiennent à A et sont tels que $c < x < d$. Comme A est un intervalle, ceci entraîne que x appartient à A. Au total nous avons montré que
$$x < a \implies x \in A\,,$$
soit $]-\infty, a[\subset A$.

Exercice 1 :

1. Observons que M est strictement positif, car $B \subset \mathbb{R}^{+*}$. Si $m < 0$, alors $m/M < 0$ et la propriété annoncée est vraie puisque $A\!:\!B \subset \mathbb{R}^+$. Supposons donc $m \geqslant 0$. Pour tout $y \in B$, $0 < y \leqslant M$, donc $0 < 1/M \leqslant 1/y$. Pour tout $x \in A$, $0 \leqslant m \leqslant x$. Donc :
$$\forall x \in A\,,\ \forall y \in B\,,\quad \frac{m}{M} \leqslant \frac{x}{y}\,.$$
Donc m/M est un minorant de $A\!:\!B$.
2. Soit a un élément quelconque de A. Comme B n'est pas majoré, il existe $y \in B$ tel que $y > a/\varepsilon \geqslant 0$. Donc $x = a/y < \varepsilon$, or $x \in A\!:\!B$, d'où le résultat.
3. Par hypothèse, tout élément de $A\!:\!B$ est positif ou nul. Donc 0 est un minorant de $A\!:\!B$. D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, ε n'est pas un minorant de $A\!:\!B$. Donc 0 est le plus grand des minorants de $A\!:\!B$; c'est la borne inférieure.

4. Par hypothèse, A contient un réel strictement positif. Si $\inf(B) = 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in B$ tel que $0 < y < \varepsilon$. Soit M un réel strictement positif quelconque. Soit $y \in B$ tel que $0 < y < a/M$. Alors $a/y \in A\!:\!B$ et $a/y > M$. Donc $A\!:\!B$ n'est pas majoré.
5. Si $A\!:\!B$ est un singleton, c'est un intervalle particulier. Sinon nous devons montrer que
$$\forall z_1, z_2 \in A\!:\!B\,,\ \forall z \in \mathbb{R}\,, \quad (z_1 < z < z_2) \implies z \in A\!:\!B\ .$$
Par hypothèse, il existe $x_1 \in A$ et $y_1 \in B$ tels que $z_1 = x_1/y_1$. De même, il existe $x_1 \in A$ et $y_1 \in B$ tels que $z_1 = x_1/y_1$. Supposons d'abord $y_1 \leqslant y_2$. Alors :
$$\frac{x_1}{y_1} < z < \frac{x_2}{y_2} \implies x_1 < zy_1 < x_2\frac{y_1}{y_2} \leqslant x_2\ .$$
Comme A est un intervalle, tout réel compris entre x_1 et x_2 appartient à A, donc zy_1 appartient à A, donc z appartient à $A\!:\!B$.
Supposons maintenant que $y_1 > y_2$. Alors $x_1/y_1 < x_1/y_2$. Si $z = x_1/y_2$, $z \in A\!:\!B$. Sinon, de deux choses l'une : soit $z < x_1/y_2$, soit $z > x_1/y_2$. Dans le premier cas :
$$\frac{x_1}{y_1} < z < \frac{x_1}{y_2} \iff y_2 < \frac{x_1}{z} < y_1\ .$$
Comme B est un intervalle, $x_1/z = y$ appartient à B, donc $z = x_1/y$ appartient à $A\!:\!B$.
Dans le second cas :
$$\frac{x_1}{y_2} < z < \frac{x_2}{y_2} \iff x_1 < zy_2 < x_2\ .$$
Comme A est un intervalle, $zy_2 = x$ appartient à A, donc $z = x/y_2$ appartient à $A\!:\!B$.
6. Soit x un réel strictement positif. Supposons d'abord $x \leqslant 1$. Ecrivons $x = x\varepsilon/\varepsilon$. Or $x\varepsilon \in A$ et $\varepsilon \in B$. Donc $x \in A\!:\!B$. Supposons maintenant $x > 1$. Ecrivons :
$$x = \frac{(x\varepsilon)/x}{\varepsilon/x}\ .$$
Comme $(x\varepsilon)/x = \varepsilon \in A$ et $\varepsilon/x \in B$, on en déduit encore que $x \in A\!:\!B$.

Exercice 2 :

1. Démontrons la contraposée : si $x^{1/n}$ est rationnel, alors $x = (x^{1/n})^n$ est rationnel (car le produit de deux rationnels est rationnel). D'où le résultat.
2. $x = \sqrt{2}$ est irrationnel mais $x^2 = 2$ est rationnel.
3. Pour $n = 0$, $x^{2n} = 1 \in \mathbb{Q}$. Pour $n \geqslant 1$, $x^{2n} = (x^2)^n \in \mathbb{Q}$. Supposons que x^{2n+1} et x^{2n} soient rationnels, alors $x = x^{2n+1}/x^{2n}$ est rationnel, d'où le résultat, par contraposée.

4. Si $a = 0$ alors $ax + b = b \in \mathbb{Q}$. Montrons la réciproque : si $ax + b \in \mathbb{Q}$, alors $ax = (ax + b) - b \in \mathbb{Q}$. Supposons $a \neq 0$ et $ax \in \mathbb{Q}$. Alors $x = ax/a \in \mathbb{Q}$. D'où le résultat, par contraposée.
5. L'hypothèse entraîne que $cx + d$ est non nul. Posons :
$$\frac{ax+b}{cx+d} = r \iff x(a - rc) = (rd - b) \ .$$
Si r est rationnel, alors $rd - b$ est rationnel. D'après la question précédente, c'est le cas si et seulement si $a = rc$ et $b = rd$. Alors $ad - bc = rcd - rcd = 0$. Réciproquement, supposons $ad - bc = 0$. Si $ad = bc = 0$, on distingue 3 cas (rappelons que c et d ne sont pas tous les deux nuls) :
• $a = 0$ et $b = 0$: alors $(ax + b)/cx + d) = 0 \in \mathbb{Q}$;
• $a = 0$ et $c = 0$: alors $(ax + b)/cx + d) = b/d \in \mathbb{Q}$;
• $d = 0$ et $b = 0$; alors $(ax + b)/cx + d) = a/c \in \mathbb{Q}$.
Si $ad = bc \neq 0$ alors :
$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b}{d}\,\frac{adx+bd}{bcx+bd} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q} \ .$$

Exercice 3 : Soient x et y deux réels quelconques.

1. $$2|x| = |2x| = |(x + y) + (x - y)| \leqslant |x + y| + |x - y| \ .$$
2. On applique le résultat en échangeant x et y :
$$2|y| \leqslant |y + x| + |y - x| = |x + y| + |x - y| \ .$$
En ajoutant les deux inégalités précédentes, on obtient :
$$2|x| + 2|y| \leqslant 2|x + y| + 2|x - y| \ .$$
D'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Exercice 4 :

1. Par définition la partie entière de $n + x$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $n + x$. Or pour tout entier k,
$$k \leqslant n + x \iff k - n \leqslant x \ .$$
En utilisant la condition nécessaire, pour $k = \lfloor n + x \rfloor$, $\lfloor n + x \rfloor - n \leqslant \lfloor x \rfloor$. En utilisant la condition suffisante pour $k - n = \lfloor x \rfloor$, $n + \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor x + n \rfloor$. D'où le résultat.
2. $$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor\, \lfloor x \rfloor + D(x) + \lfloor y \rfloor + D(y)\, \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor D(x) + D(y) \rfloor \ ,$$
d'après la question précédente. Or par définition la partie décimale d'un réel appartient à $[0, 1[$. Donc $D(x)+D(y) \in [0, 2[$, donc la partie entière de $D(x)+D(y)$ vaut soit 0 soit 1.

---

3 Compléments

3.1 Papier normalisé

Les dimensions des feuilles de papier que vous avez sous les yeux sont irrationnelles ! La norme internationale ISO 216 définit les formats utilisés dans la plupart des pays aujourd'hui, dont le très connu format A4. À l'origine, le standard fut adopté par la DIN (Deutsche Institut für Normung, organisme de normalisation et standardisation allemand) en Allemagne en 1922. Certaines grandeurs avaient été définies en France durant la Révolution, puis oubliées. La norme ISO 216 définit trois séries de format de papier, A, B et C. La série C est principalement utilisée pour les enveloppes. Voici comment est définie la série A.

Si on divise en deux une feuille, on souhaite que la plus grande et la plus petite dimension des deux moitiés restent dans le même rapport que celles de la feuille entière. Par exemple soient L et l la plus grande et la plus petite dimension d'une feuille A0. Quand on la divise en deux, on obtient deux feuilles A1 dont la plus grande dimension est l et la plus petite $L/2$. On doit avoir :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{L/2}\;,$$

soit $L^2/2 = l^2$. Le rapport L/l vaut donc $\sqrt{2}$. Les dimensions de la feuille A0 sont choisies de sorte que sa surface soit 1 mètre carré. Exprimée en mètres, L doit donc vérifier $L^2/\sqrt{2} = 1$, soit $L = 2^{1/4}$. Voici les dimensions théoriques des feuilles de papier de A0 à A4.

Papier	L	l
A0	$2^{1/4}$	$2^{-1/4}$
A1	$2^{-1/4}$	$2^{-3/4}$
A2	$2^{-3/4}$	$2^{-5/4}$
A3	$2^{-5/4}$	$2^{-7/4}$
A4	$2^{-7/4}$	$2^{-9/4}$

Les approximations décimales à 10^{-3} près de $2^{-9/4}$ et $2^{-7/4}$ sont 0.210 et 0.297 ; ce sont bien les dimensions de vos feuilles de papier, exprimées en mètres.

3.2 La constante de Ramanujan

Le mathématicien indien S. Ramanujan (1887-1920) a donné dans sa courte vie beaucoup d'énoncés justes et très peu d'explications sur sa démarche. Contrairement à la légende, il n'a jamais affirmé :

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}} \in \mathbb{N}\;.$$

Les trois nombres e, π et $\sqrt{163}$ sont irrationnels. Il n'est bien sûr pas exclu qu'en combinant des irrationnels on tombe sur des rationnels ou même des entiers. L'exemple le plus célèbre est celui de la formule d'Euler : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Il s'en faut de très peu que l'affirmation supposée de Ramanujan soit vraie. Voici les 30 premiers chiffres significatifs de $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$:

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.999999999999\ldots$$

La partie entière a 18 chiffres, et les 12 premières décimales valent 9. Mais la treizième décimale vaut 2 et le nombre n'est pas entier. Ce fait était connu bien avant Ramanujan, par Hermite en 1859. Pourquoi alors le nombre $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ porte-t-il le nom de « constante de Ramanujan » ? À cause d'un poisson d'avril monté par M. Gardner en 1975 : on ne prête qu'aux riches !

3.3 Nombres incommensurables

Pour les Grecs, les nombres représentaient des longueurs. Or ils avaient compris qu'il existait des longueurs, comme le côté et la diagonale d'un carré, qui ne pouvaient pas être mesurées en nombres entiers dans la même unité. C'est la raison pour laquelle on dit que deux réels dont le rapport n'est pas rationnel sont incommensurables. C'est le cas de 1 et $\sqrt{2}$, mais aussi de $\sqrt{2}$ et π, de π et e, etc...

Supposons que l'on utilise un nombre y comme unité pour mesurer les multiples d'un autre : $\{nx\,,\ n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout n, on trouve un nombre entier d'unités, $\lfloor nx/y \rfloor$, puis un reste qui est inférieur à y. Si x/y est rationnel, il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles. Par contre si $x/y \notin \mathbb{Q}$, non seulement il y a une infinité de restes possibles, mais ces restes sont *denses* dans l'intervalle $[0, y]$. Nous commençons par le cas particulier $y = 1$.

Proposition 6. *Soit x un irrationnel. L'ensemble des parties décimales des multiples de x est dense dans* $[0, 1]$.

En d'autres termes, pour tout intervalle inclus dans $[0, 1]$, il existe un entier n tel que $D(nx) = nx - \lfloor nx \rfloor$ appartient à cet intervalle.

Démonstration : Soit $A = \{D(nx)\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Nous allons montrer que la borne inférieure de A est 0.

Le fait que x soit irrationnel entraîne que A ne contient ni 0 ni 1, et aussi que les éléments de A sont tous différents. Commençons par la règle d'addition suivante, valable pour deux réels y et z quelconques :

$$D(y+z) = \begin{cases} D(y) + D(z) & \text{si} \quad D(y) + D(z) < 1 \\ D(y) + D(z) - 1 & \text{si} \quad D(y) + D(z) \geqslant 1 \end{cases}$$

Pour un n donné, notons δ la partie décimale de nx et $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Comme x est irrationnel, $1/\delta$ l'est aussi et on a $k\delta < 1 < (k+1)\delta$, donc $0 < (k+1)\delta - 1 < \delta$. La partie décimale de $(k+1)nx$ est $(k+1)\delta - 1 < \delta$. Ceci entraîne que l'ensemble A ne peut pas avoir de plus petit élément. Notons a sa borne inférieure. C'est aussi la borne inférieure de $A_n = \{D(mx)\,,\ m > n\}$, puisque A n'a pas de plus petit élément.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $a < D(nx) < a+\varepsilon$. Mais aussi, il existe $m > n$ tel que $a < D(mx) < a+D(nx)$, donc $0 < D(nx)-D(mx) < \varepsilon$. Posons $\delta = D(nx)-D(mx)$ et $k = \lfloor 1/\delta \rfloor$. Toujours parce que x est irrationnel, $1/\delta$ ne peut pas être entier. Ecrivons :

$$k(m-n)x = k(\lfloor mx \rfloor - \lfloor nx \rfloor) - 1 + (1 - k\delta)\ .$$

Cette écriture montre que $D(k(m-n)x) = 1 - k\delta < \delta < \varepsilon$. Comme ε est quelconque, nous avons montré que la borne inférieure de A est 0.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et $\varepsilon < b - a$. Soit n un entier tel que $D(nx) = \delta < \varepsilon$. Soit k le plus petit entier tel que $a < k\delta < b$. On a $a < D(knx) < b$, ce qui montre que l'ensemble A est dense dans $[0, 1]$. □

Considérons maintenant deux réels x et y incommensurables. Si z est un réel, on notera $z \mod y$ (« z modulo y »), le réel $yD(z/y)$, qui appartient à l'intervalle $[0, y[$. Si x et y sont incommensurables, alors l'ensemble $\{nx \mod y\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, y]$. Ceci découle de la proposition 6 appliquée à x/y.

Par exemple, puisque π est irrationnel, 2π et $1/(2\pi)$ le sont aussi. Donc 1 et 2π sont incommensurables. D'après ce qui précède, $\{n \mod 2\pi\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 2\pi]$. On déduit de la continuité des fonctions sin et cos que $\{\sin(n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos(n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

3.4 Les frères Banu-Musâ

Il vivait à Bagdad sous le règne du Calife Haroun al-Rashid ; il avait commencé sa vie comme voleur puis s'était élevé dans l'échelle sociale par son intelligence. Il ne s'appelait pas Aladin mais Musâ ibn Shakir, et était devenu un astronome réputé à la cour du Calife. Entre 803 et 809, il eut trois fils : Jafar Muhammed, Ahmed et al-Hassan. À la mort de leur père, l'éducation des trois frères fut prise en charge par le successeur d'Haroun al-Rashid : al-Mahmoun ; éducation poussée d'ailleurs : géométrie, mécanique, musique, astronomie... Plus tard les trois frères se spécialisèrent, qui dans la géométrie, qui dans la mécanique, qui dans la musique, mais ils continuèrent à signer collectivement leurs découvertes. Poursuivant le mécénat scientifique de son prédécesseur, al-Mahmoun créa une « Maison de la Sagesse », où les écrits des Grecs étaient traduits, une bibliothèque (la première de grande ampleur depuis Alexandrie), et plusieurs observatoires. Outre les frères Banu-Musâ, d'autres noms célèbres furent pensionnaires de la Maison de la Sagesse : al-Khawarizmi, Thabit ibn Qurra, al-Kindi...

Les frères Banu-Musâ furent les premiers scientifiques arabes à étudier les textes grecs, en particulier ceux d'Archimède. Leur livre le plus anciennement connu en occident, grâce à sa traduction par Gérard de Crémone au 12e siècle, est intitulé « Livre de la mesure des figures planes et sphériques ». Du point de vue des résultats, ce livre n'apporte rien de fondamental par rapport à Archimède. En revanche, les auteurs y amorcent un saut conceptuel crucial, en évoluant vers une notion de nombre plus générale. Par exemple π est considéré comme la *quantité* qui multipliée par le diamètre d'un cercle donne sa circonférence. Ceci donne un même statut à π, au diamètre et à la circonférence, au lieu de considérer comme les Grecs que π (un rapport) est de nature différente des deux autres quantités (qui sont des longueurs).

Entre autres réalisations remarquables, les frères Banu-Musâ ont écrit en 850 un « Livre des dispositifs ingénieux », dans lequel ils donnent les plans d'une centaine de dispositifs mécaniques et leurs instructions d'utilisation : manivelle, valve, soupape, masque à gaz, pompe, robinet, bouilloire, fontaine automatique, etc. Un de leurs chefs-d'œuvre est un orgue hydraulique entièrement automatique, qui fonctionnait avec des rouleaux à picots : un principe encore utilisé de nos jours. Une autre de leurs inventions musicales, la flûte automatique, est considérée comme la première machine programmable.

3.5 La numérisation des raisons

Au temps d'Euclide [1], les rapports de longueurs, ou raisons (*ratio* en latin), ne sont pas considérés et manipulés comme des nombres. Tout le Moyen-Âge arabe ou européen cherchera à apprivoiser une numérisation des raisons, avec des contributions remarquables comme celles d'Omar Kayyam (1049-1125) et Nicolas Oresme (1325-1382), par la pratique des proportions. Mais dans la mesure où on ne savait pas rendre compte d'une telle numérisation par une procédure théorique ayant la netteté de celle d'Euclide, il restait, dans la pratique des mathématiciens exigeants, une profonde différence de nature opératoire entre des quantités comme 1, 3, 5/3, $\sqrt{2}$ ou π. Cette différence est balayée d'un coup par Simon Stevin (1548-1620) dans son *traité des incommensurables grandeurs* en 1585. Voici ce qu'il écrit.

> C'est chose vulgaire, entre les auteurs d'arithmétique, de traiter de nombres comme $\sqrt{8}$ et semblables, et qu'ils appellent absurdes, irrationnels, irréguliers, sourds [2], etc. Ce que nous nions, à quelque nombre à venir. Mais par quelle raison l'adversaire le pourra-t-il prouver ? Il me dit premièrement que racine de 8 est à nombre arithmétique (comme 3 ou 4) incommensurable, *ergo* $\sqrt{8}$ est absurde. Vu que l'incommensurance ne cause pas d'absurdité des termes incommensurables, ce qui s'éprouve par la ligne et superficie qui sont grandeurs incommensurables ; c'est-à-dire qu'ils ne reçoivent point de commune mesure, toutefois ni ligne ni superficie n'est quantité absurde ni explicable : car disant que celle-là est la ligne et celle-ci, superficie, nous les expliquons. Et encore que cette incommensurance procréait (ce qui toutefois ne peut être, mais posons les cas) absurdité à l'une des quantités comparées, nous trouverons le nombre arithmétique autant coupable que

1. Ceci est tiré de *Mathématiques au fil des âges*, J. Dhombres et al. Gauthier-Villars (1987).
2. Le mot *sourd* vient du vocable arabe signifiant *irrationnel*.

> le radical, car, comme la sphère autant que le cube et le cube autant que la sphère, est cause de leur dissimilitude ; ainsi, de ces nombres. Mais pour faire autre preuve par deux quantités d'un même genre de grandeur, prenons le côté et diagonale d'un carré, qui sont les lignes entre elles (par la dernière proposition du livre X d'Euclide) incommensurables, toutefois ni diagonale, ni côté (abstrait de nombre) n'est ligne absurde ou irrationnelle, l'incommensurance donc des quantités n'est pas l'absurdité d'icelles, mais c'est plutôt leur naturelle mutuelle habitude.
>
> Il me manque de lui expliquer quelle chose soit $\sqrt{8}$. Je lui réponds qu'il m'explique quelle chose soit $3/4$ (qui selon son dire est rationnel) et je la lui expliquerai.

3.6 Les coupures de Dedekind

La construction rigoureuse de l'ensemble des réels ne date que de la seconde moitié du 19e siècle. De nombreux mathématiciens y ont participé, parmi eux Julius Dedekind (1831-1877). Voici ce qu'il écrivit dans « *Continuité et nombres rationnels* » en 1872, pour définir ce que l'on nommera *coupures de Dedekind*.

> [. . .] La comparaison faite ci-dessus entre le domaine des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non-lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?
>
> Tout doit être contenu dans la réponse donnée à cette question, et elle seule fournit un fondement scientifique aux recherches portant sur tous les domaines continus. On n'obtient rien bien sûr par de vagues discours sur la connexion ininterrompue existant dans les plus infimes parties ; il s'agit d'indiquer une caractéristique de la continuité, utilisable comme base de déductions effectives. J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu très trivial. Il consiste en ceci. Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :
>
> Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.

3.7 Point fixe d'une application croissante

Pour illustrer l'utilisation de la notion de borne supérieure, nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 7. *Soit f une application croissante de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même :*

$$\forall x, y \in [0,1]\ , \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\ .$$

Alors f admet un point fixe :

$$\exists a \in [0,1]\ , \quad f(a) = a\ .$$

Démonstration : Soit A l'ensemble des réels x dans $[0,1]$ tels que l'image de x dépasse x :

$$A = \{x \in [0,1]\ ,\ f(x) \geqslant x\}\ .$$

Par hypothèse l'ensemble A est non vide puisqu'il contient 0, et il est majoré par 1. Notons a sa borne supérieure. Nous allons montrer d'abord $f(a) \geqslant a$, puis $f(a) \leqslant a$.

Par la proposition 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$. Comme x est dans A, $f(x) \geqslant x$, et puisque f est croissante, $f(x) \leqslant f(a)$. Donc :

$$f(a) \geqslant f(x) \geqslant x \geqslant a - \varepsilon\ .$$

Pour tout ε, $f(a) \geqslant a - \varepsilon$, donc $f(a) \geqslant a$ par la proposition 3.

De $f(a) \geqslant a$, on déduit $f(f(a)) \geqslant f(a)$ car f est croissante. Donc $f(a) \in A$, par définition de A. Donc $f(a) \leqslant a$, car a est la borne supérieure de A. □

Vous pouvez refaire cette démonstration en remplaçant A par

$$B = \{x \in [0,1]\ ,\ f(x) \leqslant x\}\ ,$$

et en étudiant la borne inférieure de B.