UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **2014-2015**

UE Mat 123

Examen du 19 mai 2015

Durée 2h.
Documents et calculettes interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Les trois exercices sont indépendants.
Barème indicatif:5-4-6-5

Questions de cours.

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On suppose que la dérivée f' de f est positive sur I, montrer que la fonction f est croissante sur I. Enoncer soigneusement le théorème utilisé.

Que peut-on dire de f si f' est identiquement nulle sur I ? Justifiez votre réponse.

2) Justifier l'existence d'un développement limité à l'origine, à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la fontion arctan. Expliciter le développement limité à l'ordre 7 à l'origine de la fonction arctan en précisant la méthode utilisée.

Exercice I.

1) On note g la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par

$$g(x) = \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}.$$

En utilisant le développement limité de la fonction arctan à l'ordre 3 en 0, déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\frac{\arctan x}{x}$. En déduire le développement limité à l'ordre 1 de g au voisinage de 0 dans $]-\infty,0[$.

2) On note h la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}).$$

Déterminer le développement limité de la fonction $\ln(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})$ à l'ordre 3 en 0 (on pourra calculer la dérivée de la fonction $\ln(\frac{1+u}{1-u})$). En déduire le développement limité à l'ordre 1 de h au voisinage de 0 dans $]0,1[$.

3) On définit la fonction f sur $]-\infty,1[$ par

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} \quad \text{si} \quad x < 0,$$
$$f(0) = 1$$
$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}) \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-\infty,1[$.

Exercice II.

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre maximum de racines réelles distinctes des polynômes à coefficients réels de la forme

$$P(X) = X^n + bX + a.$$

1) Etude de quelques exemples. Soit a un nombre réel.

a) Soit λ un nombre réel positif ou nul. On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^5 + 5\lambda^4 x + a \quad \text{et} \quad f(x) = x^5 - 5\lambda^4 x + a.$$

Etudier les variations de f et g et en déduire le nombre maximum et le nombre minimum de racine réelles distinctess des polynômes associés aux fonctions f et g.

b) Soit μ un nombre réel. On considère la fonction h définie par

$$h(x) = x^4 + 4\mu^3 x + a.$$

Etudier les variations de h et en déduire le nombre maximum de racines réelles distinctes du polynôme associé à la fonction h.

Existe-t-il des valeurs de μ et de a pour lesquelles le polynôme associé à la fonction h n'a pas de racines réelles.

2) Etude du cas général.

a) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose la fonction f s'annule en k points distincts. Montrer que la dérivée f' de f s'annule en au moins $k-1$ points distincts.

b) En déduire que, si b et c sont deux nombres réels, le polynôme $P(X) = X^n + bX + c$, possède au plus trois racines réelles distinctes. (On pourra considérer la fonction $f(x) = x^n + bx + c$ et la dérivée seconde de f.)

Peut-on être plus précis lorsque n est pair ?

Exercice III.

Dans tout le problème, I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur I.

S'il existe deux réel k et α positifs ou nuls tels que pour tout x et y éléments de I,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|^\alpha,$$

on dit que f possède sur I la propriété $\mathcal{P}(k,\alpha)$.

A. *Cas où* $\alpha > 1$.

1) On suppose que f possède sur I la propriété $\mathcal{P}(k,3)$ avec $k > 0$.

a) Soit x_0 un point de I. Déterminer la limite de $|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}|$ quand x élément de I tend vers x_0, avec $x \neq x_0$.

b) Montrer que f est dérivable en tout point de I et déterminer sa fonction dérivée f'.

2) Déterminer toutes les fonctions définies sur I et vérifiant sur I la propriéé $\mathcal{P}(k,3)$, avec $k > 0$.

3) Etendre l'étude précédente au cas où f possède sur I la propriété $\mathcal{P}(k,\alpha)$ avec $\alpha > 1$ et $k > 0$.

B. *Cas où* $0 < \alpha \leq 1$.

1) Montrer que si la fonction f possède sur I la propriété $\mathcal{P}(k,\alpha)$ avec $0 < \alpha \leq 1$, f est continue sur I.

2) Montrer que si f est dérivable sur I et f' est bornée sur I alors f possède sur I la propriété $\mathcal{P}(k,1)$.