UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **2013-2014**

UE Mat 123

Examen du 12 mai 2014

Durée 2h.
Documents et calculettes interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.

La question de cours et les deux exercices sont indépendants.
Barème indicatif :4-8-3-5

Questions de cours.

1) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre n en $a \in \mathbb{R}$ pour une fonction f définie au voisinage de a. Donner des conditions sur la fonction f qui permettent d'assurer la validité de la formule.

2) Ecrire et justifier les développements limités suivants :
a) développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à l'ordre n en 0.
b) développement limité de $x \mapsto \ln(1-x)$ à l'ordre $n+1$ en 0.

Exercice I.

1) Déterminer le domaine de définition et étudier les variations de la fonction g définie par
$$g(x) = \frac{ln(x)}{x}.$$
Tracer le graphe de g.

2) En déduire, suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $e^{ax} = x$.

3) Le nombre réel a étant fixé, on définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_0 = 1 \quad , \quad u_{n+1} = e^{au_n},\ n \in \mathbb{N}.$$
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $u \in \mathbb{R}$, de quelle équation le nombre u est-il solution ?

4) Montrer que, pour $a > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Montrer que, pour $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$, on a $u_n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que, pour $0 \leq a \leq \frac{1}{e}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans quel intervalle se trouve sa limite u ?

5) On suppose $0 < a < \frac{1}{e}$ et on note encore u la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n - u| < (au)^n(e-1) \leq (ae)^n(e-1).$$

6) Pour $a > \frac{1}{e}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente?

Exercice II.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{x - \text{Arctan } x}{x^2}.$$

1) On pose $f(0) = a$. Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour cette valeur de a, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est-elle continue? Déterminer la pente de la tangente au graphe de f à l'origine.

Exercice III.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$.

On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Cette propriété sera notée $\mathcal{P}$ dans la suite.

1) Connaissez-vous des fonctions qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$? (Justifiez votre réponse.)

Dans la suite on se propose de montrer que toutes les fonctions qui sont les dérivées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifient la propriété $\mathcal{P}$.

Plus précisément, soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, on va montrer dans les questions qui suivent que f' vérifie $\mathcal{P}$.

On suppose que $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in \left]f'(a), f'(b)\right[$. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

2)Justifier qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$.

3) Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$. (On pourra raisonner par l'absurde et montrer que, si $c = a$, alors pour tout $x \in]a,b[$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \lambda$$

pour obtenir une contradiction puis faire un raisonnement analogue si $c = b$.)

4) Conclure.