UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **2014-2015**

UE Mat 123

Examen du 2? juin 2015

Durée 2h.
Documents et calculettes interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.

La question de cours et les deux exercices sont indépendants.
Barème indicatif :7-6-7

Questions de cours.

1) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
a) Donner la définition de la borne supérieure de A.
b) Traduire avec des quantificateurs l'assertion : α est la borne supérieure de A.

2) Enoncer le théorème des accroissements finis. Montrer que

$$0 \leq \sqrt{10^4+1} - 100 \leq 5\ 10^{-3}.$$

3) Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre n en $a \in \mathbb{R}$ pour une fonction f définie au voisinage de a. Donner des conditions sur la fonction f qui permettent d'assurer la validité de la formule.
Donner le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à l'ordre n en 0. Justifier votre réponse.

Exercice I.

On note I l'intervalle $]0, \frac{1}{\sqrt{6}}[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \frac{1}{10}$.

On note f la fonction, définie sur I par $f(x) = x - 2x^3$.

1) *Etude de la convergence*
a) Déterminer les variations de f sur I, en déduire que $f(I) \subset I$.
b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2) *Recherche d'un équivalent de u_n*
a) Déterminer la limite de $\frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.
b) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. Enoncer soigneusement le théorème utilisé.
c) Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2}\right).$$

On rappelle le théorème de Cesàro :

Théorème. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite définie pour tout entier naturel non nul. On définit la suite* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *pour tout entier naturel non nul* n*, par* $M_n = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$*. (*$M_n$ *est la moyenne arithmétique des* n *premiers termes de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*.)*

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers un nombre réel* l*, alors la suite* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge aussi vers* l*.*

d) Utiliser les résultats précédents et le Théorème de Cesàro pour donner un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice II.

1) Déterminer le domaine de définition et étudier les variations de la fonction $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$. (Pour déterminer le signe de f' on pourra étudier les variations de la fonction $h(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$.

2) Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à $\mathbb{R}$.

3) On considère pour $a \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\text{(E)} \qquad \tan(ax) = x.$$

a) Vérifier que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est solution de (E).

b) Quelles sont les solutions de (E) si $a = 0$?

c) On suppose désormais que $a \neq 0$. Déterminer le nombre de solutions de (E) en fonction de la valeur de a.