**UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER** **2013-2014**

**UE Mat 123**

**Examen du ?? juin 2014**

*Durée 2h.*
*Documents et calculettes interdits.*
*Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.*

*La question de cours et les deux exercices sont indépendants.*
*Barème indicatif :5-8-7*

**Questions de cours**.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Quand dit-on que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ? Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée.

2) Soit $B$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on note $\beta$ sa borne inférieure. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B$ qui converge vers $\beta$ quand $n$ tend vers l'infini.

3) Enoncer le théorème des accroissements finis. Montrer que

$$0 \leq \sqrt{10^4+1} - 100 \leq 5\ 10^{-3}.$$

**Exercice I**.

On veut étudier la fonction définie par $f(x) = x^2 \mathrm{Arctan}\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est-elle continue ? Déterminer la pente de la tangente au graphe de $f$ à l'origine.

3) On veut étudier le comportement de la fonction $f$ au voisinage de l'infini.

a) En utilisant par exemple le théorème des accroissements finis sur $[0,t]$, $t > 0$, montrer que $0 < \Phi(t) < t^3$, où $\Phi(t) = t - \mathrm{Arctan}\ t$.

b) En déduire que pour $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} < \mathrm{Arctan}\frac{1}{x} < \frac{1}{x}.$$

c) Montrer que le graphe de $f$ possède une asymptote, que l'on déterminera, lorsque $x \to +\infty$. Quelle est la position du graphe de $f$ par rapport à cette asymptote ?

**Exercice II**.

Soit $f$ une fonction continue croissante sur [0,1] telle que $f(0) < 0$ et $f(1) \geq -1$ ; on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ la fonction définie sur [0,1] par $f_n(x) = f(x) + x^n$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in [0,1]$.

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante (on pourra montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \leq 0$). En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente; soit $\alpha$ sa limite.

3) On suppose dans cette question que $f(1) < 0$.

a) Montrer que pour tout $\xi < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(\xi) < 0$.

b) En déduire que pour tout $\xi < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n > N$ alors $\alpha_n \in ]\xi,1]$.

c) Déterminer la valeur de $\alpha$.

4) On suppose maintenant que $f(1) \geq 0$.

a) Montrer qu'il existe un nombre réel $\beta \in ]0,1]$ tel que $f(\beta) = 0$ et $\beta = \inf\{x \in ]0,1] \mid f(x) = 0\}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \leq \beta$ (On pourra utiliser que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(\alpha_n) < 0$.).

c) Montrer que $\beta = \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et en déduire que $\alpha = \beta$.