UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **2013-2014**

UE Mat 123

Devoir surveillé du ? mars 2015

Durée 2h.
Documents et calculettes interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.

La question de cours et les trois exercices sont indépendants.
Barème indicatif :4-4-6-6

Questions de cours.

1) Soient a un nombre réel quelconque, α un nombre réel strictement positif et f une fonction à valeurs réelles, définie sur l'intervalle $]a - \alpha\ ,\ a + \alpha[$.

a) Définir l'assertion "la fonction f est continue au point a".

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'intervalle $]a - \alpha\ ,\ a + \alpha[$, qui converge vers a, quand n tend vers l'infini. On suppose que la fonction f est continue au point a, montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$, quand n tend vers l'infini.

2) Enoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice I.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Démontrer par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = f(2^{-n}x).$$

En déduire que f est constante (on pourra remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = 2^{-n}x$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini).

Exercice II.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur [0,1] par $f_n(x) = \sin(\frac{\pi}{2}(x - 1)) + x^n$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_n \in [0,1]$.

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante (on pourra montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \leq 0$). En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente; soit α sa limite.

3) Montrer que $\alpha = 0$.
(On pourra remarquer que, si $0 < \beta < 1$, alors $f_n(\beta) < 0$ pour n assez grand.)

Exercice III.

1) Pour $x > 0$, on pose
$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x}).$$

a) Donner le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer les valeurs de f en $x = 1$, $x = \sqrt{5}$, et $x = 5$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \sqrt{5}$.

c) Déterminer la droite asymptote au graphe de f en $+\infty$.

d) Tracer soigneusement le graphe de f (avec la tangente et l'asymptote déterminées précédemment).

2) On s'intéresse au comportement des suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Dessiner la construction des 3 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = \frac{5}{2}$.

b) Montrer que pour tout x dans $[1,\sqrt{5}]$, on a $f(x) \in [\sqrt{5},5]$. Montrer que pour tout x dans $[\sqrt{5},5]$, on a aussi $f(x) \in [\sqrt{5},5]$.

c) Montrer que si $u_0 \in [\sqrt{5},5]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{5}$.

d) Que se passe-t-il si $u_0 \in [1,\sqrt{5}]$?