UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **2013-2014**

UE Mat 123

Devoir surveillé du 19 mars 2014

Durée 2h.
Documents et calculettes interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.

La question de cours et les deux exercices sont indépendants.
Barème indicatif :6-8-6

Questions de cours.

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.
a) Quand dit-on que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes?
On suppose désormais que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

2) On considère la fonction $f(x) = x^2 - \sin(2x)$, vérifier que $f(\frac{\pi}{4}) < 0$ et que $f(\frac{3\pi}{4}) > 0$. En déduire que la fonction f s'annule en au moins un point de l'intervalle $]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$. Enoncer soigneusement le théorème utilisé.

Exercice I.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{4}.$$

1) Donner le tableau de variation de f et représenter le graphe de f.

2) Déterminer les points fixes de f et montrer que $f([0,2]) \subset [0,2]$ et que pour $x \in [-1,0]$ on a $-\frac{1}{2} \le \frac{x}{2} \le f(x) \le 0$.

3) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 2$?

4) En vous aidant d'un dessin pouvez vous deviner le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $u_0 = 1$, $u_0 = 3$ et $u_0 = -\frac{1}{2}$?

5) On suppose que $u_0 \in [0,2[$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite.

6) On suppose que $u_0 \in [-1,0]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in [-1,0] \quad \text{et} \quad |u_n| \le 2^{-n}.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

7) On suppose que $u_0 > 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

8) On suppose que $u_0 < -1$. Montrer qu'en fonction de la valeur de u_0 on peut se ramener à l'un des cas précédents.

Exercice II.

Pour tout $n \geq 2$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1.$$

1) Montrer que les fonctions f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour chaque fonction f_n il existe un unique nombre réel strictement positif u_n tel que

$$f(u_n) = 0.$$

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{2}{3}$ et croissante.

4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et montrer que sa limite l est l'unique racine positive de l'équation

$$l^2 + l - 1 = 0.$$