UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **2014-2015**

UE Mat 123

Devoir surveillé du 6 février 2015

Durée 1h30.
Documents et calculettes interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.

La question de cours et les deux exercices sont indépendants.
Barème indicatif :8-4-8

Questions de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

A–Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes et leurs négations :
1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

B– Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente.

C– Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Exercice I.

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{ r(x,y) = \frac{x-2y}{x+y+5} \mid x \in [-1,1], y \in [-1,1] \right\}.$$

1) Déterminer un majorant et un minorant de A.

2) On note B le sous ensemble de A défini par

$$B = \left\{ r(x,y) \in A \mid x = y \right\}.$$

a) Trouver un majorant et un minorant de B.
b) L'ensemble B possède-t-il une borne supérieure ?
c) Déterminer la borne supérieure de B si elle existe.

Exercice II.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à termes réels telles que $v_0 > u_0 > 0$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad 2v_{n+1} = u_n + v_n.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2) Démontrer l'égalité $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{2(u_n + v_n)}(v_n - u_n)$.

3) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).$$

4) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5) Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont la même limite $l > 0$.

6) Montrer que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7) On suppose dans cette question que $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$. Déterminer l dans ce cas. Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès de l à 10^{-2} à l'aide des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.