UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **2013-2014**

UE Mat 123

Devoir surveillé du 21 février 2014

Durée 1h30.
Documents et calculettes interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.

La question de cours et les exercices sont indépendants.
Barème indicatif : 6-4-6-4

Questions de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

A–Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes et leurs négations :
1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

B– Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente.

C– Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Exercice I.

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \Big\{\frac{2n}{m+3n},\ m,n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\Big\}.$$

1) L'ensemble A est-il majoré ? Si oui, déterminer sa borne supérieure.
2) L'ensemble A est-il minoré ? Si oui, déterminer sa borne inférieure.
3) En déduire que l'ensemble

$$B = \Big\{\frac{m+n}{m+3n},\ m,n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\Big\}.$$

admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice II.

L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. *Première méthode*

a) Démontrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

b) Calculer $\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$. En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

c) Démontrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge et donner un majorant de sa limite.

2. *Deuxième méthode*

On considère la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ t_n = s_n + \frac{1}{n}.$$

a) Démontrer que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

b) En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera S sa limite.

c) Donner, en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de S.

Exercice III.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.