

UE Mat 123

Devoir à rendre la semaine du 6 avril

On veut étudier la fonction définie par $f(x) = x^2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée est-elle continue? Déterminer la pente de la tangente au graphe de f à l'origine.

3) On veut étudier le comportement de la fonction f au voisinage de l'infini.

a) En utilisant par exemple le théorème des accroissements finis sur $[0, t]$, $t > 0$, montrer que $0 < \Phi(t) < t^3$, où $\Phi(t) = t - \operatorname{Arctan} t$.

b) En déduire que pour $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} < \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} < \frac{1}{x}.$$

c) Montrer que le graphe de f possède une asymptote, que l'on déterminera, lorsque $x \rightarrow +\infty$. Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette asymptote?