

Partiel d'octobre 2023

Durée : 1 heure

Documents, calculatrice et tous les objets connectés interdits

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 [4 points].

On considère l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

- 1) Donner la négation de cette assertion.
- 2) Démontrer que l'assertion est vraie, puis en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Exercice 2 [4 points].

Une balle rebondissante tombe d'une hauteur de 160 m. La hauteur atteinte par la balle diminue de 50 pour cent après chaque rebond.

Déterminer la hauteur lors du deuxième rebond de cette balle, puis lors du troisième rebond.

Exercice 3 [2 points].

Le pH d'une solution aqueuse est donnée par $-\log[H_3O^+]$ où \log est le logarithme en base 10 et $[H_3O^+]$ est la concentration en ions hydronium en moles par litre.

- 1) On rappelle que $\log x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour $x > 0$. Déterminer $\log(10^n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
- 2) Calculer le pH d'un jus de citron dont la concentration en ions hydronium est de 0,0005.

Exercice 4 [10 points].

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes (Faire attention aux domaines de définition).

$$\frac{2x + 1}{x - 1} < 1.$$

$$\ln(x + 2) = \ln(3x - 3).$$

$$\ln(3x + 2) - \ln(x) = 1.$$

$$e^{3x-1} \cdot e^{x+2} = 1.$$

$$e^{2x} - e^x - 6 \geq 0.$$