Limites et continuité

Bernard Ycart

Vous avez déjà une compréhension intuitive de ce qu'est la limite d'une fonction. Ce chapitre n'en est pas moins le plus important de votre cours d'analyse. C'est l'occasion ou jamais de comprendre les epsilons ! Votre travail devrait être facilité si vous avez déjà assimilé le chapitre sur les suites, mais ce n'est pas indispensable.

Table des matières

8 novembre 2011

1 Cours

1.1 Vocabulaire

Une *fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ est définie par son *graphe* : c'est un sous-ensemble Γ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, au plus un réel y vérifie $(x, y) \in \Gamma$. S'il existe, ce réel y est l'*image* de x et est noté $f(x)$. L'ensemble des x qui ont une image par f est le *domaine de définition* de f. Nous le noterons $\mathcal{D}_f$. La notation standard est la suivante :

$$\begin{array}{rcl} & f & \\ \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Si A est un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$, l'*image* de A, notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A.

$$f(A) = \{\, f(x)\,,\; x \in A \,\}$$

Si B est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, l'*image réciproque* de B, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des *antécédents* des éléments de B.

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in \mathcal{D}_f\,,\; f(x) \in B \,\}$$

Attention à la notation f^{-1} : $f^{-1}(B)$ est défini même si f n'est pas bijective. Par exemple, si f est l'application valeur absolue, $x \mapsto |x|$,

$$f(]-2, 1[) = [0, 2[\quad \text{et} \quad f^{-1}([1, 2]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

Définition 1. *Soit f une fonction, de domaine de définition $\mathcal{D}_f$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :*

- constante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\,, \quad f(x) = f(y)$
- croissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\,, \quad (x \leqslant y) \Longrightarrow (f(x) \leqslant f(y))$
- décroissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\,, \quad (x \leqslant y) \Longrightarrow (f(x) \geqslant f(y))$
- strictement croissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\,, \quad (x < y) \Longrightarrow (f(x) < f(y))$
- strictement décroissante *si* $\forall x, y \in \mathcal{D}_f\,, \quad (x < y) \Longrightarrow (f(x) > f(y))$
- monotone *si elle est croissante ou décroissante*
- majorée *si $f(\mathcal{D}_f)$ est majoré*
- minorée *si $f(\mathcal{D}_f)$ est minoré*
- bornée *si $f(\mathcal{D}_f)$ est borné*

Le plus souvent, ces définitions s'appliqueront à des *restrictions* de f à un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$.

$$\begin{array}{rcl} & f_{|I} & \\ I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 2. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{D}_f$. Soit P une des propriétés de la définition 1. On dit que f possède la propriété P*

- au voisinage de x *s'il existe un intervalle ouvert I contenant x, tel que la restriction de f à I possède la propriété P.*
- au voisinage de $+\infty$ *s'il existe un réel A tel que la restriction de f à $]A, +\infty[$ possède la propriété P.*
- au voisinage de $-\infty$ *s'il existe un réel A tel que la restriction de f à $]-\infty, A[$ possède la propriété P.*

Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$, est :

- décroissante au voisinage de $-\infty$
- décroissante au voisinage de -1
- croissante au voisinage de 1
- croissante au voisinage de $+\infty$
- bornée au voisinage de 0

Les opérations sur les réels s'étendent aux fonctions de manière naturelle.

- *addition :*
$$\begin{array}{rcl} & f+g & \\ \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$
- *multiplication :*
$$\begin{array}{rcl} & fg & \\ \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (fg)(x) = f(x)g(x) \end{array}$$
- *multiplication par un réel :*
$$\begin{array}{rcl} & \lambda f & \\ \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \end{array}$$
- *comparaison :*
$$f \leqslant g \iff \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \,,\; f(x) \leqslant g(x)$$

L'addition a les mêmes propriétés que celle des réels : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition est un groupe commutatif. Muni de l'addition et de la multiplication par un réel, c'est un espace vectoriel. Cependant, le produit de deux fonctions peut être nul sans que les deux fonctions le soient.

1.2 Convergence

Nous commençons par la convergence en un point, vers une limite finie. Afin d'éviter les cas pathologiques, nous supposerons toujours que les fonctions étudiées sont définies *au voisinage* du point considéré (cf. définition 2).

Définition 3. *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit l un réel. On dit que f* tend vers *l quand x tend vers a, ou que f* a pour limite *l en a si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,, \quad (0 < |x-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow (|f(x) - l| \leqslant \varepsilon) \tag{1}$$

On notera :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \textit{ou bien} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l\,.$$

Tout intervalle centré en l contient toutes les valeurs $f(x)$, pour x suffisamment proche de a. Observez que f peut très bien ne pas être définie en a, et admettre quand même une limite en a. Voici un premier exemple (figure 1).

$$\begin{array}{rcl} & f & \\ \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x\sin(1/x) \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin(1/x) \leqslant 1$. Donc si $|x| \leqslant \varepsilon$ et $x \neq 0$, alors $|x\sin(1/x)| \leqslant \varepsilon$:

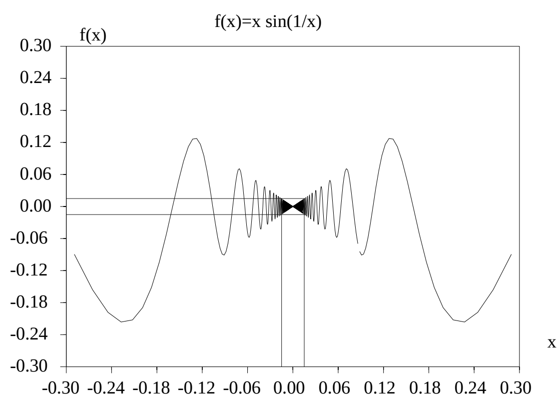

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $x \mapsto x\sin(1/x)$.

$f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

La convergence peut se caractériser en termes de suites.

Théorème 1. *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit l un réel. La fonction f tend vers l quand x tend vers a, si et seulement si, pour toute suite (x_n), à valeurs dans $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ et convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers l.*

Démonstration : Montrons d'abord la condition nécessaire : si f tend vers l au sens de la définition 3, alors pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers l.

Soit $\varepsilon > 0$, et η tel que si $0 < |x - a| \leqslant \eta$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$. Soit (x_n) une suite de $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ convergeant vers a. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < |x_n - a| \leqslant \eta$. Mais $0 < |x_n - a| \leqslant \eta$ entraîne $|f(x_n) - l| \leqslant \varepsilon$, par hypothèse. Donc la suite $(f(x_n))$ converge vers l.

Voici maintenant la condition suffisante, dont nous allons démontrer la contraposée : si f ne tend pas vers l, alors il existe une suite (x_n) convergeant vers a telle que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers l. Ecrivons donc que f ne tend pas vers l.

$$\exists \varepsilon > 0\,,\ \forall \eta > 0\ , \quad \exists x \in \mathcal{D}_f\ , \quad (0 < |x - a| \leqslant \eta) \wedge (|f(x) - l| > \varepsilon)$$

Posons $\eta = 1/n$:

$$\exists x \in \mathcal{D}_f\ , \quad (0 < |x - a| \leqslant 1/n) \wedge (|f(x) - l| > \varepsilon)$$

Notons x_n un des réels dont l'existence est affirmée ci-dessus. La suite (x_n) converge vers a car $|x_n - a| < 1/n$, pourtant la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers l, car $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$.
$\square$

Voici deux conséquences faciles de la définition.

Proposition 1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel.*

1. *Si $f(x)$ converge quand x tend vers a, alors la limite est unique.*
2. *Si $a \in \mathcal{D}_f$ et si $f(x)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors f est bornée au voisinage de a.*

Démonstration :

1. Supposons que f vérifie la définition 3 pour deux réels l et l' distincts. Posons $\varepsilon = |l - l'|/3$. Alors les intervalles $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ et $[l' - \varepsilon, l' + \varepsilon]$ sont disjoints. Pour x suffisamment proche de a, le réel $f(x)$ devrait appartenir aux deux intervalles à la fois : c'est impossible.
2. Fixons $\varepsilon > 0$, et η tel que $f(x)$ reste dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ pour tout $0 < |x - a| \leqslant \eta$. Alors :

   $$\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \cap \mathcal{D}_f\ , \quad f(x) \leqslant l + \varepsilon$$

   et

   $$\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \cap \mathcal{D}_f\ , \quad f(x) \geqslant l - \varepsilon$$

   Donc f est majorée et minorée au voisinage de a.

$\square$

1.3 Opérations sur les limites

La notion de limite se combine avec les opérations sur les fonctions comme on l'attend. Nous énoncerons les résultats dans le théorème 2. Ils peuvent se déduire des résultats analogues sur les suites numériques, via le théorème 1. Nous conseillons au lecteur de le vérifier, puis de comparer cette approche avec les démonstrations directes qui suivent. Elles sont basées sur le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit a un réel. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies au voisinage de a, sauf peut-être en a.*

1. *Si*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
alors
$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = 0$$
2. *Si f est bornée au voisinage de a et*
$$\lim_{x\to a} g(x) = 0\ ,$$
alors
$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0$$

Démonstration :

1. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit η_1 tel que pour $0 < |x-a| \leqslant \eta_1$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon/2$. De même, soit η_2 tel que pour $0 < |x-a| \leqslant \eta_2$, $|g(x)| < \varepsilon/2$. Alors, pour $0 < |x-a| \leqslant \min\{\eta_1, \eta_2\}$,
$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$
d'où le résultat.
2. Soit η_1 et M deux réels tels que
$$\forall x \in [a-\eta_1, a+\eta_1]\ , \quad |f(x)| \leqslant M\ .$$
Fixons $\varepsilon > 0$. Soit η_2 tel que pour $0 < |x-a| \leqslant \eta_2$, $|g(x)| \leqslant \varepsilon/M$. Alors, pour $0 < |x-a| \leqslant \min\{\eta_1, \eta_2\}$,
$$|(fg)(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leqslant M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\ ,$$
d'où le résultat.

□

Théorème 2. *Soit a un réel. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies sur un intervalle ouvert autour de a.*

1. *Si*
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad et \quad \lim_{x\to a} g(x) = l'$$
alors
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + l'$$
2. *Si*
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad et \quad \lim_{x\to a} g(x) = l'$$
alors
$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = ll'$$

Démonstration : Pour nous ramener au lemme 1, observons d'abord que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, si et seulement si $f(x) - l$ tend vers 0.

1. Quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers l et $g(x)$ tend vers l', donc $f(x)-l$ et $g(x)-l'$ tendent vers 0. Donc
$$f(x) - l + g(x) - l' = (f+g)(x) - (l+l')$$
tend vers 0 d'après le point *1.* du lemme 1. D'où le résultat.
2. Nous voulons montrer que $f(x)g(x) - ll'$ tend vers 0. Ecrivons :
$$f(x)g(x) - ll' = f(x)(g(x) - l') + (f(x) - l)l' \ .$$
Il suffit de montrer séparément que les deux fonctions $f(g-l')$ et $(f-l)l'$ tendent vers 0, d'après le premier point du lemme 1. Mais chacune de ces deux fonctions est le produit d'une fonction convergeant vers 0 par une fonction bornée au voisinage de 0 (f est bornée au voisinage de 0 car elle converge). D'où le résultat, par le point *2.* du lemme 1.

□

Si une application est constante, sa limite en tout point est égale à cette constante. Comme cas particulier du théorème 2, si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, et λ est un réel quelconque, alors la limite en a de $\lambda f(x)$ est λl.

Le résultat attendu sur la composition des limites se vérifie, à un détail près.

Théorème 3. *Soient a et b deux réels. Soit f et g deux fonctions définies respectivement au voisinage de a et au voisinage de b, g étant définie en b. On suppose :*
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad et \quad \lim_{y\to b} g(y) = g(b) \ .$$
Alors
$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = g(b) \ .$$

Démonstration : Soit ε un réel strictement positif. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$|y - b| \leqslant \eta_1 \implies |g(y) - g(b)| \leqslant \varepsilon$$

Il existe η_2 tel que

$$0 < |x - a| \leqslant \eta_2 \implies |f(x) - b| \leqslant \eta_1$$

Donc :

$$0 < |x - a| \leqslant \eta_2 \implies |g(f(x)) - g(b)| \leqslant \varepsilon$$

□

1.4 Limites unilatérales

Une fonction f peut converger vers une limite finie, comme nous l'avons vu précédemment, ou bien $+\infty$ ou $-\infty$. De plus les valeurs de la variable, qui approchaient a des deux côtés dans les définitions précédentes, peuvent ne l'approcher que d'un seul côté : ce sont les notions de limite à gauche, et de limite à droite. On peut aussi chercher une limite quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Au total, ce ne sont pas moins de 15 définitions différentes que nous devons donner. Vous reconnaîtrez dans ces définitions un principe général : $f(x)$ tend vers l (fini ou infini) quand x tend vers a (fini ou infini), si pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a \setminus \{a\}) \subset V_l$. La définition précise de la notion de voisinage relève de la topologie, et dépasse le cadre de ce cours. Un voisinage de $+\infty$ sera compris comme un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. De même, un voisinage de $-\infty$ sera un intervalle de la forme $]-\infty, A]$. Un « voisinage à gauche » d'un réel a sera un intervalle du type $[a - \varepsilon, a[$, tandis qu'un « voisinage à droite » sera de la forme $]a, a + \varepsilon]$. Nous donnons les différentes définitions sous forme de tableaux. Plutôt que d'apprendre les 5 tableaux par cœur, il est conseillé d'en comprendre le principe pour être capable de retrouver ces définitions en cas de besoin.

Limites bilatérales		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\,\exists\eta\,,\ 0 < \lvert x - a\rvert \leqslant \eta \Longrightarrow \lvert f(x) - l\rvert \leqslant \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ 0 < \lvert x - a\rvert \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$	$\lim\limits_{x\to 0} 1/\lvert x\rvert = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ 0 < \lvert x - a\rvert \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A$	$\lim\limits_{x\to 0} -1/\lvert x\rvert = -\infty$

Limites à gauche		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\,\exists\eta\,,\ a - \eta \leqslant x < a \Longrightarrow \lvert f(x) - l\rvert \leqslant \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to 0^-} x/\lvert x\rvert = -1$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ a - \eta \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \geqslant A$	$\lim\limits_{x\to 0^-} -1/x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	$\forall A\,\exists\eta\,,\ a - \eta \leqslant x < a \Longrightarrow f(x) \leqslant A$	$\lim\limits_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$

Limites à droite		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\, \exists\eta\,,\ a < x \leqslant a+\eta \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x/\lvert x\rvert = +1$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\forall A\, \exists\eta\,,\ a < x \leqslant a+\eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$	$\lim\limits_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\forall A\, \exists\eta\,,\ a < x \leqslant a+\eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A$	$\lim\limits_{x\to 0^+} -1/x = -\infty$

La limite bilatérale des sections précédentes peut se caractériser en termes de limites à gauche et à droite.

Proposition 2. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel. La fonction f admet l pour limite en a, si et seulement si elle admet l pour limite à gauche et à droite en a.*

Démonstration : Nous le démontrons pour une limite finie. Ce qui suit est facile à adapter à une limite infinie. La condition nécessaire est évidente au vu des définitions. Pour la condition suffisante, supposons

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe η_1 et η_2 tels que

$$a - \eta_1 \leqslant x < a \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad a < x \leqslant a + \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Prenons $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, alors

$$0 < |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\ .$$

□

Voici maintenant les définitions des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Limites en $-\infty$		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\, \exists B\,,\ x \leqslant B \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to -\infty} 1/x = 0$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	$\forall A\, \exists B\,,\ x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$	$\lim\limits_{x\to -\infty} -x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$	$\forall A\, \exists B\,,\ x \leqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

Limites en $+\infty$		
Notation	Définition	Exemple
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$	$\forall\varepsilon\, \exists B\,,\ x \geqslant B \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leqslant \varepsilon$	$\lim\limits_{x\to +\infty} 1/x = 0$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$	$\forall A\, \exists B\,,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	$\forall A\, \exists B\,,\ x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant A$	$\lim\limits_{x\to +\infty} -x = -\infty$

Pour chacune de ces définitions, il existe une caractérisation en termes de suites, analogue au théorème 1. Par exemple, la limite à gauche de f en a vaut $-\infty$ si et seulement si pour toute suite (x_n) convergeant vers a et telle que pour tout n, $x_n < a$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $-\infty$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, à titre d'exercice, chacune de ces caractérisations, sur le modèle du théorème 1.

En ce qui concerne les opérations, le théorème 2 s'étend aux limites à gauche, à droite, en $-\infty$ et en $+\infty$, sans aucune difficulté. Les seuls problèmes viennent des limites éventuellement infinies. Dans le cas où les limites de f et g peuvent être infinies, différentes situations peuvent se produire pour la somme et le produit. Nous les résumons dans les tableaux 1 et 2. Dans ces deux tableaux, lim désigne indifféremment une limite bilatérale, à gauche, à droite, en $-\infty$ ou en $+\infty$ (du même type pour f et g). Les points d'interrogations sont des formes indéterminées : tous les cas sont possibles. Par exemple :

- $f(x) = 1/|x|$, $g(x) = -1/|x|$: $f + g$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
- $f(x) = 1/|x|$, $v_n = -1/x^2$: $f + g$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0.
- $f(x) = 1/|x|$, $g(x) = \sin(1/x) - 1/|x|$: $f + g$ n'a pas de limite en 0.

$\lim f(x) \setminus \lim g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Table 1 – Limites possibles de $f + g$ en fonction des limites de f et g.

$\lim f(x) \setminus \lim g(x)$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Table 2 – Limites possibles de fg en fonction des limites de f et g.

Mises à part les formes indéterminées, chacune des cases des tableaux 1 et 2 résume 5 théorèmes : un pour chacun des différents types de limites. Il est conseillé au lecteur de les démontrer, soit directement sur le modèle du théorème 2, soit en utilisant la caractérisation par les suites évoquée plus haut.

1.5 Convergence des fonctions monotones

Comme pour les suites, « la monotonie entraîne l'existence de limites ».

Théorème 4. *Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert, et f une fonction croissante sur $]a, b[$. Les limites de f à droite en a et à gauche en b existent et :*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf(f(]a, b[)) \quad ; \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup(f(]a, b[))$$

Démonstration : Supposons d'abord que f est minorée : $f(]a, b[)$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure finie, notons-la l. Soit ε un réel positif fixé. Par définition de la borne inférieure, il existe $c \in]a, b[$ tel que $l \leqslant f(c) \leqslant l + \varepsilon$. Mais alors, puisque f est croissante,

$$a < x \leqslant c \Longrightarrow l \leqslant f(x) \leqslant l + \varepsilon$$

Donc f admet l pour limite à droite en a. Si f n'est pas minorée, pour tout A, il existe $c \in]a, b[$, tel que $f(c) \leqslant A$. Puisque f est croissante :

$$a < x \leqslant c \Longrightarrow f(x) \leqslant f(c) \leqslant A$$

Donc la limite à droite de f en a est $-\infty$.

Pour la limite à gauche en b, on procède de manière analogue, en distinguant le cas où f est majorée, du cas où elle ne l'est pas. □

L'énoncé du théorème 4, reste vrai si $a = -\infty$, ou $b = +\infty$. Evidemment, le même résultat vaut pour une fonction décroissante, en inversant le rôle de sup et inf. On retiendra que

toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de cet intervalle.

La limite à gauche peut très bien ne pas être égale à la limite à droite. Par exemple, la fonction « partie entière » est croissante sur $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

1.6 Comparaison de fonctions

Dans cette section, a est un réel quelconque, et nous considérons la limite (bilatérale) d'une fonction f en a, au sens de la définition 3. Toutes les fonctions sont supposées être définies au voisinage de a, sauf peut-être en a.

Tous les résultats de la section valent aussi pour des limites à gauche, à droite, en $-\infty$ et en $+\infty$. L'adaptation des démonstrations aux autres types de limite est un exercice conseillé.

Le résultat de base pour comparer deux limites est le suivant.

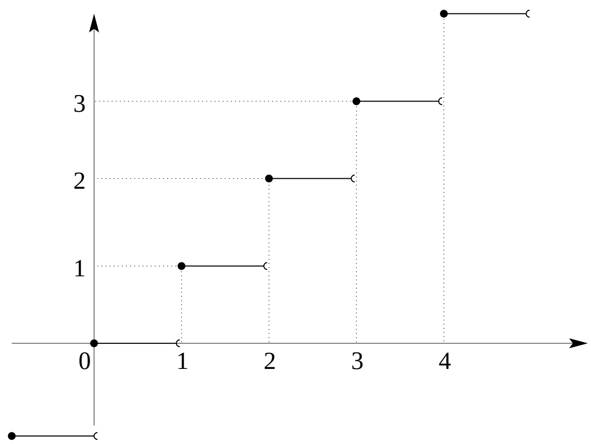

FIGURE 2 – Graphe de la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Théorème 5. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x) \ .$$

Démonstration : Supposons $\lim f(x) > \lim g(x)$. Alors la limite en a de la fonction $f-g$ est strictement positive. Notons l cette limite. Il existe $\eta > 0$ tel que $0 < |x-a| \leqslant \eta$ entraîne $f(x) - g(x) \in [\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}]$, donc $f(x) - g(x) > 0$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Le fait de supposer $f(x) < g(x)$ ne renforce pas la conclusion : bien que $|x| < 2|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to 0} |x| = \lim_{x \to 0} 2|x| = 0 \ .$$

Le théorème 5 ne permet pas de démontrer que l'une des deux fonctions f ou g converge en a. Pour cela, on utilise souvent le résultat suivant.

Théorème 6. *Soient f et g deux fonctions telles que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a. S'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant |g(x)|$, alors $f(x)$ tend vers 0 en a.*

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η tel que pour $0 < |x-a| \leqslant \eta$:

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

d'où le résultat. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soient f, g et h trois fonctions telles que quand x tend vers a, $f(x)$ et $h(x)$ convergent vers la même limite l. Supposons de plus qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a, tel que pour tout $x \in I$,*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \ .$$

alors $g(x)$ converge vers l.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 6 aux deux fonctions $h - g$ et $h - f$. □

Soit par exemple

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x \sin(1/x) \end{array}$$

Posons $f(x) = -|x|$, $h(x) = |x|$. Les deux fonctions f et h tendent vers 0 en 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, comme f et h (cf. figure 1).

La comparaison vaut aussi pour les limites infinies.

Théorème 7. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. Supposons que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.*

1.

$$\textit{Si } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty \ .$$

2.

$$\textit{Si } \lim_{x \to a} g(x) = -\infty \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \ .$$

Démonstration : Pour tout A, il existe η tel que pour $0 < |x - a| < \eta$:

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant A \ ,$$

donc g tend vers $+\infty$ si f tend vers $+\infty$. La démonstration de l'autre affirmation est analogue. □

Le vocabulaire de la comparaison des fonctions est analogue à celui des suites, avec la difficulté supplémentaire qu'il faut toujours savoir de quelle limite il s'agit (bilatérale, à gauche, à droite, en $-\infty$ ou en $+\infty$). Nous écrivons la définition ci-dessous pour des limites bilatérales en a, elle s'adapte sans problème aux 4 autres types de limites.

Définition 4. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a.*

1. *On dit que la fonction f est* dominée *par la fonction g au voisinage de a si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in I\ , \quad |f(x)| \leq M|g(x)|\ .$$

On écrit $f(x) = O(g(x))$, qui se lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ » (au voisinage de a).

2. *On dit que la fonction f est* négligeable *devant la fonction g si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\ , \quad 0 < |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|\ .$$

On écrit $f(x) = o(g(x))$, qui se lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ » (au voisinage de a).

3. *On dit que la fonction f est* équivalente *à la fonction g si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\ , \quad 0 < |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|\ .$$

On écrit $f(x) \sim g(x)$, qui se lit « $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ » (au voisinage de a).

Très souvent, on appliquera ces définitions pour une fonction g non nulle au voisinage de a, sauf peut-être en a ; dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport $f(x)/g(x)$.

Proposition 3. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.*

1. *f est* dominée *par g au voisinage de a si et seulement si le quotient f/g est borné :*

$$\exists M \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in I \setminus \{a\}\ , \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M\ .$$

2. *f est* négligeable *devant g si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\ , \quad 0 < |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant \varepsilon\ .$$

3. *f est* équivalente *à g si et seulement si le quotient f/g tend vers 1 :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\ , \quad 0 < |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon\ .$$

Par exemple, au voisinage de 0 :

$$\sqrt{4x^2+9x} = O(\sqrt{x})\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} = o(x^{1/4})\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} \sim 3\sqrt{x}\ .$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{4x^2+9x} = O(x)\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} = o(x^2)\ ,\ \sqrt{4x^2+9x} \sim 2x\ .$$

Insistons sur la nécessité de bien préciser le type de limite que l'on considère. Le plus souvent, il s'agira de limites en $+\infty$ ou de limites à droite en 0. On passe des unes aux autres en remplaçant la variable x par $y = 1/x$. Pour étudier une limite en a, on se ramène à une limite en 0 en posant $x - a = y$. Le changement de variable $y = -x$ permet de passer des limites à gauche aux limites à droite, des limites en $-\infty$ aux limites en $+\infty$.

Observons que $f(x) = o(g(x))$ entraîne $f(x) + g(x) \sim g(x)$, ce qui est particulièrement utile pour les polynômes. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $f_1(x) \sim g_1(x)$, et $f_2(x) \sim g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$. Par contre il ne faut pas les utiliser pour des sommes. Par exemple, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x + \sin(x) \sim x \quad \text{et} \quad g(x) = -x + \sin(x) \sim -x$$

Pourtant, $f(x) + g(x)$ n'est pas équivalent à 0.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2}} \;.$$

Commençons par les limites à droite en 0. Le numérateur tend vers 1 en 0. Pour le dénominateur $8x^3 = o(x^2)$, donc $f(x) \sim x^{-2/3}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^{-2/3}} = 1$$

Considérons maintenant les limites en $+\infty$. Puisque $x + 1 = o(x^2)$, $x^2 + x + 1 \sim x^2$ et $\sqrt{x^2 + x + 1} \sim x$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8x^3 + x^2} \sim 2x$, donc $f(x)$ tend vers $1/2$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Nous admettrons pour l'instant les équivalents suivants au voisinage de 0, qui seront justifiés plus loin. Vous devez les connaître par cœur.

Théorème 8. *Au voisinage de* 0, $\sin(x)$, $\mathrm{e}^x - 1$ *et* $\ln(1 + x)$ *sont équivalents à* x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Nous rassemblons dans la section suivante d'autres limites classiques concernant l'exponentielle et le logarithme, qu'il est également bon de connaître.

1.7 Limites à connaître

Les limites étudiées dans cette section permettent de comparer exponentielles, logarithmes et puissances de x. Vous connaissez certainement déjà le comportement de ces fonctions au voisinage de 0 et de $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Vous connaissez sans doute aussi le résultat suivant.

Proposition 4. *Soit b un réel strictement positif.*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-bx} = 0\;.$$

Démonstration : Posons $f(x) = \mathrm{e}^{-bx}$. La fonction f est décroissante, donc elle admet une limite en $+\infty$. Pour identifier cette limite, il suffit de trouver la limite de la suite (e^{-bx_n}), où (x_n) est une suite particulière tendant vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = n\ln(2)/b$. Comme $\ln(2) \simeq 0.69$ et b sont positifs, (x_n) tend vers $+\infty$. On a $\mathrm{e}^{-bx_n} = 2^{-n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. □

Proposition 5. *Soient a et b deux réels strictement positifs.*

$$\lim_{x\to+\infty} x^a\mathrm{e}^{-bx} = 0\;.$$

Démonstration : Posons $f(x) = x^a\mathrm{e}^{-bx}$. L'étude des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$, montre qu'elle est croissante sur $[0, a/b]$, décroissante sur $[a/b, +\infty[$. Comme elle est minorée par 0, elle admet une limite en $+\infty$. Comme $f(x) \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$, la limite de f en $+\infty$ est positive ou nulle. Il nous reste à montrer qu'elle est nulle. Pour cela observons que ce que nous avons dit de f reste vrai si on remplace b par $b/2$: la fonction qui à x associe $x^a\mathrm{e}^{-(b/2)x}$ admet un maximum en $x = 2a/b$. On a donc :

$$f(x) = x^a\mathrm{e}^{-bx} = x^a\mathrm{e}^{-(b/2)x}\mathrm{e}^{-(b/2)x} \leqslant (2a/b)^a\mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{-(b/2)x}$$

Or $\mathrm{e}^{-(b/2)x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (proposition 4). D'où le résultat. □

Ce résultat peut paraître paradoxal : si $a = 100$, x^{100} croît très vite ($2^{100} \simeq 10^{30}$), et si $b = 0.01$, e^{-bx} décroît lentement ($\mathrm{e}^{-0.02} \simeq 0.98$). Pourtant, c'est l'exponentielle qui finit par l'emporter et la limite en $+\infty$ est nulle.

On retiendra que :

l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x,
les puissances de x l'emportent sur le logarithme.

C'est un moyen mnémotechnique de lever des indéterminations du type $0 \times \infty$ dans les calculs de limite : si l'un des facteurs « l'emporte » sur l'autre, c'est lui qui dicte la limite. Par exemple, dans la proposition 5, la limite de $x^a \mathrm{e}^{-bx}$ est la même que celle de e^{-bx}, bien que x^a tende vers $+\infty$. Nous rassemblons dans la proposition ci-après quelques exemples de limites du même type que celle de la proposition 5. Toutes s'en déduisent par des changements de variables : c'est un exercice facile que nous vous conseillons.

Proposition 6. *Soient a et b deux réels strictement positifs.*

$$\begin{array}{rl} \lim\limits_{x \to +\infty} x^a \mathrm{e}^{-bx} = 0 & \lim\limits_{x \to +\infty} x^{-a} \mathrm{e}^{bx} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^a \mathrm{e}^{bx} = 0 & \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{-a} \mathrm{e}^{-bx} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x))^a x^{-b} = 0 & \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x))^{-a} x^{b} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} |\ln(x)|^a x^b = 0 & \lim\limits_{x \to 0^+} |\ln(x)|^{-a} x^{-b} = +\infty\ . \end{array}$$

1.8 Continuité en un point

Une fonction f est *continue* en a quand elle admet $f(a)$ comme limite en a.

Définition 5. *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est :*

1. continue *en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

soit :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad |x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

2. continue à gauche *en a si*

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

soit :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad 0 \leqslant a - x \leqslant \eta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

3. continue à droite *en a si*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

soit :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad 0 \leqslant x - a \leqslant \eta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Par exemple la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a si a n'est pas un entier. Elle est continue à droite (mais pas à gauche) en a si a est entier : voir figure 2.

On déduit du théorème 1 une caractérisation de la continuité en termes de suites.

Théorème 9. *La fonction f est continue en a, si et seulement si pour toute suite de réels (x_n) telle que $\forall n\,,\ x_n \in \mathcal{D}_f$ et convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Observons que si une fonction est continue en un point, elle est nécessairement définie en ce point. Nous avons vu qu'une fonction f pouvait admettre une limite en a, sans être définie en a. Si c'est le cas, on appelle *prolongement par continuité* de f en a, la fonction $\overline{f}$, définie sur $\mathcal{D}_f \cup \{a\}$, et telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\ ,\ \overline{f}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \overline{f}(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Par exemple,

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x\sin(1/x) \end{array}$$

Cette fonction peut être prolongée par continuité en 0 :

$$\begin{array}{ccl} & \overline{f} & \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \overline{f}(x) = x\sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & \overline{f}(0) = 0 \end{array}$$

Des théorèmes 2 et 3, on déduit que la somme, le produit, la composée de deux fonctions continues sont continues.

Théorème 10. *Soient f et g deux fonctions. Soit a un réel.*

1. *Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et fg sont continues en a.*
2. *Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Ce théorème permet de démontrer la continuité de toutes les fonctions que vous aurez à examiner, à condition d'admettre la continuité des « briques de base » que sont les fonctions usuelles.

Toutes les fonctions usuelles sont continues en tout point où elles sont définies

Ceci concerne les fonctions puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, mais exclut bien sûr la partie entière et la partie décimale.

À titre d'exemple, nous allons le démontrer pour la fonction $x \mapsto 1/x$.

Proposition 7. *La fonction f qui à x associe $1/x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.*

Démonstration : Soit a un réel non nul. Soit $\varepsilon > 0$. Notons

$$\eta = \min\{\varepsilon a^2/2, |a|/2\}$$

Si $|x-a| \leqslant \eta$, alors $|x| \geqslant |a|/2$. Donc :

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|a|\,|x|} \leqslant \frac{|x-a|}{a^2/2}$$

Donc, $|x-a| \leqslant \eta$ entraîne $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$. □

Les fonctions constantes, ainsi que la fonction identité $x \mapsto x$ sont évidemment continues en tout point de $\mathbb{R}$. Du théorème 10, on déduit qu'il en est de même pour les fonctions polynômes. En utilisant la proposition 7, on obtient que toute *fraction rationnelle* (quotient de deux fonctions polynômes) est continue en tout point où son dénominateur ne s'annule pas.

1.9 Continuité sur un intervalle

Définition 6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On dit que f est* continue sur I *si f est continue en tout point de I.*

Cette définition comporte une petite ambiguïté pour les intervalles qui ne sont pas ouverts. Nous conviendrons qu'une fonction continue sur $[a,b]$ est continue en tout point de $]a,b[$ et que de plus, elle est continue à droite en a et à gauche en b.

Le résultat important de cette section est le *théorème des valeurs intermédiaires.*

Théorème 11. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Soit*

$$m = \inf\{\, f(x)\,,\ x \in I\,\} \quad \textit{et} \quad M = \sup\{\, f(x)\,,\ x \in I\,\}$$

Si $m < M$, alors, pour tout réel y tel que $m < y < M$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = y$.

La figure 3 illustre le théorème des valeurs intermédiaires. Le résultat est tout à fait intuitif : si une fonction continue prend deux valeurs distinctes sur un intervalle, elle prend nécessairement toutes les valeurs entre ces deux-là : le graphe d'une fonction continue n'a pas de saut vertical.

Démonstration : Par définition de la borne inférieure, et de la borne supérieure, il existe $x_0, x_1 \in I$ tels que

$$m \leqslant f(x_0) < y < f(x_1) \leqslant M$$

Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x_0 < x_1$. Soit A l'ensemble des $x \in [x_0, x_1]$ tels que $f(x) \leqslant y$. L'ensemble A est non vide (il contient x_0), et majoré par x_1. Donc il admet une borne supérieure finie. Soit c cette borne supérieure.

$$c = \sup\{\, x \in [x_0, x_1]\ , f(x) \leqslant y\,\}$$

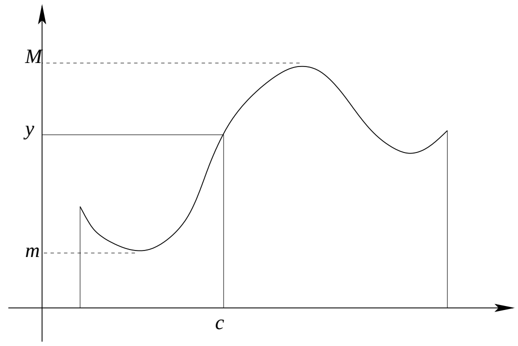

FIGURE 3 – Théorème des valeurs intermédiaires.

Nous allons démontrer que $f(c) = y$, en utilisant la continuité de f. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en c, il existe η tel que $|x - c| \leqslant \eta$ implique $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$. Or par définition de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $|x - c| \leqslant \eta$. Fixons un tel x. Puisque $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$ et $f(x) \leqslant y$, alors nécessairement $f(c) \leqslant y + \varepsilon$.

Par définition de la borne supérieure, c est le plus petit des majorants de A. Fixons maintenant x tel que $c < x < c + \eta$. Alors $x \notin A$, donc $f(x) > y$, et $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$. On en déduit que $f(c) \geqslant y - \varepsilon$.

Nous avons donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$y - \varepsilon \leqslant f(c) \leqslant y + \varepsilon \; ,$$

ce qui entraîne $f(c) = y$. □

Les deux résultats suivants sont des formulations équivalentes du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 2.
- *Si une fonction continue sur un intervalle prend des valeurs positives et des valeurs négatives, alors elle s'annule sur cet intervalle.*
- *L'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle.*

Il est naturel de se demander si l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle du même type (infini, ouvert...). Le seul résultat général concerne les intervalles fermés bornés.

Théorème 12. *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit*

$$m = \inf\{\, f(x)\,,\ x \in [a, b]\,\} \quad \text{et} \quad M = \sup\{\, f(x)\,,\ x \in [a, b]\,\}$$

Alors m et M sont finies et il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$, tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$:

$$f([a, b]) = [m, M] \; .$$

Démonstration : elle utilise le *théorème de Bolzano-Weierstrass*, qui affirme que de toute suite (x_n), à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite convergente. Nous traitons la borne supérieure M, la démonstration est analogue pour m. Supposons $M = +\infty$. Pour tout n, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. Donc la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite convergente. Soit c la limite de cette sous-suite. Par la continuité de f, les images des termes de la sous-suite convergent vers $f(c)$, ce qui contredit le fait que $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. Donc M est finie.

Puisque la borne supérieure est finie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$$

Donc la suite $(f(x_n))$ converge vers M. De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite, convergeant vers $c \in [a, b]$. En utilisant à nouveau la continuité, on en déduit que $f(c) = M$. □

En général les bornes m et M sont différentes des valeurs de f en a et b. Le cas des fonctions monotones est particulier. Vous avez sans doute déjà rencontré le résultat qui suit sous le nom de *théorème de la bijection*.

Théorème 13. *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I.*

1. *$f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I*
2. *f est une bijection de I vers $f(I)$*
3. *la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone, de même sens que f.*

Démonstration : Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que f est strictement croissante. Ceci entraîne que f est injective. Supposons que I soit l'intervalle ouvert $]a, b[$, a et b étant éventuellement infinis. La démonstration s'adapte sans problème au cas où l'intervalle est fermé d'un côté ou des deux.

Observons que pour tout $x_0 \in]a, b[$

$$\lim_{x \to a+} f(x) < f(x_0) < \lim_{x \to b-} f(x)$$

Posons

$$c = \lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{et} \quad d = \lim_{x \to b-} f(x)$$

Soit $y \in]c, d[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = y$. Donc $f(]a, b[) =]c, d[$, et comme f est injective, c'est une bijection de $]a, b[$ vers $]c, d[$. Pour tout $x_1, x_2 \in]a, b[$,

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

Donc la bijection réciproque f^{-1} est elle-aussi strictement croissante. Il reste à démontrer qu'elle est continue. Soit $y_0 \in]c, d[$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < b$$

Posons $y_1 = f(x_0-\varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0+\varepsilon)$. Alors $y_1 < y_0 < y_2$. Soit $\eta = \min\{y-y_1, y_2-y\}$. Pour tout y tel que $|y - y_0| \leqslant \eta$, on a $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, donc $x_0 - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon$. D'où le résultat. □

Si f est bijective, à tout couple $(x, f(x))$ du graphe de f, correspond le couple $(f(x), x)$ du graphe de f^{-1} : les deux graphes se déduisent l'un de l'autre par la transformation $(x, y) \mapsto (y, x)$, qui est la symétrie par rapport à la première bissectrice (figure 4).

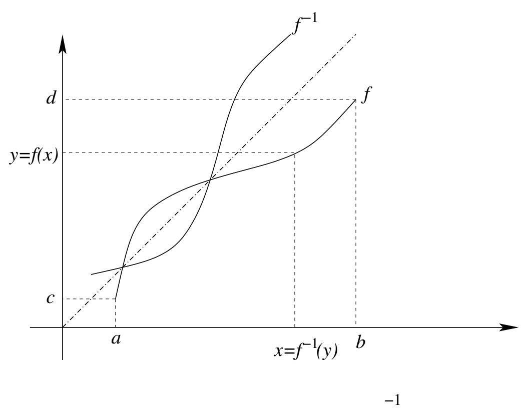

FIGURE 4 – Graphe d'une bijection monotone et de sa réciproque.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit a un réel et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf peut-être en a. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
2. ☐ Si f admet une limite finie en a alors f est monotone au voisinage de a.
3. ☒ Si f admet une limite en a, alors f admet une limite à droite en a.
4. ☐ Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a alors f admet une limite en a.
5. ☒ f admet l pour limite à gauche et pour limite à droite en a si et seulement si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a.

Vrai-Faux 2. Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si f n'est pas bornée, alors f tend vers l'infini quand x tend vers $+\infty$.
2. ☐ Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, alors f est monotone au voisinage de $+\infty$.
3. ☒ Si pour toute suite (x_n) convergeant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))$ converge vers 1, alors f a pour limite 1 en $+\infty$.
4. ☒ Si la suite $(f(n))$ converge vers 0 et la suite $(f(n + 1/2))$ converge vers $1/2$, alors $f(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.
5. ☐ Si f est strictement positive au voisinage de $+\infty$, alors la limite de f en $+\infty$, si elle existe, est strictement positive.

Vrai-Faux 3. Soit a un réel et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. ☐ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \leqslant \eta\,,\quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$
2. ☒ $\forall \varepsilon \in]0,1[\,,\ \exists \eta \in]0,1[\,,\ 0 < |x| \leqslant \eta \implies |f(x)| \leqslant \varepsilon$
3. ☐ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta, \eta]\,,\quad |f(x)| \leqslant \varepsilon$
4. ☒ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta]\,,\quad |f(x)| < \varepsilon$
5. ☒ $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta]\,,\quad |f(x)| < (1/n)$
6. ☐ $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}\,,\quad |x| \leqslant (1/m) \Longrightarrow |f(x)| \leqslant (1/n)$

7. ☒ $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}\,,\quad 0 < |x| \leqslant (1/m) \Longrightarrow |f(x)| \leqslant (1/n^2)$

Vrai-Faux 4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(1) = 1$$

Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?)

1. ☒ f est bornée au voisinage de 0.
2. ☐ f est monotone au voisinage de 0.
3. ☐ f est minorée par 1 au voisinage de 0.
4. ☒ f est minorée par 0 au voisinage de 0.
5. ☒ f est majorée par 2 au voisinage de 0.
6. ☐ la fonction $x \mapsto f(1/x)$ est bornée au voisinage de 0.
7. ☐ la fonction $x \mapsto f(\ln(x))$ est bornée au voisinage de 0.
8. ☒ la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

Vrai-Faux 5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Vous pouvez en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?)

1. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(1-x) = 0$
2. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} 1/f(x) = 1$
3. ☒ $\lim\limits_{x\to 1} 1 - 1/f(1-x) = 0$
4. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{f(\sqrt{x})} = 1$
5. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(\cos(x)) = 0$
6. ☒ $\lim\limits_{x\to 0} 1/f(\sin(x)) = 1$
7. ☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(\mathrm{e}^{-x}) = 1$
8. ☒ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(f(\mathrm{e}^{-x})) = 0$

Vrai-Faux 6. Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de* 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^2)$
2. ☒ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x)$
3. ☒ $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(\sqrt{|x|})$

4. ☐ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = o(1/\sqrt{|x|})$
5. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = O(1/|x|)$
6. ☒ $\ln(|x|) = o(1/|x|)$

Vrai-Faux 7. Toutes les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions *au voisinage de* $+\infty$. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = O(x^2)$
2. ☒ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = O(x^3)$
3. ☐ $2x^3+\sqrt{x^4+x^2} = o(x^2)$
4. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = o(1/x^2)$
5. ☒ $\dfrac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} = O(\sin(1/x^3))$
6. ☒ $\ln(x) = o(x)$
7. ☐ $\mathrm{e}^{2x} = O(\mathrm{e}^x)$

Vrai-Faux 8. Soit f une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Toutes les affirmations suivantes concernent les propriétés de f *au voisinage de* 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors f est croissante au voisinage de 0.
2. ☒ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors $f^2(x)$ est équivalent à x^2.
3. ☒ Si $f(x)$ est un grand O de x, alors $f^2(x)$ est un petit o de x.
4. ☐ Si $f(x)$ est dominé par x, alors $f(x)-x$ est négligeable devant x.
5. ☒ Si $f(x)$ est équivalent à x, alors $f(x)-x$ est négligeable devant x.

Vrai-Faux 9. Soit f une application continue sur $[0,1]$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ f est bornée sur $[0,1]$.
2. ☒ $f([0,1])$ est un intervalle fermé borné.
3. ☐ si le produit $f(0)f(1)$ est strictement positif, alors f est de signe constant sur $[0,1]$.
4. ☒ si le produit $f(0)f(1)$ est strictement négatif, alors f s'annule sur $[0,1]$.
5. ☐ si le produit $f(0)f(1)f(1/2)$ est strictement négatif, alors f s'annule en au moins deux points distincts de $[0,1]$.
6. ☒ les produits $f(0)f(1/2)$ et $f(1/2)f(1)$ sont strictement négatifs, alors f s'annule en au moins deux points distincts de $[0,1]$.

7. ☐ pour tout $y \in f([0,1])$, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution dans $[0,1]$.

Vrai-Faux 10. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Il existe une application continue et surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*$.
2. ☒ Il existe une application continue et bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.
3. ☒ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue et bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\varepsilon,+\varepsilon[$.
4. ☐ Il existe une application continue et bijective de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$.
5. ☒ Il existe une application continue et bijective de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$.
6. ☐ Il existe une application continue et strictement croissante de $]-1,1[$ vers $[-1,1]$.
7. ☐ Il existe une application continue et strictement croissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$.
8. ☒ Il existe une application continue et strictement décroissante de $[-1,1[$ vers $]-1,1]$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions définies sur $]0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer les résultats suivants.

1. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists m \in \mathbb{N}^*\,,\quad 0 < x \leq (1/m) \implies f(x) \geqslant n$$
2. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) de réels strictement positifs, convergeant vers 0, la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$.
3. La limite à droite de f en 0 est $+\infty$ si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{x \to a^+} f(x-a) = +\infty$$
4. La limite à droite de f en 0 est $\pm\infty$ si et seulement si :
$$\lim_{x \to +\infty} 1/f(1/x) = 0$$
5. Si la limite à droite de f et de g en 0 est $+\infty$, alors il en est de même pour $f+g$ et $f * g$.

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et l deux réels. Pour chacune des propriétés suivantes, que peut-on dire de f lorsqu'elle est vérifiée ?

1. $\forall \varepsilon > 0\,,\quad |x-a| \leqslant 1 \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$

2. $\exists \eta > 0\,,\quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-l| \leqslant 1$
3. $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad x-a \leqslant \eta \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad |x-a| \leqslant \eta \implies f(x)-l \leqslant \varepsilon$
5. $\exists \eta > 0\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$

Exercice 3. Démontrer que les applications suivantes n'ont pas de limite à droite en 0 (ni finie, ni infinie). On rappelle que si x est une réel, $\lfloor x \rfloor$ désigne sa partie entière et $D(x)$ sa partie décimale.

1. $f\ : x \mapsto \sin(1/x)$
2. $f\ : x \mapsto D(1/x)$
3. $f\ : x \mapsto \tan(1/x)$
4. $f\ : x \mapsto \ln(x)\cos(1/x)$
5. $f\ : x \mapsto (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}$
6. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
7. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } 1/x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4. Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite en $+\infty$ (ni finie, ni infinie).

1. $f\ : x \mapsto \sin(x)$
2. $f\ : x \mapsto \tan(x)$
3. $f\ : x \mapsto \ln(x)\cos(x)$
4. $f\ : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$
5. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
6. $f\ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 5. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}} = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{|x|}+\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}-\sqrt{|x|}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{2}{3}$$

Exercice 6. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^4+1}}{\sqrt{4x^4-3}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+2)} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x-1} = 0$$

Exercice 7. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)(1-\cos(x))}{\sin^3(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(3x)} = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos(x)-1} = -2$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \quad ; \quad \lim_{x\to 0} (1-x^2)^{1/x} = 1$$

Exercice 8. Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^4\ln^2(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\ln(x)+\cos(x))}{x^2+\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{x}}}{x^3\ln^3(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2(x)\ln(\ln(x))}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(\ln(x))} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(\ln(x)))}{\ln(\ln(x))}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^x \quad ; \quad \lim_{x\to 0+} |\ln(x)|^x$$

Exercice 9. Démontrer les résultats suivants.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}} = 4$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}} = 4 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}-1)\ln(\ln(x)) = 0$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{2x-\pi} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to \pi/2} (1-\sin(x))\tan(x) = 0$$

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)} = \sqrt{2} \quad ; \quad \lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\pi/4} = \sqrt{2}$$

Exercice 10. Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0. Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de* 0.

1. Si $f(x) = O(x^2)$ alors $f = o(x)$.
2. Si $xf(x) = O(x^2)$ alors $f = O(x)$.
3. Si $f(x) = o(x)$ alors $f(x) = o(\sqrt{x})$.
4. Si $f(x) - x = o(x)$ alors $f(x) \sim x$.
5. Si $f(x) \sim x$ alors $f(x) - x = o(x)$.
6. Si $f(x) = O(x^2)$ alors $f(x) - x \sim -x$.

Exercice 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. Démontrer les résultats suivants, qui concernent tous des comparaisons *au voisinage de* $+\infty$.

1. Si $f(x) = O(x)$ alors $f(x) = o(x^2)$.
2. Si $xf(x) = O(x^2)$ alors $f = O(x)$.
3. Si $f(x) = o(\sqrt{x})$ alors $f(x) = o(x)$.
4. Si $f(x) - x = o(x)$ alors $f(x) \sim x$.
5. Si $f(x) \sim x$ alors $f(x) - x = o(x)$.
6. Si $f(x) = O(\sqrt{x})$ alors $f(x) - x \sim -x$.

Exercice 12. Justifier les équivalents suivants, au voisinage de 0

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-x} \sim 2x \quad ; \quad \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-x} \sim \frac{1}{x}$$

$$x^2 - 2x^3\sin(1/x) \sim x^2 \quad ; \quad \frac{x+x^2\sin(1/x)}{x^2-x^3\cos(1/x)} \sim \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \sim 2\sqrt{x} \quad ; \quad \frac{\ln^2(1+x)}{\ln(1-x)} \sim -x$$

Exercice 13. Justifier les équivalents suivants, au voisinage de $+\infty$

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-x} \sim x \quad ; \quad \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-x^4} \sim -\frac{1}{x}$$

$$\lfloor x \rfloor \sim x \quad ; \quad \frac{x^2+\cos(x)}{x+\sin(x)} \sim x$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}-2}{\mathrm{e}^{x}-1} \sim \mathrm{e}^{x} \quad ; \quad \frac{\mathrm{e}^{-2x}-2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-1} \sim 2\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 14. Pour chacune des fonctions f suivantes, démontrer *directement* qu'elle est continue en tout point de son domaine de définition, sans utiliser les théorèmes du cours.

1. $f \ : x \mapsto x^2$
2. $f \ : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
3. $f \ : x \mapsto \sqrt{x}$
4. $f \ : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Exercice 15. Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $D(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie décimale. Pour chacune des fonctions f suivantes : dire en quels points de $\mathbb{R}$ elle est continue, continue à gauche ou continue à droite, et le démontrer.

1. $f \ : x \mapsto D(x)$
2. $f \ : x \mapsto D(1-x)$
3. $f \ : x \mapsto D(1/x)$
4. $f \ : x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$
5. $f \ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + 2D(x)$
6. $f \ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{D(x)}$
7. $f \ : x \mapsto \lfloor x \rfloor + D(x)^2$
8. $f \ : x \mapsto \sqrt{\lfloor x \rfloor} + D(x)$
9. $f \ : x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}(D(x) - 1/2)$
10. $f \ : x \mapsto \lfloor \cos(1/x) \rfloor$
11. $f \ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
12. $f \ : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 16. Pour chacune des fonctions f suivantes : déterminer son domaine de définition, représenter son graphe, et montrer qu'elle se prolonge par continuité en une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. $f\ : x \mapsto (x^2+x)/\sqrt{|x|}$
2. $f\ : x \mapsto x\cos(1/x)$
3. $f\ : x \mapsto (1/x^2)\mathrm{e}^{-1/x^2}$
4. $f\ : x \mapsto (1/(x^2-1))\mathrm{e}^{-1/(x^2-1)^2}$
5. $f\ : x \mapsto (x^2-4)\ln(|x^2-4|)$

Exercice 17.

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, et telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(2x) = f(x)$$
Démontrer par récurrence que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad f(x) = f(2^{-n}x)$$
En déduire que f est constante.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue en 1, et telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x^2) = f(x)$$
Démontrer par récurrence que
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad f(x) = f(x^{1/2n})$$
En déduire que f est constante.

Exercice 18.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. On définit g par
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(\sqrt{x}) - f(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0. On suppose que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, croissante. On suppose que :
$$\forall y \in [f(0), f(1)]\,,\ \exists x \in [0,1]\,, \quad f(x) = y$$
Démontrer que f est continue sur $[0,1]$.

Exercice 19. Pour chacune des fonctions f suivantes, définie sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$: déterminer le sens de variation de f. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans I. Donner un intervalle d'approximation d'amplitude 10^{-2} pour chaque solution.

1. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto x^3 + 1$
2. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto x^5 + 1$
3. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto x^5 - 5x + 1$
4. $I =]-2, 0[$, $f\ : x \longmapsto 2x\sqrt{x+2} + 1$
5. $I =]-1, 0[$, $f\ : x \longmapsto x^2 - 2 + 1/\sqrt{x+1}$
6. $I =]0, 1[$, $f\ : x \longmapsto x - \cos(x)$
7. $I =]0, \pi/2[$, $f\ : x \longmapsto \tan(x) - x + 2$
8. $I = [0, +\infty[$, $f\ : x \longmapsto 2x\ln(x) - x + 1$

Exercice 20. Pour chacune des fonctions f suivantes, définie sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$: déterminer le sens de variation de f. Déterminer $f(I)$. Démontrer que f est une bijection de I vers $f(I)$.

1. $I = [0, +\infty[$, $f\ : x \longmapsto x^2$
2. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto x^3$
3. $I = \mathbb{R}$, $f\ : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
4. $I = [0, \pi/2[$, $f\ : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos(x)}$
5. $I = [0, \pi/2[$, $f\ : x \longmapsto \tan(x) - x$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La proposition exprime le fait que la limite de f en 0 est 1.

$\boxed{\text{A}}$ $\forall \varepsilon \geqslant 0\,,\ \exists \eta > 0\,, \quad 0 < |x| < \eta \implies |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon\,.$

$\boxed{\text{B}}$ Pour toute suite (u_n) convergeant vers 0, la suite $(f(u_n))$ converge vers 1.
$\boxed{\text{C}}$ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad 0 < |x-1| < \eta \implies |f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$
$\boxed{\text{D}}$ Si la suite $(f(u_n))$ tend vers 0, alors la suite (u_n) tend vers 1.
$\boxed{\text{E}}$ $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad 0 < |x| < \eta \implies |f(x)-1| \leqslant \varepsilon^2/4\,.$

Question 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, On considère uniquement des limites quand x tend vers 0.
$\boxed{\text{A}}$ Si la limite de f est 1 alors la limite de $x \mapsto xf(x)$ est 1.
$\boxed{\text{B}}$ Si la limite de f est 1 alors la limite de $x \mapsto f(x)/x^2$ est $+\infty$.
$\boxed{\text{C}}$ Si la limite de f est $+\infty$ alors la limite de $x \mapsto xf(x)$ est $+\infty$.
$\boxed{\text{D}}$ Si la limite de f est 0 alors la limite de $x \mapsto (1-x)f(x)$ est 0.
$\boxed{\text{E}}$ Si la limite de f est $-\infty$ alors la limite de $x \mapsto (1-x)f(x)$ est 1.

Question 3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty \iff \Big(\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad (0 < x \leqslant \eta) \Longrightarrow (f(x) \geqslant A)\Big)\,.$
$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = +\infty \iff \Big(\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists \eta > 0\,,\quad (0 < x \leqslant \eta) \Longrightarrow (f(x) \geqslant A)\Big)\,.$
$\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 \iff \Big(\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A\,,\quad (x \geqslant A) \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon\Big)\,.$
$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \iff \Big(\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists B \in \mathbb{R}\,,\quad (x \leqslant B) \Longrightarrow f(x) \geqslant A\Big)\,.$
$\boxed{\text{E}}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \iff \Big(\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists A\,,\quad (-\varepsilon \leqslant x < 0) \Longrightarrow f(x) \leqslant A\Big)\,.$

Question 4. La proposition est vraie pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie et croissante sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{A}}$ La limite de f à droite de f en 0 existe et est finie.
$\boxed{\text{B}}$ La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
$\boxed{\text{C}}$ La limite à gauche de f en 0 est inférieure ou égale à sa limite à droite en 0.
$\boxed{\text{D}}$ La limite de f en $+\infty$ est positive ou nulle.
$\boxed{\text{E}}$ La limite à droite de f en 0 est strictement inférieure à la limite à gauche de f en 1.

Question 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie et croissante sur $\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{A}}$ Si pour tout x réel $f(x) < x$, alors $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) < 0$.
$\boxed{\text{B}}$ Si pour tout x réel $f(x) < x$, alors $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.
$\boxed{\text{C}}$ Si pour tout x réel $f(x) < 1$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) < 1$.
$\boxed{\text{D}}$ Si pour tout x réel $f(x) < 0$, alors pour tout réel a $\lim\limits_{x\to a+} f(x) < 0$.
$\boxed{\text{E}}$ Si pour tout x réel $f(x) < 1$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) < 1$.

Question 6. La relation de comparaison proposée est vraie *au voisinage de* $+\infty$.

$\boxed{\text{A}}$ $2x^2 + \sqrt{x^3}\ln(x) = O(x^2)$.

$\boxed{\text{B}}$ $2x^2 + \sqrt{x^3}\ln(x) \sim x^2$.

$\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}} = O(x^{-2})$.

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}} \sim \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}}$.

$\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}} = o(x^{-3/2})$.

Question 7.

$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-\sqrt[3]{x}/3} = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-3} e^{-\sqrt[3]{x}/3} = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[3]{x}\ln(x^3) = -\infty$.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1/3}\ln^3(x) = 0$.

$\boxed{\text{E}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x^{-1/3})\ln^3(x) = 0$.

Question 8. La proposition est vraie pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue en 0.

$\boxed{\text{A}}$ Pour toute suite (u_n) de réels tendant vers 0, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(0)$.

$\boxed{\text{B}}$ f est monotone au voisinage de 0.

$\boxed{\text{C}}$ La limite à droite de f en 0 est nulle.

$\boxed{\text{D}}$ f est bornée au voisinage de 0.

$\boxed{\text{E}}$ Il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est continue en tout point de l'intervalle $[-\varepsilon, +\varepsilon]$.

Question 9. La proposition est vraie pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ $\forall y \in \mathbb{R}\,,\ \exists c \in \mathbb{R}\,,\quad f(c) = y$.

$\boxed{\text{B}}$ Si pour tout x dans $]0,1[$, $f(x) < 0$ alors $f(1) < 0$.

$\boxed{\text{C}}$ $\exists c \in \mathbb{R}\,,\quad f(c) = \sup\{f(x)\,,\ x \in [0,1]\}$.

$\boxed{\text{D}}$ Il existe un unique réel c tel que $f(c) = \inf\{f(x)\,,\ x \in [0,1]\}$.

$\boxed{\text{E}}$ Si $f(0) < f(1)$, alors $\forall y \in\,]f(0), f(1)[\,,\ \exists c \in\,]0,1[\,,\quad f(c) = y$.

Question 10. La proposition est vraie pour toute fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $[0,1]$.

$\boxed{\text{A}}$ La fonction réciproque f^{-1} est une bijection de $[0,1]$ vers lui-même.

$\boxed{\text{B}}$ La fonction réciproque f^{-1} est strictement croissante.

$\boxed{\text{C}}$ Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des x.

$\boxed{\text{D}}$ Pour tout $x \in [0,1]$, si $f(x) = y$ alors $f(y) = x$.

$\boxed{\text{E}}$ La fonction f est une bijection de $[0,1]$ vers $[f(0), f(1)]$.

Réponses : 1–BD 2–BE 3–CD 4–AC 5–BD 6–AD 7–AD 8–AD 9–CE 10–BE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Donner une définition pour :
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ .$$
2. Démontrer que :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \ .$$
3. Quand dit-on que $f(x) \sim \sqrt{x}$ au voisinage de 0^+ ?
4. Démontrer que si $f(x) \sim \sqrt{x}$ au voisinage de 0^+, alors :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty \ .$$
5. Démontrer que si $f(0) = 0$ et si $f(x) = O(\sqrt{x})$ au voisinage de 0^+, alors f est continue à droite en 0.

Exercice 1 :

1. Soit a un réel strictement positif. Montrer que :
$$\lim_{x\to +\infty} a^{1/x} = 1 \ .$$
2. Montrer que, au voisinage de $+\infty$,
$$a^{1/x} = 1 + \frac{\ln(a)}{x} + o(1/x) \ .$$
3. Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2}\right)^x = \sqrt{ab} \ .$$
4. Déterminer :
$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{a^{2x} + b^{2x}}{2}\right)^{1/x} \ .$$

Exercice 2 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe :
$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$, et que pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$, $f(1/x) = f(x)$.
3. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \;.$$
4. Montrer que :
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to-\infty} xf(x) = -1 \;.$$
5. Montrer que :
$$\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty \;.$$
6. En admettant que la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante, montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1,1[$, sans calculer sa dérivée. En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$.
7. Donner une représentation du graphe de f, utilisant tous les résultats des questions précédentes.
8. On note φ la restriction de f à l'intervalle $]-1,1[$. Montrer que φ est une bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
9. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, l'équation $f(x) = a$ a exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
10. On considère l'application $\varphi^{-1} \circ f$, de $\mathcal{D}_f$ dans $]-1,1[$. Donner les expressions de $\varphi^{-1} \circ f(x)$ selon que x appartient ou non à $]-1,1[$.
11. Montrer que $\varphi^{-1} \circ f$ est prolongeable par continuité en -1 et en 1.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Par définition, on dit que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists \eta > 0\,, \quad (\, 0 < x \leqslant \eta\,) \implies (\, f(x) \geqslant A\,)\;.$$
2. Soit A un réel non nul. Posons $\eta = \dfrac{1}{A^2}$. Alors :
$$(0 < x \leqslant \eta) \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \sqrt{A^2} \geqslant A\;.$$

3. On dit que $f(x) \sim \sqrt{x}$ au voisinage de 0^+ si :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 \ .$$

4. Si $f(x) \sim \sqrt{x}$ au voisinage de 0^+, alors :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \ ,$$

Car lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $f(x)/\sqrt{x}$ tend vers 1 et $1/\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$.

5. On dit que $f(x) = O(\sqrt{x})$ au voisinage de 0^+, si le rapport $f(x)/\sqrt{x}$ est borné sur un certain intervalle $]0, \eta_0]$. Or $\sqrt{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. Donc le produit de $\sqrt{x}$ par $f(x)/\sqrt{x}$ qui est borné, tend vers 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0) \ ,$$

donc f est continue à droite en 0.

Exercice 1 :

1. Pour $a > 0$:

$$a^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(a)\right) \ .$$

Or quand x tend vers $+\infty$, $1/x$ tend vers 0, donc $\ln(a)/x$ aussi, et $\exp(\ln(a)/x)$ tend vers 1 car la fonction exponentielle est continue en 0.

2. D'après le cours, nous savons que :

$$\lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^y - 1}{y} = 1 \ .$$

Par composition des limites, on en déduit :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\ln(a)/x} - 1}{\ln(a)/x} = 1 \ .$$

Donc :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\ln(a)/x} - 1 - \ln(a)/x}{\ln(a)/x} = 0 \ ,$$

soit,

$$\mathrm{e}^{\ln(a)/x} - 1 - \ln(a)/x = o(1/x) \ ,$$

ou encore,

$$a^{1/x} = 1 + \frac{\ln(a)}{x} + o(1/x) \ .$$

3. Utilisons le résultat de la question précédente.

$$\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2} = 1 + \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2x} + o(1/x) = 1 + \frac{\ln(\sqrt{ab})}{x} + o(1/x)\ .$$

   D'après le cours,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1\ .$$

   On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right) = \ln(\sqrt{ab})\ .$$

   Comme l'exponentielle est une fonction continue,

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(x \ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)\right) = \exp(\ln(\sqrt{ab}))\ ,$$

   soit :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x = \sqrt{ab}\ .$$

4. Quand y tend vers $+\infty$, $x = 1/y$ tend vers 0^+. Par composition des limites, on déduit de la question précédente que :

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{ab}\ .$$

   Il suffit d'appliquer le résultat en remplaçant a par a^2 et b par b^2 pour trouver :

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{a^{2x}+b^{2x}}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{a^2b^2} = ab\ .$$

Exercice 2 :

1. La fonction $x \mapsto |x-1|/|x+1|$ est définie pour tout $x \neq -1$. Quand elle est définie, elle prend des valeurs strictement positives, sauf en $x = 1$. Donc $f(x)$ est défini pour tout $x \notin \{-1, 1\}$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\ .$$

   Les fonctions $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x+1$ sont continues. La fonction $y \mapsto 1/y$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Le produit de deux fonctions continues est continue, donc $x \mapsto (x-1)/(x+1)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La fonction $y \mapsto |y|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto |x-1|/|x+1|$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La fonction $y \mapsto \ln(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc f est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.

2. Si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$ et réciproquement.
$$f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -f(x)\ .$$
Si $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$, alors $1/x$ est défini et appartient à $\mathcal{D}_f$.
$$f(1/x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1/x-1}{1/x+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = f(x)\ .$$
3. La fonction f est continue en 0 et $f(0) = 0$. Donc :
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\ .$$
Lorsque x tend vers 0^-, $1/x$ tend vers $-\infty$, et lorsque x tend vers 0^+, $1/x$ tend vers $+\infty$. On en déduit :
$$\lim_{x\to +\infty} f(1/x) = \lim_{x\to -\infty} f(1/x) = 0\ .$$
D'après la question précédente, $f(1/x) = f(x)$. Donc :
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0\ .$$
4. Montrons d'abord que :
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -1\ .$$
Pour x appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$,
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)\ .$$
Or d'après le cours,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1\ .$$
Donc :
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}(-1-1) = -1\ .$$
Pour les limites en $+\infty$ et $-\infty$, on procède comme à la question précédente.
$$\lim_{x\to -\infty} xf(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1\ .$$
De même :
$$\lim_{x\to +\infty} xf(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -1\ .$$

5. Il suffit de montrer l'une des deux limites, la seconde s'en déduit en utilisant le fait que $f(-x) = -f(x)$.
   La fonction $x \mapsto |x-1|/|x+1|$ est continue en 1. Donc :
   $$\lim_{x\to 1} \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0 \ .$$
   Par composition des limites,
   $$\lim_{x\to 1} \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{2} \ln(y) = -\infty \ .$$
6. Soient x et y deux réels tels que $-1 < x < y < 1$. Alors :
   $$\left.\begin{array}{l} 1-x > 1-y > 0 \\ 1/(1+x) > 1/(1+y) > 0 \end{array}\right\} \implies \frac{1-x}{1+x} > \frac{1-y}{1+y} \ .$$
   Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante,
   $$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = f(y) \ .$$
   Supposons maintenant $x < y < -1$. Alors $-1 < 1/y < 1/x < 0$. Or $f(1/x) = f(1/y)$. En appliquant ce qui précède,
   $$f(1/x) < f(1/y) \implies f(x) < f(y) \ .$$
   Supposons enfin $1 < x < y$. Alors $0 < 1/y < 1/x < 1$. De même :
   $$f(1/x) < f(1/y) \implies f(x) < f(y) \ .$$
7. Voir figure 5.
8. La fonction φ est strictement décroissante sur $]-1,1[$, et continue en tout point de $]-1,1[$. De plus :
   $$\lim_{x\to -1^+} \varphi(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = -\infty \ ,$$
   donc $\varphi(]-1,1[) = \mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, φ est une bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque φ^{-1} est une bijection strictement décroissante et continue, de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
9. D'après le résultat précédent, l'équation $f(x) = a$ a une solution et une seule dans $]-1,1[$. Le changement de variable $x \mapsto 1/x$ montre que la restriction de f à $]-\infty,-1[$ est une bijection strictement croissante de $]-\infty,0[$ dans $]0,+\infty[$. De même la restriction de f à $]1,+\infty[$ est une bijection strictement croissante de $]1,+\infty[$ dans $]-\infty,0[$. Donc :

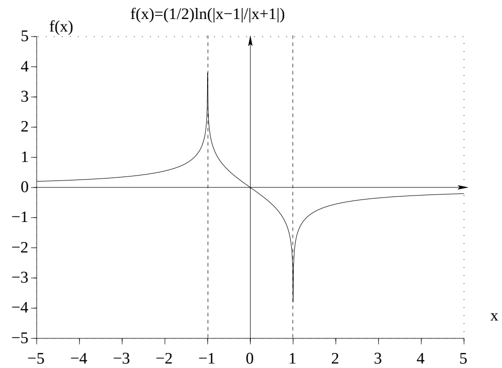

FIGURE 5 – Graphe de la fonction $x \mapsto (1/2)\ln(|x-1|/|x+1|)$.

si $a < 0$, l'équation a une solution dans $]1,+\infty[$ et une dans $]-1,1[$,
si $a > 0$, l'équation a une solution dans $]-\infty,-1[$ et une dans $]-1,1[$.

10. Par définition de la réciproque, si $x \in]-1,1[$, $\varphi^{-1}\circ f(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.
Si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, alors :

$$\varphi^{-1}\circ f(x) = \varphi^{-1}(f(1/x)) = \frac{1}{x} \; .$$

11. D'après les expressions obtenues précédemment :

$$\lim_{x\to -1^-} \varphi^{-1}\circ f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1^+} \varphi^{-1}\circ f(x) = \lim_{x\to -1^+} x = -1 \; .$$

Les limites à gauche et à droite sont égales, donc on peut prolonger la fonction par continuité, en associant la valeur -1 à l'abscisse -1.
De même :

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi^{-1}\circ f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} \varphi^{-1}\circ f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \; .$$

Les limites à gauche et à droite sont égales, donc on peut prolonger la fonction par continuité, en associant la valeur 1 à l'abscisse 1.

3 Compléments

3.1 Cauchy et les limites

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, ne serait-ce que par sa production impressionnante : pas moins de 789 articles, répartis en 27 volumes dans ses œuvres complètes. Par contre, il n'a pas laissé un souvenir impérissable à ses étudiants. L'un d'eux écrit :

> Ses cours étaient très confus, sautant brusquement d'une idée à une autre, d'une formule à la suivante, sans aucune tentative pour les connecter. Ses présentations étaient des nuages obscurs, illuminés de temps à autre par des éclairs de pur génie.

Royaliste convaincu, catholique dévot et militant, ses fortes opinions et son caractère difficile lui attirèrent de nombreuses inimitiés. Il dut même s'exiler pour un temps à Turin, puis à Prague, où l'ex-roi Charles X lui confia l'éducation scientifique de son petit fils. Mais là encore, « le prince montrant peu d'intérêt pour ses sujets. Cauchy s'énervait, et se mettrait à crier et à hurler ».

Pourtant les cours polycopiés de Cauchy pour les élèves de l'École Polytechnique ont marqué leur temps. On y trouvait de nombreuses notions nouvelles sur l'analyse réelle et complexe, et surtout une exigence de rigueur très novatrice pour l'époque. Le texte suivant est extrait du cours d'*Analyse algébrique*, écrit en 1821. Saurez-vous y reconnaître les notions de ce chapitre ?

> On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment, de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite
>
> $$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots,$$
>
> prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite
>
> $$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots,$$
>
> prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive

et négative ; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné.

[. . .]

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α.

En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière une *solution de continuité*.

3.2 Continuité uniforme

Le texte de Cauchy définit la continuité d'une fonction sur un intervalle (« entre deux limites »). Il confond en fait deux notions, qui ne seront distinguées que beaucoup plus tard, en particulier par Eduard Heine (1821-1881) en 1872. Soit f une fonction, définie sur un intervalle I. Ecrivons d'abord que f est continue sur I, au sens de la définition 6.

$$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall y \in I\,,\quad |y-x| \leqslant \eta \implies |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

Définition 7. *On dit que f est* uniformément continue *sur I si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in I\,,\ \forall y \in I\,,\quad |y-x| \leqslant \eta \implies |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

Evidemment, (3) implique (2), mais la réciproque est fausse en général. La différence entre (2) et (3) est subtile. Dans (2) la valeur de η peut dépendre non seulement de ε mais aussi de x. Dans (3), elle ne peut dépendre que de ε : pour un ε donné, on peut choisir le même η pour tous les points de l'intervalle.

Examinons la fonction inverse sur $I =]0,1]$ (cf. proposition 7).

$$\begin{array}{rcl} & f & \\ ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 1/x \end{array}$$

Soit x un point de $]0,1]$ et ε un réel strictement compris entre 0 et 1. L'image réciproque par f de l'intervalle $[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$ est l'intervalle :

$$f^{-1}([f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]) = \left[\frac{1}{f(x)+\varepsilon}, \frac{1}{f(x)-\varepsilon}\right]$$

Cet intervalle contient x, et

$$x - \frac{1}{f(x)+\varepsilon} < \frac{1}{f(x)-\varepsilon} - x$$

Posons

$$\eta_x = x - \frac{1}{f(x)+\varepsilon} = x - \frac{1}{\frac{1}{x}+\varepsilon} = \frac{\varepsilon x^2}{1+\varepsilon x}$$

Alors, pour tout y dans l'intervalle $[x-\eta_x, x+\eta_x]$, $f(y)$ reste dans l'intervalle $[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$. De plus, η_x est le plus grand réel possédant cette propriété. Observons que pour $\varepsilon > 0$ fixé, η_x tend vers 0 quand x tend vers 0.

Bien sûr, pour n'importe quel $\eta' < \eta_x$, l'implication

$$|y-x| \leqslant \eta' \implies |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$$

reste vraie. Mais il n'est pas possible de choisir un même η' tel qu'elle reste vraie pour tous les x de $]0,1]$: la fonction f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

Examinons maintenant la fonction racine carrée sur le même intervalle $I =]0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} & f & \\ ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Soit x un point de $]0,1]$ et ε un réel strictement compris entre 0 et 1. Pour $\varepsilon < f(x)$, l'image réciproque par f de l'intervalle $[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$ est l'intervalle :

$$f^{-1}([f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon]) = \Big[x-(2\varepsilon\sqrt{x}-\varepsilon^2), x+(2\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2)\Big]$$

Pour $\varepsilon \geqslant f(x)$, c'est l'intervalle

$$\left[0, (\sqrt{x}+\varepsilon)^2\right] = \left[0, x + (2\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2)\right]$$

L'amplitude de ces intervalles dépend bien de x a priori. Posons $\eta = \varepsilon^2$. Nous allons démontrer que pour tout $x, y \in]0,1]$, si $|y-x| < \eta$, alors $|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$, ce qui entraîne que f est uniformément continue sur I. Supposons d'abord $\varepsilon < f(x)$. Alors $2\varepsilon\sqrt{x} - \varepsilon^2 > \varepsilon^2 = \eta$. Donc l'intervalle $f^{-1}([f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon])$ contient l'intervalle $[x-\eta, x+\eta]$: si y vérifie $|y-x| < \eta$, alors $|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. Supposons maintenant $\varepsilon \geqslant f(x)$. Si $y \leq x$, alors $|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leqslant \sqrt{x} \leqslant \varepsilon$. Si $x < y \leq x+\eta$, alors $0 \leqslant y \leqslant x + (2\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2)$, donc $|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leqslant \varepsilon$.

Le résultat suivant, que l'on appelle traditionnellement *théorème de Heine*, a semble-t-il été démontré pour la première fois par Dirichlet en 1862. Comme pour beaucoup de théorèmes importants, son histoire est compliquée, au point qu'il a été proposé de l'appeler « théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue », par ordre d'entrée en scène des mathématiciens qui l'ont raffiné ou généralisé.

Théorème 14. *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue.*

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$, tout comme la fonction $x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle $[10^{-3}, 1]$.

Démonstration : Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné, et f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit ε un réel strictement positif. D'après (2), pour tout $x \in [a,b]$, il existe un réel strictement positif, que nous noterons η_x, tel que pour tout $y \in [a,b]$,

$$|y-x| \leqslant \eta_x \implies |f(y)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout x, considérons l'intervalle ouvert $]x-\eta_x, x+\eta_x[$, noté I_x. Le point crucial de la démonstration est qu'il est possible d'extraire de cette famille d'intervalles une famille finie, qui recouvre l'intervalle $[a,b]$:

$$\exists m \in \mathbb{N}\,,\ \exists x_1, \ldots, x_m \in [a,b]\ , \quad [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_{x_i} \tag{4}$$

Ceci est un cas particulier d'un résultat de topologie plus général, le lemme de Borel-Lebesgue. Pour le démontrer, la première étape consiste à montrer que pour un certain entier n, tout intervalle de la forme $]y-1/n, y+1/n[$ est inclus dans l'un des I_x au moins.

$$\exists n \in \mathbb{N}\,,\ \forall y \in [a,b]\,,\ \exists x \in [a,b]\ , \quad]y-1/n, y+1/n[\subset I_x \tag{5}$$

Ecrivons la négation :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \exists y \in [a,b]\,,\ \forall x \in [a,b]\ , \quad]y-1/n, y+1/n[\not\subset I_x$$

Pour tout n, soit y_n l'un des y dont l'existence est affirmée ci-dessus. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite $(y_{\phi(k)})$, qui converge vers $c \in [a,b]$. En particulier, aucun des intervalles $]y_{\phi(k)} - 1/\phi(k), y_{\phi(k)} + 1/\phi(k)[$ n'est inclus dans I_c, ce qui est impossible si c est la limite de $(y_{\phi(k)})$.

En utilisant (5), nous allons démontrer (4) par l'absurde. Soit y_1 un point de $[a,b]$. Il existe x_1 tel que $]y_1 - 1/n, y_1 + 1/n[\subset I_{x_1}$. Comme I_{x_1} ne recouvre pas $[a,b]$, il existe un point y_2 de $[a,b]$ qui n'appartient pas à I_{x_1}. Ce point est à distance au moins $1/n$ de y_1. Il existe un point x_2 tel que $]y_2 - 1/n, y_2 + 1/n[\subset I_{x_2}$. La réunion $I_{x_1} \cup I_{x_2}$ ne recouvre pas $[a,b]$. Donc il existe y_3 en dehors de cette réunion : y_3 est à distance au moins $1/n$ de y_1 et de y_2. Par récurrence, on construit ainsi une suite (y_k) de points de $[a,b]$ telle que deux quelconques de ses éléments sont à distance au moins $1/n$. En appliquant une fois de plus le théorème de Bolzano-Weierstrass, une sous-suite de (y_k) devrait converger, d'où la contradiction.

Puisque les intervalles ouverts $I_{x_1}, \ldots, I_{x_m}$ recouvrent $[a,b]$, il existe η tel que si $|x-y| \leqslant \eta$, alors x et y appartiennent à un même intervalle I_{x_i}. Si c'est le cas,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ ,$$

par définition de I_{x_i}. □

3.3 Arguments de continuité

Définition 8. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est* dense *dans $\mathbb{R}$ si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.*

Une partie dense peut aussi être vue comme un ensemble de réels tel que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de cet ensemble.

Proposition 8. *Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tous réels a, b tels que $a < b$, $A \cap]a,b[\neq \emptyset$.*

La démonstration est facile et laissée au lecteur.

Le théorème suivant semble trop simple pour être utile, et pourtant...

Théorème 15. *Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$. Si deux fonctions continues sont égales sur A alors elles sont égales partout.*

$$\Big(\forall a \in A\,,\ f(a) = g(a)\Big) \implies \Big(\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = g(x)\Big)$$

Démonstration : Soit x un réel et (a_n) une suite d'éléments de A, convergeant vers x. Comme f et g sont continues, les suites $(f(a_n))$ et $(g(a_n))$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$. Mais comme les deux suites sont égales, leurs limites sont égales. □

Appliquer le théorème 15 se dit « utiliser un argument de continuité ». Le plus souvent, la partie dense est l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$. On peut aussi rencontrer l'ensemble des nombres décimaux (multiples entiers d'une puissance négative de 10), et l'ensemble des nombres dyadiques (multiples entiers d'une puissance négative de 2).

Les quatre exemples de la proposition 9 proviennent du cours d'Analyse de Cauchy, chapitre V, paragraphe 1 : « Recherche d'une fonction continue formée de telle manière que deux semblables fonctions de quantités variables, étant ajoutées ou multipliées entre elles, donnent pour somme ou pour produit une fonction semblable de la somme ou du produit de ces variables » (comment ça pas très clair ? Un peu de respect pour Cauchy tout de même !)

Proposition 9.

1. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Alors, en notant $a = f(1)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = ax$$

2. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Alors, en notant $a = f(1)$, $a \geqslant 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = a^x$$

3. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\,, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(a) = 1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad f(x) = \ln(x)/\ln(a)$$

4. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

Alors, soit f est constamment nulle, soit $f(1) > 0$, et en notant $a = \ln(f(1))$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad f(x) = x^a$$

Démonstration : Nous détaillons la démonstration du premier point. Celle des autres points se fait sur le même modèle et sera laissée au lecteur.

Supposons que f vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ , \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit x un réel quelconque. Commençons par montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = nf(x)$$

La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour n. Alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

La propriété est vraie pour $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient p et q sont deux entiers. Appliquée à $x = 1/q$, la propriété ci-dessus donne $f(p/q) = pf(1/q)$, et aussi $f(1) = qf(1/q)$. Donc

$$f(p/q) = f(1)(p/q)$$

En posant $a = f(1)$, la fonction f coïncide avec $x \mapsto ax$ sur tous les rationnels positifs. La relation $f(x+0) = f(x) + f(0)$ montre que $f(0) = 0$. En écrivant $f(0) = f(x) + f(-x)$, on obtient que $f(-x) = -f(x)$. La fonction f coïncide donc avec $x \mapsto ax$ sur tous les rationnels, donc sur tous les réels, par un argument de continuité. □

3.4 Discontinuités des fonctions monotones

Le théorème 4 montre que si une fonction est monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle, elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point. Soit f une fonction croissante sur l'intervalle I. Pour tout $a \in I$, on a :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x)$$

La fonction f est continue en a si et seulement si les trois valeurs coïncident. Une fonction croissante peut très bien ne pas être continue partout. Par exemple, la fonction partie entière est croissante, et discontinue en tout point entier (figure 2). Cependant, l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable.

Théorème 16. *Si une fonction est monotone sur un intervalle, l'ensemble des points où elle n'est pas continue est fini ou dénombrable.*

Démonstration : Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que f est croissante. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Supposons que f ne soit continue ni en a, ni en b. Alors :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x) \leq \lim_{x \to b^-} f(x) < \lim_{x \to b^+} f(x)$$

Les intervalles ouverts

$$\left]\lim_{x\to a^-} f(x)\,,\, \lim_{x\to a^+} f(x)\right[\quad \text{et} \quad \left]\lim_{x\to a^-} f(x)\,,\, \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$$

sont disjoints et non vides. Chacun d'eux contient au moins un rationnel. On peut donc construire une application injective, associant à tout point de discontinuité de f, un rationnel. Comme l'ensemble des rationnels est dénombrable, le résultat s'ensuit. $\square$

3.5 Pourquoi définir la continuité ?

Les notions de limites, de continuité, de droite réelle même, n'ont eu de définition rigoureuse que longtemps après avoir été introduites et appliquées. Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, les mathématiciens ont commencé à refuser de se satisfaire de ce qui, jusqu'alors, apparaissait comme des évidences de nature géométrique. Voici ce qu'en dit Julius Dedekind (1831-1877) dans la préface de son ouvrage « Continuité et nombres rationnels » en 1872.

> Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvai alors, en tant que professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une limite fixe, et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale.