

INSTITUT CAMILLE JORDAN
Université Lyon 1
Mémoire présenté pour obtenir
le diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

Espérance, existence et déformations en géométrie réelle, complexe et G_2

par

Damien GAYET

Soutenue le 30 Novembre 2012

devant le jury composé de

M. Kai CIELIEBAK
M. Jean-Pierre DEMAILLY
M. Viatcheslav KHARLAMOV
M. Christophe SABOT
M. Bernard SHIFFMAN
M. Nessim SIBONY

au vu des rapports de

M. Dominic JOYCE
M. Viatcheslav KHARLAMOV
M. Bernard SHIFFMAN.

Table des matières

1	Géométrie complexe	11
1.1	Sous-variétés lagrangiennes singulières	11
1.1.1	Convexité rationnelle	11
1.1.2	Le cas plongé	12
1.1.3	Le cas immergé transverse	13
1.1.4	Le cas immergé quadratique	13
1.2	Surfaces de Riemann et tores totalement réels	15
1.2.1	Enveloppe polynomiale	15
1.2.2	Principe de la démonstration	16
1.2.3	Préliminaires	16
1.2.4	Le cas borné	17
1.2.5	Le cas non borné	18
1.2.6	Enveloppes du tore	21
2	Géométrie G_2	23
2.1	Sous-variétés associatives fermées	23
2.1.1	Structures G_2	23
2.1.2	Déformations de sous-variétés associatives	23
2.2	Sous-variétés associatives à bord	24
2.2.1	La géométrie du bord	25
2.2.2	Le calcul de l'indice	25
2.3	Obstruction dans les modules	28
2.3.1	Conditions suffisantes	28
2.3.2	Généricité	29
2.3.3	Conditions métriques	32
2.4	Exemples	34
2.4.1	Flatland	34
2.4.2	La construction de Bryant et Salamon	34
2.4.3	L'extension Calabi-Yau	35
2.4.4	Brisure de symétrie	36
3	Géométrie symplectique réelle	39
3.1	Hypersurfaces de Donaldson réelles	39
3.1.1	La méthode de Donaldson	40
3.1.2	La version réelle	41
3.1.3	Composantes de la partie réelle	42

3.2	Pinceaux de Lefschetz	43
4	Géométrie réelle aléatoire	45
4.1	Introduction	45
4.2	Notations	46
4.3	Raréfaction des courbes maximales	48
	4.3.1 Le théorème et l'idée de sa démonstration	48
	4.3.2 Démonstration du théorème	49
4.4	Nombre total de Betti moyen	51
4.5	Nombres de Betti moyens	56
	4.5.1 Équirépartition complexe	62
4.6	Estimation des déterminants moyens.	62
	4.6.1 Matrices symétriques quelconques	62
	4.6.2 Matrices symétriques d'indice donné	63

Remerciements.

Je remercie chaleureusement Kai Cieliebak, Jean-Pierre Demailly, Slava Kharlamov, Christophe Sabot, Bernard Shiffman et Nessim Sibony pour avoir accepté de former ce jury.

Ma profonde gratitude va également à Dominic Joyce, et de nouveau à Slava Kharlamov et Bernard Shiffman, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire.

Merci à mes collaborateurs, Julien Duval, Jean-Yves Welschinger et Frederik Witt.

Merci au CNRS pour les semestres de délégation dont j'ai bénéficié et au laboratoire Poncelet pour son accueil pendant mon séjour à Moscou.

Merci à mes collègues de l'Institut Camille Jordan, et particulièrement à Vincent Borrelli.

Enfin, un grand merci à Estelle.

Introduction

Les résultats exposés dans ce mémoire concernent l'existence de courbes ou d'hypersurfaces holomorphes dans l'espace affine complexe, les déformations d'une sous-variété associative dans une variété munie d'une structure G_2 , l'existence de sous-variétés symplectiques réelles, ainsi que la topologie des hypersurfaces aléatoires d'une variété projective réelle. Nous avons divisé ce mémoire en quatre chapitres correspondant aux quatre types de géométries ambiantes rencontrées.

Le premier chapitre concerne la géométrie complexe, avec deux thèmes provenant de l'analyse complexe. Dans la première section, nous montrons qu'une sous-variété compacte L de \mathbb{C}^n , lagrangienne et possédant des singularités de type quadratique, est rationnellement convexe : le complémentaire de L dans \mathbb{C}^n est rempli par des hypersurfaces complexes. Une singularité quadratique est non générique, mais peut survenir lors d'une isotopie générique d'une sous-variété lagrangienne. La démonstration s'appuie sur la construction d'un potentiel de la forme de Kähler adapté à la singularité, ainsi que la résolution d'un $\bar{\partial}$ avec les estimées L^2 de L. Hörmander.

Dans la seconde section, nous considérons un tore T totalement réel non noué dans la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Nous démontrons l'alternative suivante : ou bien T est rempli par une famille de disques holomorphes et T est rationnellement convexe, ou bien il existe un anneau ou une paire de disques holomorphes à bord dans T . La démonstration s'appuie sur le théorème de remplissage de E. Bedford et W. Klingenberg, le théorème de compacité de M. Gromov ainsi que l'étude des courants de L. V. Ahlfors.

Le second chapitre est dédié à la géométrie G_2 . Nous montrons dans la première section que l'espace des déformations associatives d'une sous-variété associative avec bord dans une sous-variété coassociative fixe est de dimension virtuelle finie donnée par la géométrie du bord, en l'occurrence par une formule de Riemann-Roch. L'outil principal pour ce résultat est une formule d'Atiyah-Singer à bord.

Dans la seconde section de ce chapitre, nous montrons qu'en perturbant de façon fermée la structure G_2 qu'on suppose fermée, l'espace des déformations d'une sous-variété associative devient lisse ou vide. Nous établissons un résultat similaire pour les sous-variétés à bord, où cette fois la perturbation est celle de la sous-variété coassociative. Enfin nous donnons des conditions métriques sur la sous-variété associative pour que, sans perturbation, l'espace de ses déformations soit lisse. La démonstration s'appuie sur la méthode de S. Bochner.

Le troisième chapitre concerne la géométrie symplectique réelle. Nous expliquons que dans une variété symplectique compacte de dimension $2n$ munie d'une structure réelle, la méthode de S. K. Donaldson exposée dans [18] s'adapte et permet de construire des sous-variétés symplectiques réelles de codimension 2. Si k est le degré de ces "hypersurfaces symplectiques", on peut de plus imposer que leur partie réelle contient au moins \sqrt{k}^n composantes connexes, à une constante près indépendante de k . Nous montrons également que toute variété symplectique réelle supporte un pinceau de Lefschetz symplectique et réel.

Le quatrième chapitre traite d'hypersurfaces algébriques réelles aléatoires. Dans la première partie, nous expliquons que la probabilité pour qu'une courbe réelle algébrique dans $\mathbb{R}P^2$ possède un nombre maximal ou presque de composantes connexes décroît exponentiellement vite avec son degré. La démonstration fait appel aux méthodes introduites par B. Shiffman et S. Zelditch pour les hypersurfaces aléatoires complexes, ainsi qu'un théorème de H. de Thélin concernant les courants laminaires.

Dans la seconde partie, nous montrons que la moyenne du nombre total de Betti d'une hypersurface aléatoire de degré d dans une variété projective $\mathbb{R}X$ réelle donnée de dimension n est un $o(d^n)$. Nous nous appuyons cette fois directement sur les sections pics de Hörmander-Tian, ainsi que sur la formule de Poincaré-Martinelli.

Enfin, dans la troisième section, nous affinons sensiblement ce résultat. Pour tout indice i , nous montrons que la moyenne du i -ème nombre de Betti d'une telle hypersurface est inférieure à $e_{i,n}\sqrt{d}^n$, où $e_{i,n}$ est une constante explicite reliée aux matrices symétriques aléatoires de taille $(n-1, n-1)$ et au volume de $\mathbb{R}X$. Encore une fois, les sections pics sont l'outil analytique principal, ainsi qu'une formule de coaire inspirée par la formule de Kac-Rice. Le résultat repose sur un théorème d'équidistribution des points critiques de la restriction à l'hypersurface aléatoire d'une fonction de Morse donnée sur $\mathbb{R}X$. Concernant les nombres associés aux matrices aléatoires, un théorème de grandes déviations de G. Ben Arous et A. Guionnet forme l'un des piliers de nos estimations.

Liste des travaux

Les travaux présentés dans le premier chapitre sont [23] et [22]. Le second chapitre présente l'article [34] et le preprint [30]. Le troisième chapitre est tiré de [29]. Enfin, le quatrième chapitre expose les articles [31], [33] et le preprint [32]. Le preprint non publié [28] n'a pas été présenté.

Chapitre 1

Géométrie complexe

1.1 Sous-variétés lagrangiennes singulières

1.1.1 Convexité rationnelle

Un compact K de \mathbb{C}^n est dit *rationnellement convexe* si par tout point du complémentaire de K il passe une hypersurface holomorphe évitant K . Par le théorème d'Oka-Weil, le principal bénéfice pour ces compacts est de satisfaire le principe de Runge : toute fonction holomorphe définie au voisinage de K est limite de fractions rationnelles.

Dans l'article [24], J. Duval et N. Sibony ont démontré que toute sous-variété L compacte, lisse et lagrangienne pour une forme de Kähler sur \mathbb{C}^n est rationnellement convexe. Dans [27], nous avons démontré que le résultat restait vrai si l'on accordait à L des singularités génériques, c'est-à-dire des croisements normaux. Cette généralisation est d'importance, puisque immerger ainsi une sous-variété de façon lagrangienne est aussi facile que de l'immerger de manière totalement réelle, voir par exemple le livre [48]. En particulier, M. Gromov a démontré dans [37] qu'il n'existe pas de sphère lagrangienne plongée dans \mathbb{C}^3 , alors qu'il y en a toujours des immergées.

Lors d'une isotopie générique d'une sous-variété lagrangienne immergée, il peut apparaître des auto-intersections dites *quadratiques* : deux branches sont transverses excepté selon une unique direction, où le contact est alors quadratique. Suite à une question de K. Cieliebak à ce sujet, nous avons obtenu, en collaboration avec J. Duval, le théorème suivant.

Théorème 1.1.1 (voir [23]) *Soit ω une forme de Kähler sur \mathbb{C}^n , et L une sous-variété compacte lagrangienne pour ω , immergée avec des auto-intersections quadratiques. Alors L est rationnellement convexe.*

Nous consacrons le reste de cette partie à la démonstration du Théorème 1.1.1. Puisque celle-ci s'inscrit dans l'esprit des articles précédents [24] et [27], nous commençons par expliquer ces dernières.

1.1.2 Le cas plongé

Rappelons la méthode de [24] dans le cas d'une sous-variété lagrangienne plongée dans \mathbb{C}^n . Choisissons ϕ un potentiel de ω , et $\psi : L \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ une fonction à valeurs dans le cercle telle que

$$j^* d^c \phi = d\psi,$$

où $j : L \rightarrow \mathbb{C}^n$ désigne le plongement de L dans l'espace affine complexe et $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$. Ceci est possible quitte à perturber ω et à prendre un multiple entier de cette forme. Comme c'est expliqué dans [40], on peut alors étendre

$$h = e^{\phi + i\psi}$$

à tout l'espace affine de sorte que l'extension h soit $\bar{\partial}$ -plate en L . En d'autres termes, pour tout m fixé, il existe une extension satisfaisant $|\bar{\partial}h| = O(d^m)$, où d est la distance à L . Après avoir remarqué que $\log|h| - \phi$ s'annule à l'ordre 1 aux points de L , et en utilisant la stricte plurisousharmonicité de ϕ , il est alors aisé de vérifier que

$$|h|_\phi = |h|e^{-\phi} \leq Ce^{-ad^2}, \quad (1.1)$$

où C et a sont des constantes strictement positives ne dépendant que de m et de l'extension choisie. Pour tout entier $k > 0$, les inégalités L^2 de Hörmander permettent d'obtenir l'existence d'une fonction $u_k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\bar{\partial}(h^k) = \bar{\partial}u_k \text{ avec } \|u_k\|_{2,k\phi} \leq C\|\bar{\partial}(h^k)\|_{2,k\phi},$$

où $\|f\|_{2,k\phi}$ désigne la norme L^2 sur \mathbb{C}^n associée à la norme ponctuelle pondérée $|f|_{k\phi}$, et où C ne dépend ni de k ni de h . Ces estimées L^2 permettent d'obtenir des estimées L^∞ par

$$|u_k|(p) \leq C_1(\epsilon\|\bar{\partial}v\|_\infty + \epsilon^{-n}\|v\|_2),$$

où p est un point quelconque et où les normes L^∞ et L^2 sont prises sur la boule $B(p, \epsilon)$, tandis que C_1 est une constante universelle, voir l'ouvrage [41]. En introduisant le poids $e^{-k\phi}$ des deux côtés de l'inégalité, et en faisant $\epsilon = 1/k^2$, on obtient après quelques estimations

$$|u_k|_{k\phi}(p) \leq Ck^{-m/2+b},$$

où b est une constante ne dépendant que de n . Pour m assez grand et fixe, puis pour k assez grand, la fonction holomorphe $f = h^k - u_k$ ne s'annule pas sur L , puisque $|h^k|_{k\phi} = 1$ sur L .

Pour que l'hypersurface holomorphe $f = 0$ passe par un point x donné n'appartenant pas à L , il suffit d'ajouter à ϕ un poids logarithmique singulier en x . De façon alternative, on peut retrancher à f la fonction $f(x)\frac{\sigma_0}{\sigma_0(x)}$, où σ_0 est la section pic de L^k centrée sur x donnée par le Lemme 4.4.6, où le fibré L est le fibré trivial muni de la norme $|1|_\phi = e^{-\phi}$. La décroissance exponentielle avec k de $|\sigma_0|_{k\phi}$ hors de x implique que cet ajout n'a quasiment aucun impact sur L .

1.1.3 Le cas immergé transverse

Dans le cas d'une sous-variété lagrangienne immergée avec des points doubles transverses, la démonstration proposée par [23] simplifie celle de [27]. Elle ne diffère presque pas du cas plongé. En effet, soit p l'un de ces points doubles. Pour chacune des branches locales L_i , $i = 1, 2$, on construit les fonctions h_i obtenues dans la démonstration du cas plongé. La fonction $h_1^k + h_2^k$ reste uniformément minorée sur L . En effet, sur la première branche L_1 sa norme pondérée par $e^{-k\phi}$ est égale à $|1 + (h_2/h_1)^k|$. Puisque les 1-jets de h_1 et de h_2 sont égaux en p , on a sur L_1 l'estimation

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_{|L_1} = e^{-d_2^2 + iO(d^2)},$$

où d_2 est la distance à L_2 . Puisque d et d_2 sont équivalentes sur L_1 grâce à la transversalité de l'intersection en p , $|h_1^k + h_2^k|_{k\phi}$ est minoré uniformément sur L par une constante strictement positive indépendante de k . On peut alors résoudre le $\bar{\partial}$ comme dans la situation plongée.

1.1.4 Le cas immergé quadratique

Dans le cas d'un croisement quadratique, le phénomène précédent ne se réalise plus : les deux fonctions h_i^k sur les deux branches interfèrent cette fois beaucoup trop pour assurer l'absence d'annulation sur L de leur somme. Nous allons suivre l'approche de [27].

Lemme 1.1.2 *Près d'un point p avec un croisement quadratique, il existe une perturbation locale $\tilde{\omega}$ de la forme de Kähler ω telle que*

1. L reste lagrangien pour $\tilde{\omega}$,
2. il existe un potentiel ϕ pour $\tilde{\omega}$ possédant un minimum strict et nul en p ,
3. $d^c\phi$ s'annule le long de L près de p .

Démonstration du Théorème 1.1.1. Le Lemme 1.1.2 implique le Théorème 1.1.1. En effet, il suffit de remplacer la fonction $h_1^k + h_2^k$ du cas immergé transverse par

$$h = \chi^k + h_1^k + h_2^k,$$

où χ est une fonction plateau telle que $\chi = e^\epsilon$ près de p . On constate que $|h|_{k\phi}$ est minoré uniformément en k sur L . En effet, sur $\{\phi < \epsilon/2\}$, on a l'estimation $|h|_{k\phi} \geq e^{k\frac{\epsilon}{2}} - 2$. De plus puisque $j_1^*d^c\phi$ s'annule et $\phi \geq 0$ près de p , $h_1|_{L_1}$ est une fonction réelle positive. Par conséquent, sur $\{\phi \geq \epsilon/2\} \cap L_1$,

$$|h|_{k\phi} \geq (\chi^k + h_1^k)e^{-k\phi} - |h_2|_{k\phi} \geq 1 - e^{-ka\delta^2},$$

où δ est la distance de L_2 à $\{\phi \geq \epsilon/2\} \cap L_1$ et a la constante de décroissance donnée par (1.1). Les estimations L^2 donnent les mêmes estimations qu'auparavant, ce qui conclut. ■

Démonstration du Lemme 1.1.2. Pour simplifier, supposons que $n = 2$. On peut choisir des coordonnées complexes $z = x + iy$ et $w = u + iv$ de sorte que les espaces tangents en p des deux branches de L engendrent l'hyperplan réel (x, u, v) et s'intersectent selon l'axe des x . Par ailleurs, on peut supposer que dans ces coordonnées, la forme de Kähler s'écrit $3dd^c(|z|^2 + |w|^2) + O(d)$, où d est la distance à $p = 0$. Enfin, les deux branches L_m , $m = 1, 2$, se paramètrent par

$$j_m : (x, t) \rightarrow (x + ip_m, e^{i\theta_m}(t + iq_m)) + O(d^3), \quad m = 1, 2,$$

où p_m et q_m sont des polynômes de degré deux en (x, t) , tandis que θ_1 et θ_2 sont deux réels distincts.

On choisit maintenant un potentiel ψ global de ω tel que

$$\psi = 2x^2 + 4y^2 + 3u^2 + 3v^2 + O(d^3).$$

Il est facile de constater qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $m = 1, 2$,

$$j_m^* d^c \psi = \alpha x^2 dx + \beta_m x^2 dt + O(\delta d + d^3),$$

où δ est la distance à l'axe des x . En additionnant à ψ un terme pluriharmonique de la forme $\gamma \Im(z^3)$ avec γ réel, il est possible d'annuler α , tandis qu'avec un terme $\Im(\mu z^2 w)$ avec μ complexe, on peut faire disparaître β_1 et β_2 .

Nous allons maintenant annuler complètement $d^c \psi$. Pour cela, il est d'abord possible de supposer que la branche L_1 est localement plate égale au plan (x, u) , grâce à une rotation et à un redressement $\bar{\partial}$ -plat le long de L_1 proche de l'identité, voir [40]. La forme $j_1^* d^c \psi$ (donc sur L_1) s'écrit par conséquent $adx + bdu = O(d\delta + d^3)$. Puisque

$$j_1^* d^c(ay + bv) = adx + bdu,$$

nous allons retrancher $ay + bv$ au potentiel. Mais il faut le faire sans toucher au potentiel sur L_2 . Pour cela, remarquons que l'ensemble $\{y^2 + v^2 \leq \epsilon(u^2 + x^4)\}$ n'intersecte L_2 qu'en l'origine si ϵ est suffisamment petit, en raison de la tangence quadratique. Soit

$$\phi = \psi - \chi\left(\frac{y^2 + v^2}{u^2 + x^4}\right)(ay + bv),$$

où χ est une fonction positive valant 1 près de 0 à support suffisamment petit. On peut alors vérifier que ϕ est une perturbation C^2 de ψ en raison des estimations sur a et b . En particulier, ϕ reste strictement plurisousharmonique. De plus, on peut supprimer cette perturbation en dehors d'une petite boule en remplaçant (a, b) par $(\partial_x(\tilde{\chi}f), \partial_u(\tilde{\chi}f))$, où $\tilde{\chi}$ est une fonction plateau et f une primitive de la forme fermée $adx + bdu$. Par conséquent, ϕ se prolonge en ψ et vérifie $j_m^* d^c \phi = 0$ sur un voisinage de 0, $m = 1, 2$. ■

1.2 Surfaces de Riemann et tores totalement réels

1.2.1 Enveloppe polynomiale

L'enveloppe polynomiale \hat{K} d'un compact $K \subset \mathbb{C}^n$ est définie par

$$\hat{K} = \{z \in \mathbb{C}^n, \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], |P(z)| \leq \max_K |P|\}.$$

Par le principe du maximum, toute surface de Riemann à bord dans K est incluse dans \hat{K} . Par ailleurs, tout compact polynomialement convexe bénéficie de la propriété de Runge : toute fonction holomorphe au voisinage de K peut être approchée par des polynômes complexes.

J.-P. Serre (voir [60]) a démontré qu'une sous-variété de dimension n dans \mathbb{C}^n n'est jamais polynomialement convexe. En 1965, E. Bishop a démontré dans [11] qu'une surface réelle S dans \mathbb{C}^2 possédant un point isolé p de tangence complexe elliptique peut être localement remplie par de petits disques holomorphes dont le bord s'appuie sur S et germant à partir de p . Il est donc naturel de s'intéresser aux surfaces totalement réelles, celles dont l'espace tangent ne contient aucune droite complexe. En 1985, M. Gromov démontre dans l'article [37] que si L est une sous-variété lagrangienne de \mathbb{C}^n , il existe toujours un disque holomorphe lisse à bord dans L . Par la même méthode, H. Alexander a démontré en 1996 dans [2] que pour toute sous-variété T totalement réelle, il existe un disque holomorphe dont le bord sauf un point est dans S .

L'exemple suivant tiré essentiellement de [3] montre qu'il n'existe pas toujours de disques dont le bord est entièrement contenu dans une surface totalement réelle, même incluse dans un bord strictement pseudoconvexe. Soit en effet la fibration de Hopf conjuguée

$$\begin{aligned} \pi : S^3 \subset \mathbb{C}^2 &\rightarrow S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (z, w) &\mapsto (2zw, |z|^2 - |w|^2). \end{aligned}$$

Les fibres de π sont des cercles, et la préimage T_γ d'un cercle γ dans S^2 est un tore totalement réel non noué de S^3 , lisse si γ est plongée et si sa projection sur \mathbb{C} est immergée. Si cette projection de γ sur \mathbb{C} trace un huit et évite l'origine, alors on peut montrer en suivant [3] que l'unique surface de Riemann à bord dans T_γ est l'anneau représenté par la fibre dans B^4 du polynôme $2zw$ au-dessus du point double. De plus, si l'auto-intersection de γ est l'origine, cet anneau dégénère en une réunion de deux disques.

Cet exemple laisse toutefois ouverte l'hypothèse qu'il existe toujours une surface de Riemann à bord dans toute sous-variété totalement réelle. Avec J. Duval, nous avons obtenu une réponse positive dans une situation assez naturelle.

Théorème 1.2.1 (voir [22]) *Soit T un tore totalement réel non noué dans la sphère ronde $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Alors, ou bien T est rempli par une famille de disque holomorphe, et dans ce cas T est rationnellement convexe, ou bien il existe un anneau holomorphe ou une paire de disques à bord dans T et bordant dans T .*

1.2.2 Principe de la démonstration

L'idée de la preuve est la suivante. L'enveloppe \hat{T} du tore $T \subset S^3$ sépare la boule B^4 en deux ouverts pseudoconvexes. L'un des deux possède un revêtement universel qui déploie le tore en un cylindre infini et cyclique. Il nous faut pousser un peu T dans la partie lisse et strictement pseudoconvexe du bord de ce bon ouvert, et considérer une suite T_n de tores revenant ainsi vers leur position initiale en T . Si l'on ferme n périodes dans le cylindre qui relève T_n par deux disques et qu'on lisse le résultat, on obtient une sphère S_n totalement réelle sauf éventuellement sur les deux bouchons. On utilise alors le théorème de remplissage dû à E. Bedford et W. Klingenberg pour la sphère S_n :

Théorème 1.2.2 ([9] et [47]) *Soit S une sphère incluse dans le bord d'un ouvert strictement pseudoconvexe de \mathbb{C}^2 . Si les points complexes de S sont hyperboliques ou elliptiques, alors il existe un remplissage de S , i.e. S borde une boule dans Ω feuilletée par des disques holomorphes.*

Soit Δ_n l'un des disques du remplissage de S_n . Quand n tend vers l'infini, ou bien son aire reste bornée, ou bien non. Dans le premier cas, T_n est rempli par ces disques pour n assez grand, et on montre que le remplissage résiste au retour à T . Dans le second cas, l'étude de la limite U du courant d'intégration renormalisé produit par Δ_n montre que U peut s'écrire comme une intégrale de courants d'intégration sur des surfaces de Riemann. Un argument s'appuyant sur la théorie d'Ahlfors montre alors que ces surfaces ne peuvent être que des disques ou des anneaux.

1.2.3 Préliminaires

Le tore non noué $T \subset S^3$ borde deux tores pleins ω_1 et ω_2 dans la sphère. Par ailleurs, l'enveloppe polynomiale \hat{T} de T divise B^4 en deux composantes Ω_1 et Ω_2 , qui possèdent ω_1 et ω_2 dans leur bord respectif, voir l'ouvrage [68]. On montre facilement que l'homologie en degré un d'au moins l'un des ω_i s'injecte dans celle de Ω_i . Supposons que $i = 1$. L'ouvert $\Omega_1 = \Omega$ est pseudoconvexe par le principe du maximum local de Rossi (voir [68]), et strictement convexe le long de $\omega_1 = \omega$. Nous poussons maintenant T en T_n dans ω , ce qui forme une suite de tores approchant T . Par la propriété homologique qui nous a fait choisir Ω , chacune des composantes connexes du relevé de ω par le relèvement $p : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ de Ω à son revêtement universel est difféomorphe à $\mathbb{R} \times D^2$. Choisissons $\tilde{\omega}$ l'un de ces relèvements. Le relevé \tilde{T}_n de T_n est alors difféomorphe à $\mathbb{R} \times S^1$. Si τ est un générateur de l'action du groupe fondamental de Ω sur $\tilde{\Omega}$, alors \tilde{T}_n est invariant sous l'effet de τ .

Les sphères S_n approchant \tilde{T}_n sont construites de la façon suivante. D'abord, soit D un disque dans ω , dont le bord est un méridien de T , D_n une perturbation de D dont le bord est dans T_n , et \tilde{D}_n un relevé par p de D_n , donc de la forme $* \times D^2$ dans $\tilde{\omega} \simeq \mathbb{R} \times D^2$. Les bords des poussés en avant et en arrière $\tau^n(\tilde{D}_n)$ et $\tau^{-n}(\tilde{D}_n)$ délimitent un cylindre \tilde{A}_n dans \tilde{T}_n . La sphère S_n est le lissage de la réunion de ce cylindre avec ces deux disques translatés. Même si $\tilde{\Omega}$ n'est pas compact, les arguments de [9] s'adaptent, et on peut remplir S_n par des disques holomorphes. Désignons par Θ_n

ce remplissage. Remarquons que $\partial\tilde{D}_n$ sépare \tilde{S}_n en deux demi-sphères S_n^\pm . Au moins l'une des deux, disons S_n^- , possède un remplissage partiel, c'est-à-dire que l'un des disques $\tilde{\Delta}_n$ du remplissage de S_n a son bord intégralement dans S_n^- et touche $\partial\tilde{D}_n$. L'alternative est la suivante : ou bien l'aire a_n de $\Delta_n = p(\tilde{\Delta}_n)$ est bornée, ou bien non.

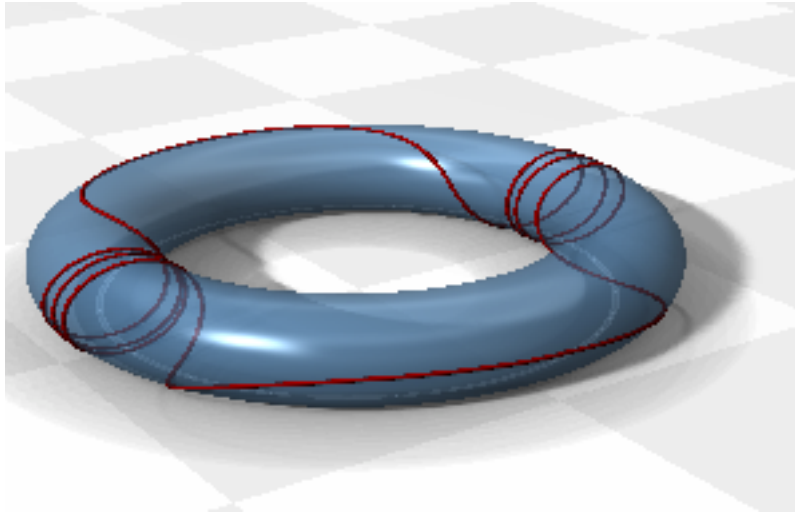
Avant de continuer, remarquons que a_n est équivalente à une constante près à la longueur l_n de la partie dans T_n du bord de Δ_n , ceci indépendamment de n et du disque de remplissage que l'on choisit. En effet, le lemme de Hopf montre que le bord intersecte transversalement le feuilletage caractéristique de T_n (la direction de TT_n qui se trouve dans la droite complexe de TS^3). De plus, en perturbant ω sans bouger T_n on constate que l'angle entre le bord de Δ_n et le feuilletage est uniformément minoré par une constante strictement positive. On en déduit alors que $l_n \leq C(1 + a_n)$ pour une certaine constante C . Par Stokes et le fait que la forme de Kähler standard ω_0 soit exacte, on obtient l'inégalité inverse.

1.2.4 Le cas borné

Supposons maintenant que $(a_n)_n$ est bornée. Dans ce cas, c'est aussi le cas pour la longueur de $\partial\Delta_n \cap T_n$ par la remarque précédente. Pour n assez grand, $\tilde{\Delta}_n$ et son translate $\tau(\tilde{\Delta}_n)$ sont alors deux disques attachés à S_n , donc font partie de son remplissage qu'on sait, d'après [9], être unique. Par ailleurs, le remplissage est trivial entre ces deux disques (voir [9]), si bien qu'on obtient un remplissage de T_n . On peut par ailleurs montrer que les autres disques du remplissage ont une aire qui reste également bornée.

Si l'on se contente de supposer T générique, nous avons obtenu un remplissage de T . Dans le cas contraire, il faut revenir au tore initial T . Par le théorème de Gromov (voir [37] et [42]), une (sous-)suite $(\Delta'_n)_n$ de disques dans Θ_n converge vers une réunion de disques Δ' attachés à T . On peut montrer que ces disques ne s'auto-intersectent pas et ne s'intersectent pas entre eux dans B . De plus par le lemme de Hopf, le bord Γ' de la réunion des disques limites Δ' est un ensemble de courbes immergées. Si Γ est la réunion équivalente pour une autre suite $(\Delta_n)_n$, on montre que chaque singularité naissante du bord de Δ'_n "coince" nécessairement le bord de Δ_n , si bien qu'à la limite, les singularités de Δ' appartiennent à Γ . En dehors de Γ , il s'avère que la convergence se passe bien : par tout point il passe un unique disque simple Δ' qui soit limite de la suite $(\Delta'_n)_n$. Par ailleurs, toute autre suite $(\Delta''_n)_n$ convergeant vers un disque Δ'' passant par un point dans l'intersection $\Gamma' \cap \Gamma'' \setminus \Gamma$ est égale à $(\Delta'_n)_n$. Sans quoi, il y aurait persistance d'intersection pour les grands n , ce qui contredirait la définition du remplissage. On choisit alors une suite Q de points dense dans $T^* = T \setminus \Gamma$. Par un procédé diagonal, on peut supposer que pour tout $q \in Q$ la suite de disques $(\Delta_{n,q})_n$ de Θ_n passant par q (ou plutôt par $\phi_n(q) \in T_n$, où $\phi_n : T_n \rightarrow T$ et un difféomorphisme proche de l'identité) converge comme ci-dessus. Par le même argument, on obtient une distribution de disques Δ_p de bords plongés et disjoints des autres (si distincts) dans T^* .

Enfin, les bords de ces disques sont également plongés dans T . Si ça n'était pas le



Le bord d'un disque de remplissage s'accumulant sur le bord d'un anneau. Le tore est construit à partir de l'exemple de la fibration de Hopf. La courbe γ associée au tore est simple mais n'est pas très loin d'avoir un point double.

Les calculs ont été effectués sous Freefem++.

Merci à Frédéric Chapoton pour l'image sous Povray.

cas, deux branches de bords de disques se croiseraient transversalement en un point $s \in \Gamma$ et délimiteraient quatre secteurs. Deux d'entre eux ne rencontrent pas la feuille caractéristique passant par s . Par conséquent, pour p assez proche de s dans l'un de ces secteurs, le disque Δ_p passe nécessairement par s . On montre alors, qu'on peut exhiber une famille de disques holomorphes proches de Δ_p et passant par s . L'étude de l'indice de Maslov de ces disques va fournir la contradiction.

L'indice de Maslov de l'un de ces disques ne peut pas être nul, auquel cas le disque n'est pas déformable, ni deux, auquel cas les disques doivent être disjoints. Si l'indice est supérieur ou égal à 4, l'espace des déformations est de dimension réelle au moins deux, donc l'ensemble des disques déformés forment un ouvert de \mathbb{C}^2 , les empêchant d'être dans le bord de \hat{T} , ce qui est le cas puisque $\Theta_n \subset \Omega$ pour tout n .

1.2.5 Le cas non borné

Supposons qu'au contraire l'aire a_n de Δ_n explose avec n . Dans ce cas, on peut montrer que le courant d'intégration renormalisé $\frac{[\Delta_n]}{a_n}$ possède une sous-suite convergeant vers un courant U . Par ailleurs, le bord de ce courant est le bord d'un courant supporté par T . En effet, le disque $\hat{\Delta}_n$ va systématiquement toucher la partie de S_n qui n'est pas dans \tilde{T}_n , sans quoi il permettrait d'obtenir un remplissage comme dans le cas borné, ce qui impliquerait une contradiction sur l'explosion de a_n . En particulier, le disque \tilde{V}_n dans S_n^+ qui borde $\partial\hat{\Delta}_n$ possède une aire bornée par à la longueur l_n de $\partial\hat{\Delta}_n \cap \tilde{T}_n$, donc par a_n d'après les préliminaires. Ainsi, si $V_n = p(\tilde{V}_n)$, le courant $\frac{[V_n]}{a_n}$ est de masse bornée et possède une sous-suite convergeant vers un courant V tel quel $dU = dV$, où V est à support dans T . Par conséquent, le support de U est dans

l'enveloppe rationnellement convexe de T , voir [24].

Il nous faut exhiber des anneaux holomorphes ou une paire de disques dans le support de ce courant U . Pour cela, on établit d'abord une formule intégrale pour le bord de U

$$dU = \int_{\mathcal{G}} [\gamma] d\mu(\gamma),$$

où \mathcal{G} est un espace compact de courbes Lipschitz sur T et μ une mesure positive supportée par des courbes fermées. Afin d'établir cette formule, remarquons qu'après perturbation de S^3 , on peut supposer que le feuilletage caractéristique sur T ne possède qu'un nombre fini de cycles attractifs ou répulsifs, cf. [35]. Soit c l'un de ces cycles. Il est facile de voir que chaque relèvement \tilde{c} de c par p est déroulé comme \tilde{T}_n et forme une courbe invariante par un multiple τ^q de τ . Par ailleurs, par transversalité, le bord de Δ_n ne coupe qu'une seule fois le cycle c . Par conséquent, le bord $\gamma_n = \phi_n(\partial\Delta_n \cap T_n)$ passe presque tout son temps dans des anneaux séparés par des tubes fins le long des cycles de T . Ici, $\phi_n = T_n \rightarrow T$ est un difféomorphisme proche de l'identité.

De plus, on peut montrer que la partie de γ_n présente dans ces anneaux est plongée, à une intersection près. En effet, le remplissage partiel du translaté à droite par τ^q de la demi-sphère S_n^- est inclus dans l'ouvert pseudoconvexe dont le bord est formé de la réunion de Θ_n avec la boule que borde S_n dans $\tilde{\omega}$. Par conséquent, $\tau^q(\partial\tilde{\Delta}_n)$ coupe toujours $\partial\tilde{\Delta}_n$ dans le même sens, si bien que chaque composante de $\partial\tilde{\Delta}_n$ dans un anneau donné entre deux cycles ne peut se couper qu'une seule fois.

On a donc obtenu que dU est une somme finie de courants de la forme $\lim_n \frac{[\alpha_n]}{a_n}$, où α_n , qui est une partie de $\partial\Delta_n$, est un arc plongé dans l'un de ces anneaux entre deux cycles du feuilletage caractéristique de T . De plus, p relève chacun de ces anneaux en une bande qu'on peut identifier à $\mathbb{R} \times [0, 1]$, avec τ^q agissant sur \mathbb{R} comme la translation de 1. On peut de plus supposer que le feuilletage caractéristique est le feuilletage trivial vertical. En raison de la transversalité uniforme des bords de disques de remplissage au feuilletage, selon cette identification l'arc α_n est une réunion de graphes uniformément Lipschitz de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. On a donc $\frac{[\alpha_n]}{a_n} = \int_{\mathcal{G}} [\gamma] d\mu_n(\gamma)$, avec μ_n une mesure de masse bornée sur \mathcal{G} . À la limite, μ ne charge que les graphes périodiques ($g(0) = g(1)$). En effet, un graphe dans le support de μ est limite d'au moins deux graphes consécutifs g_n et h_n . Puisque $g_n(1) = h_n(0)$, on en déduit la périodicité.

Nous décrivons maintenant le courant U . Celui-ci s'écrit également

$$U = \int_{\mathcal{P}} W d\nu(W),$$

où \mathcal{P} est l'espace compact des courants positifs de masse 1 à support dans la boule unité, et ν une mesure de probabilité sur \mathcal{P} . Nous allons montrer que le support de ν est composé d'anneaux et de disques. D'abord, le disque Δ_n dont l'aire explose peut être découpé en quatre secteurs angulaires δ_n de masses au plus $a_n/2$, et tels que la longueur des deux rayons de δ_n est un $o(a_n)$. Ceci se fait par une version adéquate

d'un lemme classique en théorie d'Ahlfors. En répétant le processus, on obtient pour tout k un découpage de U en 4^k courants d'Ahlfors de masse au plus $1/2^k$ chacun. Par compacité, on obtient la formule intégrale.

Nous allons montrer que le bord de chaque W dans le support de ν est formé par une réunion finie de courbes fermées. Puisque

$$W = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\delta_{n,k}]}{a_n},$$

où $\delta_{n,k}$ est un morceau de Δ_n d'aire plus petite que $a_n/2^k$, le bord dW de W s'écrit

$$dW = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\alpha_{n,k}]}{a_n},$$

où $\alpha_{n,k}$ est un sous-arc de l'un des arcs α_n ci-dessus. On a par ailleurs

$$\lim_n [\alpha_{n,k}]/a_n = \int_{\mathcal{G}} [\gamma] d\mu_k(\gamma)$$

avec $\mu_k \leq \mu$. Puisque $\alpha_{n,k}$ est plongé, on peut définir le graphe de \mathcal{G} le plus haut $\lambda_{n,k}$ et le plus bas $\eta_{k,n}$ apparaissant dans $\alpha_{n,k}$. Quand n tend vers l'infini, ces deux graphes convergent vers λ_k et η_k . De plus, $\mu_k = \mu$ entre ces deux graphes. Mais puisque la masse de μ_k tend vers zéro quand k tend vers l'infini, le support de μ_k tend vers $\{\eta, \lambda\}$, ce qui montre que le support de dW est inclus dans la réunion de deux courbes réelles fermées.

Maintenant, le théorème d'Alexander présenté dans [68] implique que W est nécessairement la réunion d'un nombre fini de surfaces de Riemann. Le lemme suivant conclut :

Lemme 1.2.3 *Soit W un courant d'Ahlfors dont le support est une courbe complexe dans B . Alors chaque composante de cette courbe un disque holomorphe ou un anneau.*

Démonstration. Supposons qu'une composante soit de caractéristique d'Euler négative. Dans ce cas, on peut tracer une figure de huit e dans C telle que chaque composante de $C \setminus e$ rencontre le bord de C , si bien que e est polynomialement convexe, cf. [68]. Un épaississement E dans C de e est un disque avec deux trous, et un voisinage V de E peut être identifié avec $E \times d$ où d est un disque holomorphe. Puisque W ne charge pas $E \times \partial d$, la formule de la coaire montre que la longueur de $\Delta_n \cap (E \times \partial d)$ est un $o(a_n)$. De plus, la convexité polynomiale de V et le principe du maximum impliquent que les composantes de $V \cap \Delta_n$ sont des disques δ_n . Nous appliquons maintenant l'inégalité isopérimétrique sous la forme suivante :

Inégalité isopérimétrique [57] *Soit E une surface de Riemann compacte à bord, et de caractéristique d'Euler négative. Alors il existe une constante c telle que pour tout disque holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow E$ on a*

$$\text{Aire}(f(\mathbb{D})) \leq c \text{Longueur}(f(\partial\mathbb{D}) \setminus \partial E).$$

En appliquant ce théorème à la projection $\pi : \delta_n \rightarrow E$ et en sommant, on obtient que l'aire de $\Delta_n \cap V$ est un $o(a_n)$, ce qui est une contradiction. ■

1.2.6 Enveloppes du tore

Dans le cas précédent où l'aire a_n explose, on peut montrer que parmi les anneaux ou ces disques que nous venons d'exhiber, il existe nécessairement un anneau ou une union de disques bordant dans T . Dans les deux cas, ces surfaces appartiennent à l'enveloppe rationnelle de T , et évidemment à l'enveloppe polynomiale.

Dans le cas non borné, on montre que le tore est rationnellement convexe, ce qui implique d'après [24] que T est lagrangien pour une certaine forme de Kähler. Bien sûr, le remplissage appartient à \hat{T} .

Chapitre 2

Géométrie G_2

2.1 Sous-variétés associatives fermées

2.1.1 Structures G_2

Dans \mathbb{R}^7 muni de la métrique euclidienne standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$, soit ϕ_0 la 3-forme

$$\phi_0 = dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} - dx_{257} - dx_{356},$$

où $dx_{ijk} = dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$. Soit de plus \times le produit vectoriel défini par

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^7, \langle u \times v, w \rangle = \phi_0(u, v, w). \quad (2.1)$$

Le groupe G_2 peut être défini comme le sous-groupe de $SO(7)$ laissant invariante la 3-forme ϕ_0 . Maintenant, une variété riemannienne orientable (M, g) peut réduire son groupe structurel de $SO(7)$ à G_2 si et seulement elle est spin. Le cas échéant, M hérite automatiquement d'un produit vectoriel \times , d'une 3-forme ϕ et d'une métrique g vérifiant la relation (2.1). La forme ϕ est appelée G_2 -structure sur M . On sait de plus que si $d\phi = 0$ et $d*\phi = 0$, où $*$ est l'étoile de Hodge associée à g , alors (M, g) est d'holonomie incluse dans G_2 , voir [43] par exemple. On dit alors que ϕ est *sans torsion*.

2.1.2 Déformations de sous-variétés associatives

Dans une variété M munie d'une G_2 -structure ϕ , une sous-variété Y lisse de dimension 3 est dite *associative* si son espace tangent est invariant par le produit vectoriel \times associé à ϕ , ou en d'autres termes si $\phi|_{TY} = d\text{vol}_g|_{TY}$, tandis qu'une sous-variété de dimension 4 est dite *coassociative* si son fibré normal est invariant par \times , ou en d'autres termes si $*\phi|_{TX} = d\text{vol}_g|_{TX}$, ou encore $\phi|_{TX} \equiv 0$.

Pour toute sous-variété associative compacte sans bord, on définit \mathcal{M}_Y l'espace des sous-variétés associatives lisses isotopes à Y . En 1996, R. C. McLean a démontré dans [53] que ce problème est elliptique et d'indice nul, et que l'espace tangent de Zariski de \mathcal{M}_Y en Y est donné par le noyau d'un opérateur de Dirac D sur un fibré de spineurs tordus. En nous inspirant de [53] et en optant pour la vision plus concrète de S. Akbulut et S. Salur dans [1], nous avons redémontré le

Théorème 2.1.1 ([53],[1], voir [30]) Soit M^7 une variété équipée d'une G_2 -structure (ϕ, g) , et Y une sous-variété associative compacte lisse de fibré normal ν . Alors l'espace tangent de \mathcal{M}_Y en Y peut être identifié avec le noyau de l'opérateur de Dirac tordu $D : \Gamma(Y, \nu) \rightarrow \Gamma(Y, \nu)$ défini par

$$\Gamma(Y, \nu) \ni s \mapsto Ds = \sum_{i=1}^3 e_i \times \nabla_{e_i}^\perp s + \sum_{k=1}^4 (\nabla_s * \phi)(\eta_k, \omega) \otimes \eta_k. \quad (2.2)$$

Ici $\Gamma(Y, \nu)$ est le fibré des champs de vecteurs normaux et lisses sur Y , tandis que les $(e_i)_{i=1,2,3}$ forment un champ local de vecteurs orthonormaux de TY avec $e_3 = e_1 \times e_2$ et $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. De plus les $(\eta_k)_{k=1,2,3,4}$ forment un champ local de vecteurs orthonormaux de ν . Enfin, ∇^\perp est la connexion sur ν induite par la connexion de Levi-Civita ∇ de (M, g) .

Démonstration. Rappelons la définition d'un objet fort utile, la 3-forme χ à valeurs dans TM définie par

$$\forall u, v, w, \eta \in TM, \langle \chi(u, v, w), \eta \rangle = * \phi(u, v, w, \eta),$$

où $*$ est l'étoile de Hodge associée à g . On peut donc écrire

$$\chi = \sum_k \eta_k \lrcorner * \phi \otimes \eta_k, \quad (2.3)$$

où $(\eta_k)_{k=1,2,\dots,7}$ est un champ de vecteurs orthonormaux formant une base de TM . De plus, une 3-sous-variété Y est associative si et seulement si $\chi|_{TY}$ est nulle. Soit $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, où les $(e_i)_i$ forment une base orthonormée de TY telle que $e_3 = e_1 \times e_2$. On définit l'opérateur :

$$F(\sigma) = \exp_\sigma^* \chi(\omega) \in \Gamma(Y, \nu_\sigma), \quad (2.4)$$

où $\sigma \in \Gamma(Y, \nu)$ et ν_σ est le fibré normal à $\exp_\sigma(Y)$. L'opérateur F s'annule donc sur les sections σ générant une déformation $\exp_\sigma(Y)$ associative. Si $(\sigma_t)_{t \in [0, \epsilon]}$ définit un arc de déformations de Y , pas nécessairement associatives, et si $s = \frac{d\sigma_t}{dt}|_{t=0} \in \Gamma(Y, \nu)$, alors en utilisant une connexion ∇ sur TM , on trouve en $\sigma = 0$:

$$\nabla_s F = \sum_k \mathcal{L}_s(\eta_k \lrcorner * \phi)(\omega) \otimes \eta_k + (\eta_k \lrcorner * \phi)(\omega) \otimes \nabla_s \eta_k,$$

où \mathcal{L}_s est la dérivée de Lie dans la direction s . Le second terme est nul en raison de l'associativité de Y , et des formules classiques de géométrie riemannienne montrent après quelques calculs que $\nabla_s F$ est donné par la formule (2.2). \blacksquare

2.2 Sous-variétés associatives à bord

Dans [34], avec F. Witt nous avons étendu l'étude de McLean au cas des déformations associatives d'une sous-variété Y à bord dans une sous-variété coassociative fixe X . On désigne par $\mathcal{M}_{Y,X}$ l'espace des déformations associatives Y' de Y telles que Y' a son bord inclus dans X .

2.2.1 La géométrie du bord

Avant d'énoncer le théorème principal de l'article [34], remarquons qu'un vecteur unitaire n de TM fournit une structure complexe J_n isométrique sur le supplémentaire orthogonal n^\perp de $\langle n \rangle$ dans TM , par l'action

$$J_n : v \in n^\perp \mapsto n \times v.$$

Maintenant, si Y est une sous-variété associative à bord dans une sous-variété coassociative X , on appelle ν_X le supplémentaire orthogonal de $T\partial Y$ dans TX au-dessus de ∂Y , et μ_X le supplémentaire orthogonal de ν_X dans le fibré normal $\nu_{\partial Y}$ de Y au-dessus de ∂Y . On a donc

$$TM|_{\partial Y} = \langle n \rangle \oplus T\partial Y \oplus \nu_X \oplus \mu_X.$$

Désignons enfin par $n \in TY$ le vecteur unitaire normal rentrant au bord ∂Y . Le lemme suivant décrit la géométrie au bord de Y :

Lemme 2.2.1 (voir [34]) *Les fibrés $T\partial Y$, ν_X et μ_X sont stables par J_n . De plus, en tant que fibrés en J_n -droites complexes au-dessus de ∂Y , on a la relation*

$$\overline{\mu_X} = \nu_X \otimes_{\mathbb{C}} T\partial Y.$$

Démonstration. D'abord, il faut remarquer que Y rencontre orthogonalement X , en d'autres termes que n est orthogonal à ν_X . En effet, si $e \in \nu_X$ et si $v \in T\partial Y$ est normé avec $w = n \times v$, donc $n = w \times v$ car Y est associative, on a

$$\langle n, e \rangle = \langle w \times v, e \rangle = \phi(w, v, e) = 0$$

car X est coassociative. Le reste est du même acabit. ■

2.2.2 Le calcul de l'indice

Le théorème principal de cette partie est le calcul de l'indice du problème de déformation.

Théorème 2.2.2 (voir [34]) *Soit M^7 une variété lisse munie d'une G_2 -structure, et Y une sous-variété associative lisse à bord dans X coassociative. Le problème des déformations associatives de Y à bord dans X est elliptique, et son indice est égal à l'indice de l'opérateur de Cauchy-Riemann associé au fibré $\nu_X \rightarrow \partial Y$ et à la structure complexe J_n :*

$$\bar{\partial}_{\nu_X} : \Gamma(\partial Y, \nu_X) \rightarrow \Gamma(\partial Y, \nu_X \otimes \overline{K_{\partial Y}}),$$

où $\overline{K_{\partial Y}}$ est le fibré anticanonique de ∂Y . Par le théorème de Riemann-Roch, cet indice est égal à

$$\text{indice}(X, Y) = 1 - g + \int_{\partial Y} c_1(\nu_X),$$

où g est le genre de ∂Y .

Démonstration. Soit $B : \Gamma(\partial Y, \nu) \rightarrow \Gamma(\partial Y, \mu_X) \subset \Gamma(\partial Y, \nu)$ le projecteur orthogonal des champs de vecteurs normaux à Y au-dessus de son bord, dans l'espace des champs de vecteurs à valeurs dans le sous-fibré μ_X . L'espace tangent à $\mathcal{M}_{X,Y}$ peut être identifié au noyau de l'opérateur :

$$\begin{aligned} (D, B) : \Gamma(Y, \nu) &\rightarrow \Gamma(Y, \nu) \times \Gamma(\partial Y, \mu_X) \\ s &\mapsto (Ds, B(s|_{\partial Y})), \end{aligned}$$

où D est l'opérateur donné par le Théorème 2.2. Afin d'appliquer les méthodes standard des problèmes elliptiques à bord, nous définissons le projecteur de Calderon :

$$Q_D : \Gamma(\partial Y, \nu) \rightarrow \mathcal{H}(D) = \{s|_{\partial Y} \mid s \in \Gamma(Y, \nu), Ds = 0\} \subset \Gamma(\partial Y, \nu).$$

La condition de bord B associée à D est dite *elliptique* si la restriction du symbole principal

$$\sigma(B)|_{Im(\sigma(Q_D))} : Im(\sigma(Q_D)) \rightarrow Im(\sigma(B))$$

est un isomorphisme (cf. [12, Définition 18.1]). Dans ce cas, on bénéficie du théorème suivant :

Théorème 2.2.3 ([12], Théorèmes 19.1, 20.12, 20.13) *Soit $B : \Gamma(\partial Y, \nu) \rightarrow \Gamma(\partial Y, \nu_X)$ une condition de bord pour D . Si B est elliptique, l'opérateur (D, B) est de Fredholm et son indice est donné par*

$$indice(D, B) = indice(BQ_D : \mathcal{H}(D) \rightarrow \Gamma(\partial Y, \nu)),$$

où nous avons conservé le léger abus de notation de [12] qui écrit BQ_D pour $B|_{Im(Q_D)}$.

Le sous-espace \mathcal{H}_D est difficile à déterminer. Nous allons donc en réalité utiliser une proposition comparant deux indices, dont l'un va être nul :

Proposition 2.2.4 ([12], Théorème 21.2) *Si $B_i : \Gamma(\partial Y, \nu) \rightarrow \Gamma(\partial, \nu_i), i = 1, 2$ sont deux conditions de bord elliptiques pour D , alors*

$$indice(D, B_2) - indice(D, B_1) = indice(B_2Q_DB_1 : \Gamma(\partial Y, \nu_1) \rightarrow \Gamma(\partial, \nu_2)).$$

Dans notre cas, B_2 sera B , et B_1 l'opérateur P^+ défini de la façon suivante. Soit R l'opérateur déterminé par $D = \Gamma(\partial_n + R)$ près du bord de Y (cf. relation (21.8) de [12]), où n est le vecteur normal rentrant dans Y . Par identification à l'opérateur D du Théorème 2.2, on trouve $\Gamma = J_n$ et

$$R = w \times \nabla_v - v \times \nabla_w,$$

si v et w forment une trivialisatation locale de $T\partial Y$ satisfaisant $w = n \times v$. Par ailleurs, l'action de J_n au-dessus de ∂Y sur le complexifié $\nu|_{\partial Y} \otimes \mathbb{C}$ se diagonalise avec pour valeurs propres $\pm i$. L'espace des spineurs positifs ν^+ (resp. négatifs ν^-) au-dessus de ∂Y est le sous-espace propre pour i (resp. $-i$), soit $\nu^{1,0}$ (resp. $\nu^{0,1}$). L'opérateur P^+ est la projection sur ν^+ . On a alors :

Proposition 2.2.5 ([12], Théorème 21.5) *Si Y est de dimension impaire, le projecteur orthogonal P^+ (resp. P^-) sur les spineurs positifs (resp. négatifs) au-dessus du bord de Y (cf. définition ci-dessous) définit toujours une condition elliptique d'indice nul.*

Par conséquent, la Proposition 2.2.4 donne l'égalité suivante :

$$\text{indice}(D, B) = \text{indice}(RQ_D P^+ : \Gamma(\partial Y, \nu^{1,0}) \rightarrow \Gamma(\partial Y, \mu_X \otimes \mathbb{C})).$$

Nous calculons maintenant les différents symboles des opérateurs définis, et calculons ensuite l'indice. Avant cela, remarquons que si $a \in \Gamma(U, \nu_X)$ est une section ne s'annulant pas sur un ouvert $U \subset \partial Y$, alors le Lemme 2.2.1 implique

$$\nu_X^{\mathbb{C}}|_{loc} = \langle \alpha, \bar{\alpha} \rangle \text{ et } \mu_X^{\mathbb{C}}|_{loc} = \langle \beta, \bar{\beta} \rangle$$

avec $\alpha = a - iJ_n a$ et $\beta = -v \times \bar{\alpha}$. De plus, il est facile de voir que le fibré des spineurs positifs (resp. négatifs) est donné par $\nu^{1,0} = \langle \alpha, \beta \rangle$ (resp. $\nu^{0,1} = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$). Dans la suite, nous choisissons $\{\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ comme trivialisations locales de $\nu^{\mathbb{C}}$.

Selon le théorème de Calderón-Seeley, voir [12, Théorème 12.4], le symbole $\sigma(Q_D)$ du projecteur de Calderón est le projecteur sur le sous-espace associé aux valeurs propres de partie réelle strictement positive du symbole de l'opérateur R . Si $p \in \partial Y$ et $(\eta_v, \eta_w) \in T\partial Y^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ est de norme 1, on trouve aisément (avec $\eta = \eta_v v + \eta_w w$ ou $\eta_v + i\eta_w$ si l'on considère $T\partial Y$ comme une droite complexe) que

$$\sigma(R)(p, \eta) = i(\eta_v w \times -\eta_w v \times) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\eta} & \\ & 0 & -\bar{\eta} & 0 \\ 0 & -\eta & & \\ \eta & 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

si bien que les valeurs propres sont simplement ± 1 , et $\sigma(Q_D) = \frac{1}{2}(\sigma(R) + Id)$. En rappelant que la base choisie pour $\mu_X^{\mathbb{C}}$ est $\{\beta, \bar{\beta}\}$, on obtient également que

$$\sigma(B)(p, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Hom}(\nu^{\mathbb{C}}, \mu_X^{\mathbb{C}})|_p$$

et

$$\sigma(B)\sigma(Q_D) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\bar{\eta} & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Hom}(\nu^{\mathbb{C}}, \mu_X^{\mathbb{C}})|_p,$$

ce qui montre que la condition B est elliptique. Enfin, le symbole de $BQ_D P^+$ est

$$\sigma(B)\sigma(Q_D)\sigma(P^+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\bar{\eta} & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{pmatrix} \in \text{Hom}(\nu^+, \mu_X^{\mathbb{C}})|_p.$$

Rappelons que le Lemme 2.2.1 identifie $\nu_X^{1,0} \otimes \overline{K_{\partial Y}}$ avec $\mu_X^{0,1} = \nu^{0,1} \cap \mu_X^{\mathbb{C}}$. Or l'opérateur de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial}_{\nu_X} : \Gamma(\partial Y, \nu_X^{1,0}) \rightarrow \Gamma(\partial Y, \nu_X^{1,0} \otimes \overline{K_{\partial Y}})$$

possède un symbole égal à $\sigma(\bar{\partial}_{\nu_X})(p, \eta) = \frac{i}{2}(\eta_v + i\eta_w) = \frac{i}{2}\eta$. L'indice de (D, B) est donc égal à celui de cet opérateur à une constante près, et le Théorème 2.2.2 s'ensuit par la formule de Riemann-Roch.

Enfin, le résultat est le même si la G_2 -structure possède de la torsion. En effet, la partie d'ordre nul due à cette torsion dans l'écriture de D dans le Théorème 2.2 n'intervient pas dans le calcul de l'indice. ■

Remarque 2.2.6 *De même que déformer une courbe holomorphe avec bord dans une sous-variété totalement réelle L est un problème elliptique, sans qu'il soit nécessaire que L soit lagrangienne, de même il n'est pas nécessaire que X soit coassociative. Il suffit (voir [34, §5]) que TX ne contiennent pas de 3-plan associatif, pour que le problème des déformations associatives d'une sous-variété associative à bord dans X soit elliptique. Si $P : TM|_{\partial Y} \rightarrow \nu_{\partial Y}$ est la projection orthogonale de TM sur le fibré normal à Y sur son bord, et si ν_X est l'image par P du supplémentaire orthogonal de $T\partial Y$ dans TX , alors l'indice est donné par la formule du Théorème 2.2.2.*

2.3 Obstruction dans les modules

L'indice calculé par le Théorème 2.2.2 est la dimension virtuelle de l'espace des déformations d'une sous-variété associative à bord. Mais il est possible que le conoyau de (D, B) (resp. de D dans le cas sans bord) soit non nul. En particulier, les exemples en géométrie G_2 sont très peu génériques, et souvent en holonomie dégénérée, avec des symétries. Par conséquent, les espaces de modules pour les sous-variétés associatives, avec ou sans bord, ne sont en général pas de la bonne dimension. Par exemple, l'espace de déformation de $T^3 \times \{*\}$ dans le tore standard $T^3 \times T^4$ est de dimension 4. De façon similaire les sous-variétés associatives

$$Y_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, 0, 0), 0 \leq x_1 \leq 1/2, x_2, x_3 \in S^1\}, (\lambda, \mu) \in T^2$$

ont leur bord inclus dans la réunion X des deux tores coassociatifs

$$X_i = \{(i/2, x_2, x_3, x_4, x_5, 0, 0), x_2, x_3, x_4, x_5 \in S^1\}, i = 0, 1.$$

L'indice du problème est nul, et pourtant l'espace de déformations est de dimension égal à deux.

Nous allons donner deux façons de s'assurer que l'espace des modules est de la bonne dimension. La première perturbe la structure G_2 ou le bord X , la seconde impose à Y des conditions métriques. Avant d'énoncer ces résultats, nous donnons une condition suffisante pour que les espaces de déformations soient lisses et de la dimension attendue.

2.3.1 Conditions suffisantes

Nous commençons par une condition suffisante pour que l'espace de modules \mathcal{M}_Y soit lisse.

Proposition 2.3.1 (voir [30]) *Soit M une variété possédant une G_2 -structure et Y une sous-variété compacte lisse associative. Si le conoyau, donc le noyau de D est nul, alors \mathcal{M}_Y est lisse au voisinage de Y et de dimension nulle, si bien que Y est isolée.*

Démonstration. Si $k > 5/2$, les éléments de l'espace de Banach $\mathcal{E} = W^{k,2}(Y, \nu)$ sont C^1 , ce qui permet de définir le fibré normal ν_σ à $\exp_\sigma(Y)$. Si \mathcal{F} est le fibré de Banach au-dessus de \mathcal{E} , où $\mathcal{F}_\sigma = W^{k-1,2}(Y, \nu_\sigma)$ quand $\sigma \in \mathcal{E}$, l'opérateur F défini par l'équation (2.4) est une section de \mathcal{F} au-dessus de \mathcal{E} . Ensuite, son linéarisé est l'opérateur de Dirac tordu D donné par le Théorème 2.1.1. Il est facile de vérifier que D est symétrique et elliptique. Son symbole est en effet

$$\sigma(D)(p, \eta)(s) = \sum_i \eta_i s \times e_i$$

donc inversible si $\eta = \sum_i \eta_i e_i \in TY \setminus \{0\}$. Par conséquent il est de Fredholm, et son indice est nul, si bien que la dimension virtuelle de \mathcal{M}_Y est nulle. Le théorème des fonctions implicites, ainsi que le caractère a posteriori lisse des éléments du noyau de D dû à son ellipticité, impliquent alors le résultat. ■

Dans le cas à bord, nous avons la proposition suivant équivalente :

Proposition 2.3.2 (voir [30]) *Soit M une variété possédant une G_2 -structure et Y une sous-variété compacte lisse associative Y à bord dans X coassociative. Considérons l'opérateur :*

$$D : \mathcal{E}_X = \{s \in \Gamma(Y, \nu) \mid s|_{\partial Y} \in \Gamma(\partial Y, \nu_X)\} \rightarrow \Gamma(Y, \nu).$$

Si le conoyau de $D : \mathcal{E}_X \rightarrow \Gamma(Y, \nu)$ est nul, alors $\mathcal{M}_{Y,X}$ est lisse près de Y et de dimension égale à l'indice $\text{index}(Y, X)$ donné par le Théorème 2.2.2.

Démonstration. On suppose d'abord que X est totalement géodésique près de ∂Y . Dans ce cas, $\exp_\sigma(Y)$ est à bord dans X pour $\sigma \in \Gamma(Y, \nu)$ assez petit, si bien que $\mathcal{M}_{Y,X}$ s'identifie localement avec les zéros de l'opérateur $F : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{F}$, où $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}_X$ désigne le même fibré que dans la Proposition 2.3.1. On conclut essentiellement comme dans la Proposition 2.3.1, en utilisant les Théorèmes 20.8 et 19.1 de [12]. Dans le cas général où X n'est pas totalement géodésique, on modifie la métrique g en \hat{g} au voisinage de X en rendant X totalement géodésique pour \hat{g} comme dans [46], et on utilise l'exponentielle pour cette nouvelle métrique afin de définir $F : \Gamma(Y, \hat{\nu}) \rightarrow \mathcal{F}_\sigma$, où $\hat{\nu}$ est le fibré normal à Y pour \hat{g} . La dérivée de F dans la direction $s \in \Gamma(Y, \hat{\nu})$ donne un élément $\hat{D}s \in \Gamma(Y, \nu)$. Il est facile de voir que \hat{D} et D ont des noyau et conoyau isomorphes. ■

2.3.2 Généricité

Un premier moyen de s'assurer que que l'espace de modules est lisse est de perturber la structure G_2 .

Théorème 2.3.3 (voir [30]) Soit M^7 une variété équipée d'une structure G_2 fermée ϕ , et Y une sous-variété compacte lisse associative. Alors il existe un voisinage U de Y , tel que pour toute perturbation générique fermée ψ de la structure G_2 , le sous-espace $\{\tilde{Y} \in \mathcal{M}_{Y,\psi}, \tilde{Y} \subset U\}$ est lisse (donc comporte un nombre fini non nul d'éléments) ou vide.

Démonstration. Pour toute section $\sigma \in \Gamma(Y, \nu)$, et toute G_2 -structure ψ , on considère l'opérateur

$$F(\sigma, \psi) = \exp_{\sigma}^* \chi(\omega) \in \Gamma(Y, \nu_{\sigma}). \quad (2.5)$$

Ici l'exponentielle dépend de la métrique fixe g associée à ϕ , tandis que le fibré normal ν_{σ} au-dessus de $\exp_{\sigma} Y$ dépend de la métrique associée à ψ . Si $(\phi_t)_{t \in [0, \epsilon]}$ est un arc de structures G_2 , on a

$$F(0, \phi_t) = \sum_k (\eta_{k,t} \wedge \omega) \lrcorner *_t \phi_t \otimes \eta_{k,t},$$

où $*_t$ est l'étoile de Hodge pour la métrique g_t associée à ϕ_t et $(\eta_{i,t})_{i=1,2,3,4}$ une base orthonormée de ν_{ϕ_t} . La dérivée par rapport au temps nécessite de connaître la dérivée de $*_t \phi_t$. Si $\Theta(\psi) = *_\psi \psi$, la Proposition 10.3.5 dans l'ouvrage [43] montre que si ϕ est une G_2 -structure fermée et $\mathcal{Z}^3(M)$ est l'espace des 3-formes fermées, on a

$$\forall \psi \in \mathcal{Z}^3(M), d_{\phi} \Theta(\psi) = *_\phi \mathcal{P}(\psi), \quad (2.6)$$

où $\mathcal{P} = \frac{4}{3}\pi_1 + \pi_7 - \pi_{27}$. Ici π_1, π_7 et π_{27} sont les projections orthogonales correspondant à la décomposition $\Lambda^3 T^*M = \Lambda_1^3 \oplus \Lambda_7^3 \oplus \Lambda_{27}^3$ associée aux représentations irréductibles de G_2 , voir le Lemme 3.2 de [26] ou la Proposition 10.1.4 de [43]. La dérivée de F le long de ψ en $(0, \phi)$ est donc

$$\nabla_{\psi} F = \sum_k (\eta_k \wedge \omega) \lrcorner *_\psi \mathcal{P}(\psi) \otimes \eta_k \in \Gamma(Y, \nu). \quad (2.7)$$

Lemme 2.3.4 L'opérateur $\nabla F : \mathcal{Z}^3(M) \rightarrow \Gamma(Y, \nu)$ défini par (2.7) est surjectif.

Démonstration. Soit $s \in \Gamma(Y, \nu)$ et α la 1-forme duale de s $\alpha \in \Gamma(Y, T^*M)$ définie par $\forall y \in Y, \forall v \in T_y M, \alpha_y(v) = \langle s(y), v \rangle$. Puisque (cf. [26])

$$\Lambda_7^3 = \{*(\phi \wedge \alpha), \alpha \in \Lambda^1 T^*M\},$$

il est facile de vérifier que

$$\sum_k (\eta_k \wedge \omega) \lrcorner *_\psi \mathcal{P}(*(\phi \wedge \alpha)) \otimes \eta_k = s.$$

On peut alors, en utilisant l'associativité de Y , étendre la 3-forme $*(\phi \wedge \alpha)$ hors de Y en une 3-forme fermée, ce qui conclut la démonstration du Lemme 2.3.4. \blacksquare

Maintenant, si \mathcal{Z}_D est le sous-espace de dimension finie de $\mathcal{Z}^3(M)$ généré par les 3-formes ψ construites par le lemme précédent pour une base de $\text{coker } D = \ker D$, et si

$$\mathcal{M} = \{(\sigma, \psi) \in W^{3,2}(Y, \nu) \times \mathcal{Z}_D, F(\sigma, \psi) = 0\},$$

le théorème de Sard-Smale appliqué à la projection $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_D$ et l'ellipticité de D impliquent le résultat. \blacksquare

Remarque 2.3.5 Si (M, ϕ) est sans torsion, on ne peut pas en général espérer perturber ϕ pour rendre la situation non obstruée, tout en conservant une structure sans torsion. En effet, l'espace tangent en ϕ de l'espace de module des structures sans torsion s'identifie avec $\mathcal{L} \oplus \mathcal{H}^3(M, \mathbb{R})$, où \mathcal{L} est le sous-espace des dérivées de Lie de ϕ , i.e. $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_X \phi, X \in C^0(M, TM)\}$, et $\mathcal{H}^3(M, \mathbb{R})$ est l'espace des 3-formes harmoniques sur M , voir [43]. Si $\psi \in \mathcal{L}$, la démonstration du Théorème 2.1.1 montre que la dérivée de F le long de ψ est égale à $D\psi$. Donc \mathcal{L} ne peut pas permettre à ∇F de devenir surjective. Par ailleurs la dimension of $\text{coker} D$ peut être plus grande que $b^3(M)$, comme le montre l'exemple suivant.

Une famille d'exemples où $b^3(M) < \dim \text{coker} D$. Soit N une variété de Calabi-Yau projective et de dimension trois, munie d'un fibré holomorphe très ample L , et N_d la dimension de $\mathbb{P}H^0(N, L^d)$. Si d est assez grand de sorte que $N_d(N_d - 1)/2 > b^3(N \times S^1)$, choisissons C une courbe générique définie par l'intersection du lieu d'annulation de deux sections de L^d . Alors son espace de déformations est de dimension $N_d(N_d - 1)/2$, de sorte que la dimension du noyau de l'opérateur de Dirac associé à la sous-variété associative $C \times S^1 \subset N \times S^1$ est strictement plus grande que $b^3(N \times S^1)$.

En ce qui concerne les sous-variétés associatives à bord, nous avons montré le

Théorème 2.3.6 (voir [30]) Soit M^7 une variété équipée d'une G_2 -structure ϕ , et Y une sous-variété compacte lisse ϕ -associative à bord dans X coassociative. Alors il existe un voisinage U de Y , tel que pour toute perturbation lisse \tilde{X} de X suffisamment proche de X , le sous-espace $\{\tilde{Y} \in \mathcal{M}_{Y, \tilde{X}}, \tilde{Y} \subset U\}$ est lisse (donc de la dimension donnée par le Théorème 2.2.2) ou vide.

On n'impose pas ici à la déformation \tilde{X} d'être associative.

Démonstration. Rappelons que si X est coassociative, son fibré normal N_X dans M s'identifie avec l'espace de ses 2-formes auto-duales $\Omega_+^2(X)$. Pour $\alpha \in \Omega_+^2(X)$, on considère $\sigma_\alpha \in \Gamma(\partial Y, N_X)$ la restriction au bord de Y du champ de vecteurs associé à α . Considérons alors le sous-espace

$$\mathcal{C} = \{\alpha \in \Omega_+^2(X), \sigma_\alpha \in \Gamma(\partial Y, \mu_X)\},$$

où μ_X a été défini dans le Lemme 2.2.1. Ce sera notre espace de paramètre pour la déformation de X . Pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$, on peut facilement étendre σ_α à $\hat{\sigma}_\alpha \in \Gamma(Y, \nu)$. Soit maintenant l'espace

$$\mathcal{E}_\partial = \{(\alpha, s) \in \mathcal{C} \times \Gamma(Y, \nu), \forall y \in \partial Y, s(y) \in T_y X\}.$$

On suppose que X est totalement géodésique pour la métrique associée à ϕ . Sinon, on effectue la modification de la démonstration de la Proposition 2.3.2. Si $(\alpha, s) \in \mathcal{E}_\partial$, et si $\phi_{\alpha, s} = \exp_{\hat{\sigma}_\alpha} \circ \exp_s$, alors $Y_{\alpha, s} = \phi_{\alpha, s}(Y)$ a son bord dans $X_\alpha = \exp_{\sigma_\alpha}(X)$. Si $\mathcal{F}_{\alpha, s}$ est le fibré au-dessus de \mathcal{E}_∂ dont la fibre $\mathcal{F}_{\alpha, s}$ est $\Gamma(Y, \nu_{\alpha, s})$, où $\nu_{\alpha, s}$ est le fibré normal à $Y_{\alpha, s}$, et $F : \mathcal{E}_\partial \rightarrow \mathcal{F}$ la section définie par $F(\alpha, s) = \phi_{\alpha, s}^* \chi(\omega)$, alors $Y_{\alpha, s}$ est associative si et seulement si $F(\alpha, s) = 0$. Considérons enfin l'application de restriction :

$$\begin{aligned} F_\alpha : \{s \in \Gamma(Y, \nu), \forall y \in \partial Y, s(y) \in T_y X\} &\rightarrow \Gamma(Y, \nu_{\alpha, s}) \\ s &\mapsto F(\alpha, s). \end{aligned}$$

Des calculs analogues à la preuve du Théorème 2.1.1 celle du Théorème 2.2.2 montrent que pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$, la différentielle de F_α est elliptique dans le sens de la Définition 18.1 de [12]. De plus, F_α est manifestement une déformation de F_0 , donc F_α est Fredholm et d'indice calculé par le Theorem 2.2.2. Enfin, la dérivée de F en $(0,0)$ se calcule comme dans le Théorème 2.1.1. Au point $(0,0)$, la dérivée de F selon (α, s) est égale à

$$\nabla_{(\alpha,s)}F = D(s + \hat{\sigma}_\alpha).$$

En utilisant le caractère surjectif de D démontré par le Théorème 9.1 de [12], pour $s' \in \Gamma(Y, \nu)$ il existe une section $s \in \Gamma(Y, \nu)$ telle que $Ds = s'$. En décomposant $s = s_\nu + s_\mu$ avec $s_\nu \in \Gamma(\partial Y, \nu_X)$ et $s_\mu \in \Gamma(\partial Y, \mu_X)$, et en choisissant $\alpha \in \mathcal{C}$ telle que $s_\mu = \sigma_\alpha$, on a $D((s - \hat{\sigma}_\alpha) + \hat{\sigma}_\alpha) = s'$ avec $(\alpha, s - \hat{\sigma}_\alpha) \in \mathcal{E}_\partial$ et donc ∇F surjective. Un théorème de type Sard-Smale pour les Banach à paramètre permet de conclure. ■

2.3.3 Conditions métriques

Dans [53, page 30], McLean donne un exemple d'une sous-variété associative isolée. Rappelons que dans [13], R. Bryant et S. Salamon ont construit sur le fibré spinoriel de S^3 une métrique à holonomie G_2 . La base S^3 est alors associative, l'opérateur décrivant la déformation de Y est dans ce cas l'opérateur de Dirac sur S^3 , et la métrique sur Y est la métrique ronde. Par le théorème d'A. Lichnerowicz (cf. [49]), il n'existe pas de spineur harmonique, et par conséquent de déformation de Y .

Nous nous sommes inspirés de cet exemple dans [30]. D'abord, si la structure ϕ est fermée, les sous-variétés compactes associatives sont minimales. On peut donc appliquer le théorème de J. Simons. Avant de l'énoncer, rappelons l'opérateur introduit par Simons, une sorte d'opérateur de Ricci partiel :

Définition 2.3.7 *Soit (M, g) une variété riemannienne et Y une sous-variété de dimension p et de fibré normal ν . Si $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une trivialisatation de TY par des vecteurs orthonormés, on définit l'opérateur*

$$\mathcal{R} : \Gamma(Y, \nu) \rightarrow \Gamma(Y, \nu), \quad \mathcal{R}s = \pi_\nu \sum_{i=1}^p R(e_i, s)e_i,$$

où R est le tenseur de courbure de g sur M et π_ν le projecteur orthogonal sur ν .

Il s'avère que \mathcal{R} est intrinsèque et symétrique, et permet de définir un nouvel opérateur \mathcal{A} .

Définition 2.3.8 *Soit SY le fibré sur Y dont la fibre au-dessus de $y \in Y$ est l'espace des endomorphismes symétriques de $T_y Y$, et $A \in \text{Hom}(\nu, SY)$ la seconde forme fondamentale définie par $A(s)(u) = -\nabla^\top s$, où $u \in TY$, $s \in \nu$ et ∇^\top est la projection sur TY de la connection de Levi-Civita ∇ , avec $\nabla = \nabla^\top + \nabla^\perp$. L'opérateur $\mathcal{A} : \Gamma(Y, \nu) \rightarrow \Gamma(Y, \nu)$ est défini par $\mathcal{A} = A^t \circ A$, où A^t est la transposée de A .*

On sait que \mathcal{A} est un opérateur symétrique et d'ordre nul. De plus, \mathcal{A} est nul lorsque Y est totalement géodésique.

Théorème 2.3.9 ([67]) *Soit Y une sous-variété minimale dans M , telle que $\mathcal{R}_\nu = \mathcal{R} - \mathcal{A}$ est un opérateur strictement positif. Alors Y est isolée comme sous-variété minimale.*

Nous avons donné une démonstration de ce théorème dans le cas où Y est associative et la G_2 -structure sans torsion.

Démonstration. Pour tous champs de vecteurs v et w dans $\Gamma(Y, TY)$, soit $\nabla_{v,w}^{\perp 2}$ l'opérateur défini par $\nabla_{v,w}^{\perp 2} = \nabla_v^\perp \nabla_w^\perp - \nabla_{\nabla_v^\perp w}^\perp$ agissant sur $\Gamma(Y, \nu)$. Il est facile de voir que $\nabla^{\perp 2}$ est tensoriel en v et w . Définissons de plus le laplacien

$$\nabla^{\perp *} \nabla^\perp = -\text{trace}(\nabla^{\perp 2}) = -\sum_i \nabla_{e_i, e_i}^{\perp 2},$$

où les $(e_i)_{i=1,2,3}$ définissent une trivialisatation orthonormée locale de TY . Après quelques calculs, on trouve :

Théorème 2.3.10 (voir [30]) *Pour Y associative dans une variété munie d'une G_2 -structure sans torsion, $D^2 = \nabla^{\perp *} \nabla^\perp + \mathcal{R}_\nu$.*

On suit maintenant la méthode de S. Bochner. Le Théorème 2.3.10 permet de montrer que pour $s \in \Gamma(Y, \nu)$, $-\frac{1}{2}\Delta|s|^2 = |\nabla^\perp s|^2 - \langle D^2 s, s \rangle + \langle \mathcal{R}_\nu s, s \rangle$. Si $s \in \ker D$ désigne une déformation infinitésimale associative de Y , l'intégration de l'équation précédente sur Y , qu'on suppose ici sans bord, donne

$$0 = \int_Y |\nabla^\perp s|^2 + \langle \mathcal{R}_\nu s, s \rangle dy. \quad (2.8)$$

La conclusion du Théorème 2.3.9 s'ensuit facilement. ■

Lorsque Y est à bord, l'intégration (2.8) est corrigée en

$$\int_Y |\nabla^\perp s|^2 dy + \int_Y \langle \mathcal{R}s, s \rangle dy + \int_{\partial Y} \langle \mathcal{D}_{\mu_X} s, s \rangle d\sigma = 0. \quad (2.9)$$

Ici, pour tout sous-fibré L de $\nu_{\partial Y}$ invariant par l'action $J_n = n \times$ du vecteur rentrant dans Y normal à ∂Y , on définit $\mathcal{D}_L : \Gamma(\partial Y, L) \rightarrow \Gamma(\partial Y, L)$ de la façon suivante. Soit $\{v, w = n \times v\}$ une trivialisatation orthonormée locale de $T\partial Y$, alors

$$\mathcal{D}_L s = \pi_L(v \times \nabla_w^\perp s - w \times \nabla_v^\perp s),$$

où $\pi_L : \nu_{\partial Y} \rightarrow L$ est la projection orthogonale sur L et ∇^\perp la connexion normale sur ν induite par la connexion de Levi-Civita ∇ sur M .

Lemme 2.3.11 (voir [30]) *L'opérateur de bord \mathcal{D}_L est d'ordre 0, symétrique et sa définition ne dépend pas de la trivialisatation choisie. De plus, sa trace est égale à $2H$, où H est la courbure moyenne de ∂Y dans Y selon $-n$.*

Avant de donner l'équivalent du théorème de Simons dans le cas des associatives à bord, notons l'identité $\text{coker}(D, L) = \ker(D, L^\perp)$, où L^\perp est le supplémentaire orthogonal de L dans $\nu_{\partial Y}$, et où l'opérateur (D, L) est défini par

$$(D, L) = D : \{s \in \Gamma(Y, \nu), s|_{\partial Y} \in L\} \rightarrow \Gamma(Y, \nu).$$

De (2.9) on déduit maintenant le

Théorème 2.3.12 (voir [30]) *Soit M munie d'une G_2 -structure sans torsion et Y une sous-variété associative à bord dans X coassociative. Si \mathcal{R}_ν et \mathcal{D}_{μ_X} sont strictement positifs, alors $\mathcal{M}_{Y,X}$ est localement lisse et de dimension donnée par le Théorème 2.2.2.*

2.4 Exemples

2.4.1 Flatland

Soit $M = \mathbb{R}^7$ muni de sa métrique euclidienne standard, et $Y^3 \subset \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ une boule de bord réel analytique, et $e \in \Gamma(Y, \nu)$ un champ de vecteur réel analytique normal à Y ne s'annulant pas. Par la théorie de Cartan-Kähler, il existe une unique sous-variété coassociative X_e contenant ∂Y , définie au voisinage de ∂Y , et telle que $e \in T_y X_e$ pour tout $y \in \partial Y$, voir [39].

Proposition 2.4.1 (voir [30]) *Si ∂Y est strictement convexe, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $e \in \Gamma(\partial Y, \nu)$ satisfaisant $\|de\|_\infty \leq \epsilon$, l'espace de module \mathcal{M}_{Y,X_e} est localement lisse et de dimension égale à un.*

Démonstration. Puisque le fibré ν_{X_e} est trivialisé par e et le genre g de la sphère ∂Y est égal à 0, l'indice du problème vaut $c_1(\nu_{X_e}) + 1 - g = 1$. Supposons d'abord que e est constante. Si (v, w) est une trivialisatation locale orthonormée par les directions caractéristiques de TY , $v \times e$ est dans μ_{X_e} , et on montre que

$$\mathcal{D}_{\mu_{X_e}}(v \times e) = k_v v \times e,$$

où k_v est la courbure de ∂Y dans la direction v . Par le Lemme 2.3.11, on en déduit que l'autre valeur propre est la seconde courbure. Par conséquent $\mathcal{D}_{\mu_{X_e}}$ est un opérateur strictement positif. On a par ailleurs dans cette situation plate $\mathcal{R}_\nu = 0$, si bien que le Théorème 2.3.12 ne s'applique pas directement. Toutefois, si $s \in \ker(D, \mu_{X_e})$, l'équation (2.9) implique que $\nabla^\perp s = 0$ ainsi que $s|_{\partial Y} = 0$. On en déduit facilement $s = 0$. Si on ne suppose plus que e est constant mais que de est suffisamment petit, par continuité de μ_{X_e} l'opérateur $\mathcal{D}_{\mu_{X_e}}$ reste strictement positif, et le conoyau reste trivial. ■

2.4.2 La construction de Bryant et Salamon

Rappelons que les auteurs ont construit dans [13] une métrique g à holonomie G_2 sur le fibré $\mathcal{S} \simeq S^3 \times \mathbb{R}^4$ des spineurs de S^3 muni de sa métrique ronde g_S . La métrique g s'écrit

$$g = \alpha(r)\pi^*g_S + \beta(r)g_v,$$

où g_v est la métrique sur la fibre $\mathcal{S}_x \simeq \mathbb{R}^4$ induite par g_S , r la norme associée à g_v et $\pi : \mathcal{S} \rightarrow S^3$ la projection naturelle. On peut vérifier que ∇^\perp s'identifie avec la connexion ∇ sur les spineurs, que l'opérateur D est l'opérateur de Dirac sur S^3 , et que, en utilisant la formule de Lichnerowicz $D^2 = \nabla^* \nabla + s/4$, $\mathcal{R}_\nu = s/4$, où s est la

courbure scalaire (strictement positive) de S^3 .

Pour $\rho > 0$, soit Y_ρ une petite boule de S^3 avec un bord réel analytique et de rayon ρ , ainsi que e un champ de vecteur réel analytique normal au bord de ∂Y . Comme précédemment, on peut étendre localement ∂Y en une sous-variété coassociative X_e telle que e appartienne à son espace tangent au-dessus de ∂Y .

Proposition 2.4.2 *Pour ρ et $\|\nabla e\|_\infty$ assez petits, l'espace de déformation $\mathcal{M}_{Y_\rho, X_e}$ est lisse et de dimension égale à un.*

Démonstration. Comme dans le cas plat, l'indice vaut un. De plus, pour ρ assez petit, le bord ∂Y_ρ est asymptote à une sphère de rayon ρ , donc de courbures principales $1/\rho$. Ainsi, l'opérateur $\mathcal{D}_{\mu_{X_e}}$ est strictement positif pour ∇e assez petit. Le fait que $\mathcal{R}_\nu = s/4 > 0$ permet de conclure grâce au Théorème 2.3.12. ■

2.4.3 L'extension Calabi-Yau

Soit (N^6, J, Ω, ω) une variété de Calabi-Yau de dimension réelle égale à six, où J est une structure complexe intégrable, Ω une 3-forme holomorphe ne s'annulant pas et ω une structure de Kähler. Dans ce cas $M = N \times S^1$ est muni d'une G_2 -structure naturelle à holonomie incluse dans $SU(3)$:

$$\phi = \omega \wedge dt + \Re\Omega,$$

dont la métrique associée est $g \times dt^2$, où g est la métrique induite par ω et J sur N et dt^2 la métrique plate sur S^1 . Rappelons qu'une 3-sous-variété L de N est dite *spéciale lagrangienne* si elle est lagrangienne pour ω et calibrée pour Ω , c'est-à-dire $\Re\Omega|_{TL} = 0$. On sait par l'article [53] de McLean que l'espace des déformations spéciales lagrangiennes de L est localement lisse et de dimension $b_1(L)$. De plus, $Y = L \times \{\text{point}\}$ est une sous-variété associative de M . La proposition suivante explicite l'opérateur D du Théorème 2.1.1 dans ce cas particulier. Pour l'énoncer, remarquons que le fibré normal ν de Y s'écrit

$$\nu = JTL \oplus \langle \partial_t \rangle,$$

où $\partial_t \in \Gamma(S^1, TS^1)$ est le vecteur dual de dt sur S^1 . Donc $s \in \Gamma(Y, \nu)$ s'écrit $J\sigma \oplus \tau\partial_t$, où $\sigma \in \Gamma(L, TL)$ et $\tau : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Désignons par $\sigma^\vee \in \Omega^1(L, \mathbb{R})$ la 1-forme duale à σ . Notons par le même symbole l'inverse. Enfin, $*$: $\Omega^k(L) \rightarrow \Omega^{3-k}(L)$ est l'étoile de Hodge sur $(L, g|_L)$.

Proposition 2.4.3 (voir [30]) *Pour tout $(\alpha, \tau) \in \Omega^1(L) \times \Omega^0(L)$,*

$$\begin{aligned} D^\vee(\alpha, \tau) &= (-*d\alpha - d\tau, *d*\alpha) \\ D^{\vee 2}(\alpha, \tau) &= -\Delta(\alpha, \tau), \end{aligned}$$

où $\Delta = d*d + dd*$ (remarquons que $\Delta = d*d$ sur la coordonnée τ).

Démonstration. Cette proposition résulte d'un calcul qui utilise, entre autres, la relation $J\nabla^\top s = \nabla^\perp Js$ pour toute section $s \in \Gamma(L, N_L)$, et l'expression du produit vectoriel dans $M = N \times S^1$. ■

Par ailleurs, si $\Sigma \subset N$ est une surface complexe dans N , alors $\Sigma \times \{\text{point}\}$ est une sous-variété coassociative de M .

Proposition 2.4.4 (voir [30]) *Soit $t \in S^1$ et L une sous-variété spéciale lagrangienne dans N dont le bord est inclus dans une surface complexe Σ , et $Y = N \times \{t\} \subset N \times S^1$. Si la courbure de Ricci de L est strictement positive, et si le bord de L possède une courbure moyenne strictement positive, alors l'espace de déformation $\mathcal{M}_{Y, \Sigma \times \{t\}}$ est localement lisse, et de dimension égale au genre g de ∂L .*

Démonstration. La section ∂_t définit une trivialisatoin de μ_X , où $X = \Sigma \times \{t\}$. Par conséquent le Lemme 2.2.1 implique $\nu_X = T\partial L^*$ en tant que J_n -fibrés, où n est un vecteur normal rentrant dans L sur ∂L . L'indice du problème vaut donc $-c_1(T\partial L) + 1 - g = g - 1$. Maintenant, soit $\psi = s + \tau\partial_t \in \text{coker}(D, \nu_X)$ et $\alpha = -Js^\vee$. En utilisant la formule classique pour les 1-formes harmoniques

$$\frac{1}{2}\Delta|\psi|^2 = \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2 + |\tau|^2) = |\nabla_L\alpha|^2 + |d\tau|^2 + \frac{1}{2}\text{Ric}(\alpha, \alpha),$$

on obtient la formule équivalent à (2.9) :

$$-\int_{\partial Y} \langle \mathcal{D}_{\mu_X}\psi, \psi \rangle d\sigma = \int_Y (|\nabla_L\alpha|^2 + |d\tau|^2 + \frac{1}{2}\text{Ric}(\alpha, \alpha)) dy. \quad (2.10)$$

De plus, les valeurs propres de l'opérateur de bord \mathcal{D}_{μ_X} sont 0 (de vecteur propre ∂_t) et, par le Lemme 2.3.11, $2H$ (de vecteur propre $n \times \partial_t$). On en déduit que $\mathcal{D}_{\mu_X}\psi = 2Hs$. L'équation (2.10) et la stricte positivité de H et de l'opérateur de Ricci montrent alors que τ est constant et $\alpha = 0$. Par conséquent $\text{coker}(D, \nu_X)$ est de dimension constante égale à 1, et donc par une extension naturelle du Théorème 2.3.12 l'espace de déformation $\mathcal{M}_{Y, X}$ est de dimension g . On peut par ailleurs montrer, par des arguments de sous-variétés minimales, qu'il s'identifie aux déformations spéciales lagrangiennes de L dans N . ■

2.4.4 Brisure de symétrie

Dans le Théorème 2.3.3, l'espace de modules perturbé est ou bien lisse, ou bien vide. Nous donnons une situation où nous pouvons nous assurer que la perturbation est non vide.

Proposition 2.4.5 (voir [27]) *Soit N une variété de Calabi-Yau, $L \subset N$ une sphère spéciale lagrangienne et $Y = L \times \{\text{point}\} \subset M = N \times S^1$. Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse s'annulant transversalement en un nombre fini de points de S^1 , éventuellement nul. Alors il existe une perturbation fermée ψ de la structure standard telle que $\mathcal{M}_{Y, \psi} \simeq f^{-1}(0)$.*

Démonstration. Soit $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement fini par des ouverts d'un voisinage V de $L \subset N$, et pour chaque U_j des coordonnées $(x_i)_{i=1,2,3}$ normales à L dans N . Puisque $*(\phi \wedge dt)|_{TL \oplus TS^1} = 0$, pour tout $j \in J$ il existe des 2-formes β_i telles que $*(\phi \wedge dt)|_{L \times S^1} = \sum_i dx_i \wedge \beta_i$ sur U_j . Soit alors $\psi = d(f(t) \sum_{i,j} \chi_j x_i \beta_i)$, où les $(\chi_j)_{j \in J}$

sont des fonctions plateau formant une partition de l'unité associée aux $(U_j)_{j \in J}$. On choisit comme perturbation fermée $\phi_\lambda = \phi + \lambda\psi$.

Soit $t_0 \in S^1$ tel que $f(t_0) = 0$. On va montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un voisinage de $L \times \{t_0\}$ est isolée en tant que sous-variété associative pour ϕ_λ . Choisissons des coordonnées sur S^1 telles que $t_0 = 0$. En utilisant la dérivée donnée par (2.6), on a l'estimation

$$*_\lambda \phi_\lambda(x, t) = *\phi + \lambda((at + O(t^2))dt \wedge \Re\Omega + O(x)) + O(\lambda^2\|(x, t)\|),$$

où $*_\lambda$ est l'étoile de Hodge pour la métrique associée à ϕ_λ et $x = (x_i)_i$ les coordonnées normales. Plutôt que la fonctionnelle F , on utilise ici

$$\tilde{F}(s, \psi) = \exp_s^*((\exp_s^* \chi)(\omega)) \in \Gamma(Y, TM|_Y),$$

On obtient l'estimation

$$\tilde{F}(\sigma, \tau, \phi_\lambda) = (-*d\sigma^\vee - d\tau, *d*\sigma^\vee + a\lambda\tau) + O(\|s\|^2 + \lambda\|\sigma\| + \lambda^2\|s\|). \quad (2.11)$$

On décompose ensuite la section $s \in \Gamma(Y, \nu)$ en $s = (\sigma, \tau) \in \Gamma(L, NL) \oplus \Gamma(L, \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial t})$, où NL est le fibré normal à L dans N . De plus, rappelons que $\sigma^\vee \in \Omega^1(L, \mathbb{R})$ est la 1-forme duale à σ . On obtient alors l'estimation

$$\tilde{F}^2(\sigma, \tau, \phi_\lambda) = (-\Delta\sigma^\vee - a\lambda d\tau, \Delta\tau) + O(r),$$

avec $r(\sigma, \tau) = \|s\|^2 + \lambda(\|\sigma\| + \|d\tau\|) + \lambda^2\|s\|$. Par la théorie de Hodge sur L , on déduit de $\Delta\tau = O(r)$ qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tau - t_0 = O(r)$, si bien que $d\tau = O(\|s\|^2 + \lambda\|\sigma\| + \lambda^2\|s\|)$. De plus $b^1(L, \mathbb{R}) = 0$ donc $\Delta\sigma^\vee = a\lambda d\tau + O(r)$ et l'estimée $d\tau$ impliquent $\sigma^\vee = O(\|s\|^2 + \lambda\|\sigma\| + \lambda^2\|s\|)$, et donc $\sigma = O(\|\tau\|^2 + \lambda^2\|\tau\|)$ pour σ et λ assez petits. La même estimée est valable pour les dérivées premières et secondes de σ ou $*\sigma$. En revenant à τ , la dernière estimation et l'équation (2.11) donnent $a\lambda\tau = O(\|\tau\|^2)$ pour λ assez petit (indépendamment de s). Quand $\lambda \neq 0$, ceci implique une contradiction si τ est suffisamment petit et n'est pas la fonction nulle.

Maintenant soit $t_0 \in S^1$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Le lemme suivant, présenté dans un cadre un peu plus général, conclut la démonstration de la Proposition 2.4.5. \blacksquare

Lemme 2.4.6 *Soit Y une sous-variété associative d'une variété M^7 équipée d'une G_2 -structure ϕ fermée, telle que près de Y , $\mathcal{M}_{Y, \phi}$ est de dimension 1, et $\dim \ker D = 1$ sur Y . Soit $\xi \in \Gamma(Y, \nu)$ un champ de vecteur non trivial appartenant à $\ker D$ et $\tilde{\psi}$ la 3-forme $\xi \lrcorner * \phi \in \Gamma(Y, \Lambda^3 T^*M)$. Si ψ est une extension fermée de $\tilde{\psi}$ au voisinage de Y et si $\phi_\lambda = \phi + \lambda\psi$, alors pour $\lambda \neq 0$ assez petit l'espace de modules $\mathcal{M}_{Y, \phi_\lambda}$ près de Y est vide.*

Démonstration. Par définition de ϕ_λ et par le Lemma 2.3.4, la dérivée de $F(\lambda, s) = \exp_s^* \chi_{\phi_\lambda}(\omega)$ est d'indice 1 et surjective en $(\lambda = 0, s = 0)$, si bien que le lieu d'annulation de F est localement lisse, de dimension 1 et contient $\mathcal{M}_{Y, \phi}$. Ces ensembles doivent être localement égaux, et le résultat s'ensuit. \blacksquare

Chapitre 3

Géométrie symplectique réelle

3.1 Hypersurfaces de Donaldson réelles

Soit (X, ω) une variété compacte lisse symplectique. Supposons de plus qu'il existe un fibré en droites complexes L équipé d'une métrique hermitienne h et d'une connexion hermitienne de courbure égale à $-i\omega$. Quitte à perturber ω dans l'espace 2-formes fermées et quitte à prendre un multiple entier de ω , la dernière hypothèse est vérifiée. On munit enfin X d'une structure presque complexe J compatible avec ω , c'est-à-dire que $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une structure riemannienne. En 1996, S. K. Donaldson a démontré le théorème suivant.

Théorème 3.1.1 ([18]) *Il existe une suite de sections lisses $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^{\otimes k}$ telle que pour k assez grand, le lieu d'annulation H_k de s_k définit une sous-variété lisse de codimension réelle 2 et symplectique pour la restriction de ω . De plus, l'espace tangent de H_k est $O(1/\sqrt{k})$ -proche d'être J -complexe.*

On suppose maintenant que (X, ω) est équipé d'une structure réelle c_X anti-symplectique, On peut alors choisir la structure presque complexe J de sorte qu'elle vérifie $dc_X \circ J = -J \circ dc_X$. Par ailleurs, un fibré hermitien $E \rightarrow X$ au-dessus de X est dit *réel* s'il est muni d'une structure réelle c_E relevant c_X . Dans ce cas, une connexion hermitienne ∇_E est dite réelle si elle est covariante pour l'action naturelle de c_X et c_E . Enfin, une section de E est dite réelle si $c_E \circ s = s \circ c_X$.

Le théorème suivant est une version réelle du théorème de Donaldson. Il montre par ailleurs qu'on peut construire des hypersurfaces réelles symplectiques possédant un nombre raisonnable de composantes connexes.

Théorème 3.1.2 (voir [29]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique réelle et $L \rightarrow X$ un fibré en droites complexes hermitien et réel muni d'une connexion hermitienne réelle de courbure $-i\omega$. Alors*

1. *il existe une suite de sections lisses $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^{\otimes k}$ réelles, telle que pour k assez grand, le lieu d'annulation H_k de s_k définit une sous-variété lisse de codimension réelle 2 et symplectique.*

2. Pour toute suite réelle $(s_k)_k$ construite avec la méthode de Donaldson, il existe une constante positive $C > 0$, telle que le nombre de composantes connexes de la partie réelle $\mathbb{R}H_k$ de H_k soit inférieur à $C\sqrt{k}^n$.
3. Il est possible de choisir une suite $(s_k)_k$ de sorte qu'il existe une constante strictement positive ϵ telle que pour k assez grand, $\mathbb{R}H_k$ possède au moins $\epsilon\sqrt{k}^n$ composantes connexes.
4. Le même résultat peut être obtenu en imposant $\mathbb{R}H_k = \emptyset$.

3.1.1 La méthode de Donaldson

Rappelons brièvement la façon dont Donaldson a démontré le Théorème 3.1.1.

Définition 3.1.3 ([18], [6]) Soit E un fibré hermitien sur X muni d'une courbure ∇_E , et L un fibré en droites complexes muni d'une métrique hermitienne h et d'une connexion hermitienne de courbure $-\omega$. Une suite $(s_k)_k$ de sections de $E \otimes L^k$ est asymptotiquement holomorphe s'il existe une constante C indépendante de k , telle que pour tout k , $|\nabla^{0,1}s_k| \leq C$, où $\nabla = \nabla_E + \nabla_L$, telle que sa dérivée est de norme inférieure à $C\sqrt{k}$, et telle que sa dérivée seconde est de norme inférieure à Ck . La suite $(s_k)_k$ est dite de plus ϵ -transverse sur X s'il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout x tel que $|s_k(x)| \leq \epsilon$, la dérivée covariante $\nabla s_k(x) : T_x X \rightarrow (E \otimes L^k)_x$ admet un inverse à droite de norme inférieure à $(\epsilon\sqrt{k})^{-1}$.

Le théorème principal de [18], originellement démontré si $E = X \times \mathbb{C}$, et généralisé par D. Auroux dans [6] pour le cas général, est le suivant :

Théorème 3.1.4 ([18], [6]) Soit E et L comme dans la définition 3.1.3. Pour toute suite de sections $(s_k)_k$ asymptotiquement holomorphes de $E \otimes L^k$, et pour tout $\epsilon > 0$ fixé, alors il existe une constante $\eta > 0$, une suite de sections $(\tilde{s}_k)_k$ asymptotiquement holomorphes, η -transverse pour k assez grand, avec $|s_k - \tilde{s}_k| \leq \epsilon$, et $|\nabla s_k - \nabla \tilde{s}_k| \leq \epsilon\sqrt{k}$.

Rappelons les idées de la démonstration de ce théorème dans le cas où $E = X \times \mathbb{C}$. Pour tout réel $D > 0$ a priori fixé, il existe un recouvrement par "couleurs", c'est-à-dire par des ensembles de boules de g_k -taille égale à 1 et dont les centres sont g_k -distants d'au moins D . Ici, g_k est la métrique renormalisée $g_k = g\sqrt{k}$. Le nombre N de ces couleurs est en CD^{2n} et ne dépend pas de k . On perturbe en N étapes la suite de sections $(s_k)_k$ par une somme pondérée de sections essentiellement localisées au-dessus des centres des boules d'une couleur donnée. Plus précisément, ces sections sont du même modèle :

Lemme 3.1.5 (cf. aussi le Lemme 4.4.6) Soit $x \in X$. Il existe une suite de sections $(\sigma_{k,x})_k$ asymptotiquement holomorphe satisfaisant les inégalités suivantes :

1. $|\sigma_{k,x}| \geq \frac{1}{2}$ sur $B_{g_k}(x, 1)$
2. $|\sigma_{k,x}|_{C^2} \leq p(d_k(x, y))e^{-d_k(x, y)^2}$
3. $\sigma_{k,x}$ a un support inclus dans $B_{g_k}(x, k^{1/6}) = B_g(x, k^{-1/3})$,

où p est un polynôme indépendant de k .

Les normes et la distance d_k sont calculées dans ce lemme pour la métrique g_k . La perturbation sur une couleur est faite de la façon suivante :

$$s_k \rightarrow s_k + \sum_{i \in \text{couleur}} w_i \sigma_{k,x_i},$$

où les x_i sont les centres des boules de la couleur en question. A chaque étape, un théorème de Sard permet de choisir les constantes w_i de façon à ce que la nouvelle section devienne η -transverse sur la nouvelle couleur et le reste sur les anciennes, mais pour un η de plus en plus petit. Le théorème de Sard utilisé est quantitatif, ce qui permet d'effectuer cette récurrence en un nombre d'étapes ne dépendant pas de k . Donaldson montre qu'au terme de cette récurrence, on obtient une transversalité uniforme sur X .

3.1.2 La version réelle

Théorème 3.1.6 (voir [29]) *Soit (X, ω, c_X) une variété symplectique compacte réelle, et E et L des fibrés hermitiens et réels, munis de courbures réelles, telles que la courbure de L soit égale à $-i\omega$. Pour toute suite de sections réelles $(s_k)_k$ et asymptotiquement holomorphes de $E \otimes L^k$, et pour tout $\epsilon > 0$ fixé, alors il existe un $\eta > 0$, une suite de sections réelles $(\tilde{s}_k)_k$ asymptotiquement holomorphe, η -transverse pour k assez grand, avec $|s_k - \tilde{s}_k| \leq \epsilon$, et $|\nabla s_k - \nabla \tilde{s}_k| \leq \epsilon\sqrt{k}$.*

Démonstration. Nous donnons le principe de la démonstration pour le cas $E = X \times \mathbb{C}$. On peut choisir un recouvrement de X par des boules invariantes par c_X , de sorte que si l'une d'entre elle touche $\mathbb{R}X$, elle est invariante par c_X . De plus, quitte à choisir pour les boules touchant $\mathbb{R}X$ des boules $B_{g_k,r}$ avec r assez grand, on peut supposer que les sections réelles

$$\hat{\sigma}_{k,x} = \frac{\sigma_{k,x} + \kappa(\sigma_{k,x})}{2}$$

sont de normes uniformément minorées sur les boules du recouvrement.

Lors de la transversalisation sur une boule d'une couleur donnée, si l'on perturbe la section s_k par $w\hat{\sigma}_{k,p}$, on perd le caractère réel de la section, puisque w n'a pas de raison d'être réel. Nous avons donc besoin d'un raffinement du théorème de Sard quantitatif présent dans [18] :

Proposition 3.1.7 (voir [29]) *Il existe un entier p et $\delta_0 > 0$, tels que pour tout $0 < \delta < \delta_0$, si $\sigma = \delta \log(\delta^{-1})^{-p}$, et f une fonction complexe définie sur la boule $B(0, \frac{11}{10}) \subset \mathbb{C}^n$ vérifiant*

$$|f| \leq 1, \quad |\bar{\partial}f|_{C^1} \leq \sigma,$$

alors il existe une constante $w \in \mathbb{R}$, avec $|w| \leq \delta$, et $f - w$ est σ -transverse sur la boule unité de \mathbb{C}^n .

Notons que la seule différence avec la proposition de [18] est que l'on peut choisir w réel. L'affirmation 1. du Théorème 3.1.2 s'ensuit aisément. ■

Démonstration de la Proposition 3.1.7. La preuve suit jusqu'au dernier moment la preuve donnée par [18]. L'application f vérifiant $|\bar{\partial}f| \leq \sigma$ peut être C^1 -approchée par une application holomorphe \tilde{f} sur la boule unité, et l'erreur est inférieure à un multiple (borné) de σ . Ensuite il est possible de C^1 -approcher \tilde{f} de σ par un polynôme complexe g de degré inférieur ou égal à $C \log(\delta^{-1})$, où C est une constante ne dépendant que de la boule. Pour toute fonction complexe h , soit

$$Y_{h,\epsilon} = \{z \in \mathbb{B}^{2n}, |d_x h| \leq \epsilon\},$$

et $Z_{h,\epsilon}$ le ϵ -voisinage tubulaire de $f(Y_{h,\epsilon})$. Nous avons l'inclusion : $Z_{f,\sigma} \subset Z_{g,c\sigma}$, où c est une constante de structure. Si l'on trouve un réel w dans un disque de taille δ évitant $Z(g,c\sigma)$, alors on a prouvé la proposition. Rappelons la

Proposition 3.1.8 ([18]) *Soit P un polynôme de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R} , tel que 1 soit une valeur régulière de P sur \mathbb{B}^m , ainsi que de la restriction de P sur S^{m-1} . Alors le nombre de composantes du sous-niveau $\{P \leq 1\}$ ainsi que leur diamètre (pour la métrique induite) sont p -bornés.*

On dit qu'une quantité associée à un polynôme est p -bornée si elle est majorée par une puissance du degré du polynôme. Après une infime perturbation de g , appliquons la proposition précédente au polynôme réel $|\partial g/c\sigma|^2$, qui est de degré $C \log(\sigma^{-1})$, où C est une nouvelle constante de structure. Le diamètre pour la métrique ambiante de l'image d'une composante de $Y_{g,c\sigma}$ est majoré par $C'\sigma \log(\sigma^{-1})^p$, où p est la puissance donnée par la proposition. Le voisinage σ -tubulaire de $Z_{g,c\sigma}$ est donc contenu dans une réunion de $\log(\sigma^{-1})^p$ disques de rayons égaux à $\sigma \log(\sigma^{-1})^p + \sigma$. Ce dernier ajout de σ ne change rien, et on peut l'oublier. L'intersection de l'ensemble prohibé avec \mathbb{R} recouvre donc au plus une longueur de $\sigma \log(\sigma^{-1})^{2p}$. Si le rayon δ du disque est par exemple $\sigma \log(\sigma^{-1})^{3p}$, il reste encore beaucoup de place pour trouver un w réel dans le complémentaire de $Z_{g,c\sigma}$ dans $[-\delta, \delta]$. On obtient alors la proposition, en effectuant un changement de variables comme dans [18]. ■

3.1.3 Composantes de la partie réelle

Nous montrons dans ce paragraphe l'existence d'une hypersurface réelle H_k dont la partie réelle $\mathbb{R}H_k = H_k \cap \mathbb{R}X$ contient au moins \sqrt{k}^n composantes connexes à une constante indépendante de k près.

Démonstration de l'assertion 3. du Théorème 3.1.2 . Soit $f : 3\mathbb{B}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et réelle, non singulière, et telle que la partie réelle de son lieu d'annulation soit incluse dans la boule unité. Un exemple est

$$f(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2 - 1.$$

Dans ce modèle local de forme symplectique $\omega_0 = dd^c|z|^2$, où $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$, on choisit le fibré trivial $L = 3\mathbb{B} \times \mathbb{C}$ muni de la métrique hermitienne $|1|_h = e^{-|z|^2}$. La dérivée covariante hermitienne $\nabla 1 = -2\partial|z|^2$ rend la section 1 holomorphe, et sa courbure est égale à $-i\omega_0$. On constate alors que la suite de sections de L^k

$$\tau_k(z) = f(z\sqrt{k})$$

est holomorphe et réelle pour les conjugaisons sur \mathbb{C}^n et L . En l'amputant par une fonction plateau valant 1 sur $2\mathbb{B}$ et à support dans $3\mathbb{B}$, cette suite reste asymptotiquement holomorphe. De plus, elle est uniformément ϵ -transverse pour un ϵ donné sur $2\mathbb{B}$.

Il est facile de rappatrier ce modèle sur un point x de $\mathbb{R}X$ en une suite de sections asymptotiquement holomorphe et ϵ -transverse sur une boule de g_k -taille 1. De plus, cette section décroît en $e^{-k \text{dist}(\cdot, x)^2}$, si bien qu'en choisissant un réseau de points $(x_i)_i$ sur $\mathbb{R}X$ à distance D/\sqrt{k} les uns des autres, pour D assez grand indépendant de k la somme de toutes ces sections reste asymptotiquement holomorphe et transverse sur chacune de ces boules B_i associées à x_i . Après perturbation par le Théorème 3.1.6, les composantes sans bord dans les boules B_i sont perturbées légèrement, si bien qu'elles recèlent chacune au moins une composante. Le volume de chaque boule dans $\mathbb{R}X$ étant de l'ordre de $1/\sqrt{k}^n$, on peut placer au moins $c_D \sqrt{k}^n$ boules g_k -distantes de D . Au total, il y a au moins $\epsilon_D \sqrt{k}^n$ composantes de H_k , avec ϵ_D ne dépendant pas de k . ■

Remarque 3.1.9 *La démonstration précédente montre si f est une fonction réelle analytique sur $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ non singulière et telle que $f^{-1}(0)$ ne touche pas le bord de \mathbb{B} , alors il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(H_k)_k$ d'hypersurfaces de Donaldson réelles telles que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$,*

$$\dim H_i(H_k, \mathbb{R}) \geq \epsilon \sqrt{k}^n \dim H_i(f^{-1}(0), \mathbb{R}). \quad (3.1)$$

Démonstration des assertion 2. et 4. du Théorème 3.1.6. D'après [6], les hypersurfaces de Donaldson sont triviales à une échelle η/\sqrt{k} , où η est une constante indépendante de k . Au maximum, on a donc une composante par g_k -boule, dont le volume dans $\mathbb{R}X$ est de l'ordre de k^{-n} , ce qui démontre l'assertion 2. du Théorème 3.1.2.

Si l'on ne veut aucune composante, on utilise le résultat de [8], où les auteurs ont construit pour tout lagrangien $L \subset X$ des sections asymptotiquement holomorphes de norme uniformément minorée sur L . Ici, on choisit $L = \mathbb{R}X$ et une version localement réelle du résultat mentionné donnée par Auroux, V. Muñoz et F. Presas dans [7]. Ensuite, on perturbe la suite obtenue, à l'aide du Théorème 3.1.6 en une suite de sections réelles et transverses, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}X$. ■

3.2 Pinceaux de Lefschetz

Rappelons que si la dimension de X est $2n$, un système de coordonnées complexes (z_1, \dots, z_n) centrées en un point x est dit *adapté* si la forme symplectique ω est $(1, 1)$ et strictement positive au point x pour la structure complexe induite par ces coordonnées.

Définition 3.2.1 *Un pinceau de Lefschetz symplectique associé à une variété symplectique (X, ω) est la donnée de :*

- (i) *Une sous-variété symplectique N de codimension réelle 4.*
- (ii) *Une application surjective $F : X - N \rightarrow \mathbb{P}^1$*

(iii) Un nombre fini de points $\Delta \subset M - N$ en dehors desquels F est une submersion. De plus, ces données vérifient les modèles locaux suivants :

(iv) Pour tout point $p \in N$, il existe une carte adaptée (z_1, \dots, z_n) pour laquelle la sous-variété N a pour équation locale $\{z_1 = z_2 = 0\}$ et telle que $F = z_2/z_1$.

(v) Pour tout point $p \in \Delta$, il existe une carte adaptée (z_1, \dots, z_n) dans laquelle F s'écrit $F(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2 + c$.

Enfin, si (X, ω) est munie d'une structure réelle c , on dira que le pinceau est réel si

$$\bar{F} = F \circ c.$$

Le théorème principal de [19] est le suivant :

Théorème 3.2.2 ([19]) *Soit (X, ω) une variété symplectique compacte telle que la classe de cohomologie $[\omega]$ soit entière. Alors pour k assez grand, il existe un pinceau de Lefschetz dont les fibres sont Poincaré duales de $k[\omega]$.*

Nous démontrons dans la deuxième partie de cet article que ce théorème s'adapte dans le cas réel :

Théorème 3.2.3 (Voir [29]) *Soit (X, ω, c) une variété symplectique réelle, telle que ω soit entière. Alors il existe un pinceau de Lefschetz réel.*

Démonstration. La démonstration suit celle de Donaldson donnée par [19]. Les problèmes apparaissent près de $\mathbb{R}X$. Dans un g_k -voisinage de $\mathbb{R}X$, nous utilisons les résultats de [7]. Dans une zone plus large mais à distance petite de $\mathbb{R}X$, les sections interfèrent et il faut utiliser les résultats d'Auroux présents dans [6] et adaptés à notre situation. ■

Chapitre 4

Géométrie réelle aléatoire

4.1 Introduction

En 1876, dans l'article [38], A. Harnack démontre que le nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique réelle de degré d dans $\mathbb{R}P^2$ n'excède pas le genre complexe de la courbe plus un, soit $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 1$. Harnack montre par ailleurs qu'en tout degré, il existe une courbe dont le nombre de composantes est maximal. Maintenant, si le polynôme dont la courbe est le lieu d'annulation est pris au hasard, quelle est la probabilité que cette dernière soit maximale? Ce type de question touchant à la topologie des zéros de polynômes aléatoires a commencé à être soulevé pour les racines de polynômes d'une variable réelle dans les années trente. En 1943, M. Kac dans [44] démontre que si les coefficients d'un polynôme p d'une variable réelle de degré d sont choisis au hasard selon des lois gaussiennes centrées, identiques et indépendantes, le nombre moyen de zéros réels de p est équivalent à $\frac{2}{\pi} \log d$ quand d tend vers l'infini. En 1993, E. Kostlan démontre dans [45] que si l'on choisit une autre mesure, naturelle du point de vue géométrique (cf. ci-dessous), alors ce nombre moyen est précisément \sqrt{d} , et ceci en tout degré. M. Schub et S. Smale obtiennent indépendamment le même résultat la même année, voir [66].

En 1999, S. S. Podkorytov donne dans [58] la caractéristique d'Euler moyenne d'une hypersurface algébrique réelle aléatoire de $\mathbb{R}P^n$, pour n impair. La mesure de probabilité choisie pour le polynôme définissant l'hypersurface est de la même nature que celle choisie en dimension 1 par Kostlan. Cette caractéristique moyenne est équivalente à $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \epsilon_n \sqrt{d^n}$ quand d tend vers l'infini, où d est le degré du polynôme. La constante ϵ_n est strictement positive et équivalente à $\frac{2\sqrt{2}}{n}$ quand n tend vers l'infini. Plus récemment, F. Nazarov et M. Sodin ont montré dans [56] que le nombre moyen de composantes du lieu d'annulation d'une harmonique sphérique de grand degré sur la sphère ronde $S^2 \in \mathbb{R}^3$ est en d^2 , pour une mesure d'esprit différent de celle de Kostlan. De plus, P. Sarnak et I. Wigman ont annoncé qu'avec la mesure de type Kostlan, le nombre moyen de composantes d'une courbe algébrique réelle est majorée par une constante fois son degré.

Dans ce chapitre, nous présentons trois résultats obtenus en collaboration avec Jean-

Yves Welschinger dans ce domaine. Le premier théorème montre que les courbes maximales deviennent exponentiellement rares quand leur degré augmente. Le second théorème montre que la somme moyenne des nombres de Betti d'une hypersurface aléatoire de degré d dans une variété projective réelle de dimension n est un $o(d^n)$, et même un $O(d \log^2 d)$ si $n = 2$. Le troisième théorème majore chaque nombre moyen de Betti par $e_{i,n} \sqrt{d^n}$, avec une constante $e_{i,n}$ en provenance directe du monde des matrices aléatoires.

Pour ces résultats, nous nous sommes inspirés des très nombreux résultats de B. Shiffman et S. Zelditch et leurs collaborateurs, à commencer par leur premier article [61] sur les hypersurfaces algébriques complexes aléatoires. Le point crucial de leur point de vue est que leurs résultats sont valables dans des variétés projectives quelconques, et pas seulement pour des géométries et des métriques particulières. Par exemple, les théorèmes de [61], [63], [64] concernent l'équidistribution des hypersurfaces complexes aléatoires (pour la mesure de type Kostlan) dans une variété projective donnée, et même la loi asymptote de cette répartition. Par ailleurs, B. Macdonald a établi dans [50] des théorèmes équivalents pour des lieux d'annulation de polynômes réels, voir également l'article [17] de T.-C. Dinh et N. Sibony.

Dans cet esprit, le Théorème 4.3.1 de la première section de ce chapitre repose sur un théorème d'équidistribution hors de la partie réelle pour des hypersurfaces réelles. Nous y démontrons plus particulièrement une estimation de moments (voir la Proposition 4.3.4) qui implique, en relation avec le théorème de de Thélin sur les courants laminaires dans \mathbb{C}^2 , la raréfaction exponentielle des courbes maximales.

Dans les preuves des Théorèmes 4.4.1 et 4.5.1 ci-dessous, nous démontrons des résultats intermédiaires d'équirépartition de points critiques, en l'occurrence les Théorèmes 4.4.2 et 4.5.7. La statistique de points critiques est depuis quelques années un sujet actif de recherche. Par exemple, Douglas, Shifman et Zelditch étudient dans [20] et [21] les points critiques d'une section aléatoire d'un fibré très ample. Macdonald dans [51] a démontré des résultats équivalents en réel, dans \mathbb{R}^n . A. Auffinger, G. Ben Arous et J. Černý abordent dans [5] un problème similaire, celui d'une fonction de Morse aléatoire sur la sphère euclidienne de grande dimension. Dans la direction de notre Théorème 4.4.2, J.-P. Dedieu et G. Malajovich ont majoré par $O(\sqrt{d^n})$ le nombre moyen de points critiques d'un polynôme aléatoire de degré d en n variables, voir [15]. Ils ont également utilisé les résultats de G. Ben Arous et A. Guionnet présents dans [10] pour montrer que la part des minimums locaux dans les points critiques du polynôme aléatoire décroît comme $e^{-\beta n^2}$ avec $\beta > 0$.

4.2 Notations

Soit X une variété complexe compacte lisse de dimension n , ainsi que $L \rightarrow X$ un fibré holomorphe sur X , muni d'une métrique hermitienne h de courbure ω strictement positive, et dx une forme volume normalisée. Dans les sections 4.3 et 4.4, cette forme

est induite par ω , c'est-à-dire que $dx = \frac{\omega^n}{\int_X \omega^n}$. La condition de courbure s'écrit

$$\omega = \frac{1}{2i\pi} \partial \bar{\partial} \log h(e, e), \quad (4.1)$$

où e est une trivialisatation holomorphe locale de L . Cette structure de Kähler définit ainsi une métrique g par $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, i\cdot)$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $H^0(X, L^d)$ l'espace des sections holomorphes du fibré $L^{\otimes d}$. Cet espace hérite de (L, h, ω, dx) d'un produit hermitien L^2 naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\forall \sigma, \tau \in H^0(X, L^d), \langle \sigma, \tau \rangle = \int_X h^d(\sigma, \tau) dx, \quad (4.2)$$

où h^d est la métrique naturelle sur L^d induite par h . L'espace $H^0(X, L^d)$ bénéficie également d'une mesure de Gauss associée $d\mu$:

$$\forall U \subset H^0(X, L^d), \mu(U) = Pr(\sigma \in U) = \frac{1}{\pi^{N_d}} \int_U e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma, \quad (4.3)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme sur $H^0(X, L^d)$ associée au produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue et N_d la dimension de $H^0(X, L^d)$. La mesure $d\mu$ est ainsi une mesure probabilité. Pour toute section $\sigma \in H^0(X, L^d)$ générique, le lieu d'annulation de σ est une hypersurface C_σ holomorphe lisse.

Remarque 4.2.1 Dans le cas où $(X, \omega) = (\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ et $(L, h) = (\mathcal{O}(1), h_{FS})$, les polynômes homogènes $(\sqrt{\frac{(n+d)!}{n!j_0! \dots j_n!}} X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n})_{\sum j_k=d}$ forment une base orthonormée pour le produit L^2 associé à la forme et à la métrique de Fubini-Study ω_{FS} et h_{FS} .

Dans ce chapitre, (X, c_X) désignera une variété complexe compacte lisse munie d'une structure réelle c_X , c'est-à-dire d'une involution antiholomorphe sur X . On notera n sa dimension complexe, et $\mathbb{R}X$ la partie réelle de X , soit l'ensemble des points fixes de c_X . On sait que $\mathbb{R}X$ est une sous-variété lagrangienne de X , si $\mathbb{R}X$ est non vide. On supposera de plus que le fibré L est muni d'une structure réelle c_L compatible avec c_X . On choisit la métrique hermitienne h réelle, c'est-à-dire que $\overline{c_L^* h} = h \circ c_L$. Ainsi, la structure de Kähler donnée par ω vérifie $c_X^* \omega = -\omega$.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}H^0(X, L^d) = \{\sigma \in H^0(X, L^d), c_L \circ \sigma = \sigma \circ c_X\}$ l'espace des sections réelles du fibré $L^{\otimes d}$, i.e. l'ensemble des sections holomorphes covariantes pour les structures réelles. Le produit hermitien L^2 naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $H^0(X, L^d)$ se restreint en un produit scalaire sur $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$.

Remarque 4.2.2 Notons ici que l'on intègre sur tout X et pas sur $\mathbb{R}X$. Les probabilités calculées en intégrant sur $\mathbb{R}X$ ou une sous-variété changent radicalement, voir [62] par exemple pour une intégration sur le bord d'un ouvert de \mathbb{C} .

La mesure de Gauss associée $d\mu_{\mathbb{R}}$ est définie par :

$$\forall U \subset \mathbb{R}H^0(X, L^d), \mu_{\mathbb{R}}(U) = Pr(\sigma \in U) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{N_d}}} \int_U e^{-\|\sigma\|^2} d\sigma. \quad (4.4)$$

Pour toute section $\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$ générique, le lieu d'annulation de σ est une hypersurface C_σ holomorphe lisse invariante par c_X , et sa partie réelle $\mathbb{R}C_\sigma = C_\sigma \cap \mathbb{R}X$ est une hypersurface réelle lisse de $\mathbb{R}X$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on note $b_i(\sigma)$ i -ème nombre de Betti à coefficients réels. En particulier, $b_0(\sigma)$ est le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}C_\sigma$.

4.3 Raréfaction des courbes maximales

4.3.1 Le théorème et l'idée de sa démonstration

Dans cette partie, nous allons présenter le résultat suivant :

Théorème 4.3.1 (voir [31]) *Soit (X, c_X) une surface complexe compacte lisse munie d'une structure réelle ainsi que d'un fibré holomorphe en droites $L \rightarrow X$ ample, hermitien et réel, de courbure strictement positive ω . Soit $a > 0$. Alors il existe deux constantes C et D strictement positives telles que*

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \Pr\left(\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d) \mid b_0(\sigma) \geq \frac{1}{2}d^2L.L - ad\right) \leq Ce^{-Dd},$$

où la mesure de probabilité utilisée est donnée par (4.4).

En d'autres termes, les courbes maximales se raréfient exponentiellement vite quand leur degré augmente.

Remarque 4.3.2 *On peut en fait démontrer plus : pour toute suite d'entiers $a(d)$ telle que $a(d) = o(d)$, il existe deux constantes strictement positives C et D , telles que $\Pr\left(b_0(\sigma) \geq \frac{1}{2}d^2L^2 - a(d)d\right) \leq Ca(d)^4 \exp(-D\frac{d}{a(d)})$.*

Voici l'idée de la preuve de ce théorème. Pour $a > 0$, désignons par \mathcal{M}_a le sous-espace

$$\mathcal{M}_a = \{\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d) \mid b_0(\sigma) \geq \frac{1}{2}d^2L^2 - ad.\}$$

Le lieu d'annulation C_σ d'un élément $\sigma \in \mathcal{M}_a$ possède une topologie presque triviale en dehors de $\mathbb{R}X$. Plus précisément, si B est une boule fermée dans $X \setminus \mathbb{R}X$, le genre de $C_\sigma|_B$ est un $O(d)$, puisque le genre de la courbe C_σ est $\frac{1}{2}(d^2L.L - dL.c_1(X) + 2)$. En particulier, une courbe maximale est formée de la réunion d'un disque à trous, dont les composantes de bord sont incluses dans $\mathbb{R}X$, et de son conjugué. Le théorème suivant de H. de Thélin montre que le courant d'intégration formé par l'une de ces courbes presque maximales dans une boule d'adhérence incluse dans $X \setminus \mathbb{R}X$ reste dans un ensemble bien particulier de courants (1,1), positifs et fermés, celui des courants dits *laminaires*.

Théorème 4.3.3 ([14]) *Soit $(C_d)_{d \in \mathbb{N}}$ une suite de courbes holomorphes lisses dans la boule unité de \mathbb{C}^2 , telle que pour tout d , le genre de la courbe C_d est majoré par l'aire de C_d à une constante près indépendante de d . Alors toute limite T du courant d'intégration renormalisé $[C_d]/\text{Aire}(C_d)$ est laminaire, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble mesurable (A, da) ainsi qu'une famille $(D_a)_{a \in A}$ de disques holomorphes, tels que pour tout $a, a' \in A$, l'intersection $D_a \cap D_{a'}$ est vide ou ouverte dans D_a et $D_{a'}$, et $T = \int_{a \in A} [D_a] da$.*

En particulier, on peut montrer (voir [31]) que la forme de Kähler ω n'est pas laminaire. Or, à la suite de l'article [61] de B. Shiffman et S. Zelditch, on sait qu'en moyenne, le courant d'intégration renormalisé d'une hypersurface algébrique *complexe* vaut asymptotiquement ω quand d tend vers l'infini, et que la variance de cette variable aléatoire tend vers zéro avec d . Par conséquent, le courant d'intégration formé par une courbe complexe aléatoire de grand degré reste en général loin des courants laminaires. Nous allons voir d'une part que pour des courbes holomorphes *réelles* et la mesure de probabilité $\mu_{\mathbb{R}}$ donnée par (4.4), ce résultat est valable à l'extérieur de $\mathbb{R}X$. Nous verrons d'autre part que tous les moments associés à ces courbes aléatoires sont adéquatement majorés. Il s'ensuit par une astuce classique en probabilité que le volume des courbes maximales décroît exponentiellement vite avec le degré.

4.3.2 Démonstration du théorème

Précisons ces idées. Pour $\sigma \in H^0(X, L^d)$, considérons le courant d'intégration renormalisé

$$Z_\sigma = \frac{1}{d}[C_\sigma].$$

Fixons de plus, pour tout d , (S_0, \dots, S_{N_d}) une base orthonormée de $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$. On sait que pour d assez grand, l'application de Kodaira

$$\begin{aligned} \Phi_d : X &\rightarrow \mathbb{C}P^{N_d} \\ z &\mapsto [S_0(z) : \dots : S_{N_d}(z)] \end{aligned}$$

est un plongement. De plus, Tian a démontré dans [69] que

$$\frac{1}{d}\Phi_d^*\omega_{FS} = \omega + O\left(\frac{1}{d}\right),$$

où ω_{FS} est la forme de Fubini-Study sur l'espace projectif. La proposition suivante majore les moments de la variable aléatoire $\langle Z_\sigma - \frac{1}{d}\Phi_d^*\omega_{FS}, \chi \rangle$, où $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction test.

Proposition 4.3.4 *Si χ est à support dans $X \setminus \mathbb{R}X$, alors il existe une constante C_χ dépendant de χ telle que pour tout $m \geq 1$ et pour tout d assez grand,*

$$E(|\langle Z_\sigma - \Phi_d^*\omega_{FS}, \chi \rangle|^m) \leq \left(\frac{C_\chi}{d}\right)^m m!,$$

où l'espérance E est calculée pour la mesure $\mu_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$.

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons comment elle implique le Théorème 4.3.1. Grâce à l'astuce de Markov et la Proposition 4.3.4, on peut montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $d \geq 1$,

$$Pr(\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d) \mid \langle Z_\sigma - \frac{1}{d}\Phi_d^*\omega_{FS}, \chi \rangle \geq 1) \leq \frac{e^{-\lambda}}{1 - \frac{\lambda C_\chi}{d}}. \quad (4.5)$$

En choisissant $\lambda = d/(2C_\chi)$, on obtient que cette probabilité décroît exponentiellement vite avec d .

Maintenant, fixons une boule B incluse dans $X \setminus \mathbb{R}X$. D'après le Théorème 4.3.3, $\omega|_B$ n'appartient pas à l'adhérence de l'ensemble des courants d'intégration formés par la restriction à B des courbes de \mathcal{M}_a puisque le genre de $C_{\sigma|_B}$ est majoré par ad , donc par l'aire de C_σ . Par conséquent, il existe une fonction test χ à support dans B , telle que pour toute section $\sigma \in \mathcal{M}_a$, $|\langle Z_d - \omega, \chi \rangle| \geq 2$. D'après le résultat de Tian, pour d assez grand, cette estimation implique que $|\langle Z_d - \frac{1}{d}\Phi_d^*\omega_{FS}, \chi \rangle| \geq 1$. En appliquant la majoration (4.5), on en déduit le résultat.

Démonstration de la Proposition 4.3.4. La relation de Poincaré-Lelong permet de traiter analytiquement le courant Z_σ . Si f est une fonction holomorphe locale définissante de C_σ , alors

$$Z_\sigma = \frac{i}{\pi d} \partial \bar{\partial} \log |f|.$$

Par conséquent,

$$Z_\sigma - \frac{1}{d} \Phi_d^* \omega_{FS} = \frac{i}{2\pi d} \partial \bar{\partial} \log \frac{\|\sigma\|^2}{\sum_{i=0}^{N_d} \|S_i\|^2},$$

où les normes sont induites par h sur L^d . Le m -ième moment s'écrit donc

$$\int_{\mathbb{R}H^0(X, L^d)} \left| \int_X \frac{1}{\pi d} \partial \bar{\partial} \chi \log \frac{\|\sigma\|}{\sum_{i=0}^{N_d} \|S_i\|^2}(x) dx \right|^m d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma).$$

Par l'inégalité de Hölder, l'inversion des signes intégraux et l'invariance de la mesure $d\mu_{\mathbb{R}}$ par le groupe orthogonal, on obtient une majoration du m -ième moment par une intégrale ne portant plus que sur deux variables :

$$\left(\frac{C'_\chi}{d} \right)^m \sup_{x \in \text{Support}(\chi)} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \log \left(\frac{|a_0 + ia_1 r(x)|^2}{1 + r(x)^2} \right) \right|^m e^{-|a|^2} da_0 da_1,$$

où $r(x) \in \mathbb{R}$ est tel que $[1 : ir(x) : 0 : \dots : 0]$ est dans l'orbite de $[S_0 : S_1 : \dots : S_{N_d}](x)$ pour l'action du groupe orthogonal, ce qui fait de $r(x)$ la distance de $\Phi_d(x)$ à $\mathbb{R}P^{N_d}$. Après quelques calculs, on trouve

$$E(|\langle Z_\sigma - \Phi_d^* \omega_{FS}, \chi \rangle|^m) \leq m! \left(\frac{C''_\chi}{d} \right)^m (1 - \Pi_d(x))^{-1},$$

où C''_χ est une constante et

$$\Pi_d(x) = \frac{\|\sum_{i=0}^{N_d} S_i^2(x)\|}{\sum_{i=0}^{N_d} \|S_i^2(x)\|}.$$

Or il s'avère que $\Pi_d(x)$ est la valeur du noyau de Bergman normalisé en (x, \bar{x}) puisque les sections S_i sont choisies réelles, voir Définition (23) de l'article [63]. Si x n'est pas réel, ce noyau s'effondre avec une vitesse $e^{-ad(\Re x)^2}$ avec $a > 0$ uniforme, voir par exemple la Proposition 2.1 de [65]. Cette décroissance est uniforme sur le compact K de $X \setminus \mathbb{R}X$, ce qui conclut la démonstration de la proposition. \blacksquare

Remarque 4.3.5 *On peut aussi démontrer l'effondrement de $\Pi_d(x)$ hors de $\mathbb{R}X$ sans utiliser la technologie de Zelditch pour le noyau de Bergman expliquée dans [70] et utilisée dans [65]. En effet, soit σ_0 la section pic centrées sur x fournie par les lemmes 4.4.6 et 4.4.7. D'après la fin du Lemme 4.4.6, cette section est asymptotiquement orthogonale au sous-espace des sections s'annulant en x . De plus, sa norme décroît exponentiellement vite avec d en tout point à distance fixe non nulle de x . Il s'ensuit directement que $\Pi_d(x)$ possède la décroissance annoncée en tout x non réel.*

4.4 Nombre total de Betti moyen

La variété (X, ω, c_X) est dorénavant une variété projective réelle quelconque, de dimension complexe n , et $L \rightarrow X$ un fibré en droites holomorphe, réel et hermitien de courbure ω . Nous cherchons maintenant, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, à majorer l'espérance

$$E(b_i) = \int_{\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)} b_i(\mathbb{R}C_\sigma) d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma),$$

ou bien la somme de ces nombres $E(b_*) = \sum_i E(b_i)$. Dans cette partie, les nombres de Betti seront toujours à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 4.4.1 (voir [33]) *Soit X comme ci-dessus. Alors $E(b_*) = o(d^n)$. Si $n = 2$, on a $E(b_0) = O(d(\log d)^2)$.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est la suivante. Nous avons d'abord fixé un pinceau de Lefschetz $p : X \dashrightarrow \mathbb{C}P^1$, et défini $\nu(\sigma)$ la distribution sur X des points critiques de la restriction $p|_{C_\sigma}$ de p à une hypersurface aléatoire C_σ , où $\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$. Cette distribution est définie par

$$\nu(\sigma) = \sum_{x \in \text{Crit}(p|_{C_\sigma})} \delta_x, \quad (4.6)$$

où δ_x est la distribution de Dirac associée à x . Nous avons alors démontré le résultat d'équidistribution suivant :

Théorème 4.4.2 (voir [33]) *La moyenne $E(\nu) = \int_{\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)} \nu(\sigma) d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma)$ vérifie*

$$E(\nu) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} d^n \left(\int_X \omega^n \right) dx$$

faiblement sur $X \setminus \mathbb{R}X$ et en dehors de l'ensemble $\text{Crit}(p)$ des points critiques de p .

Rappelons que $dx = \frac{\omega^n}{\int_X \omega^n}$ est la forme de volume normalisée sur X associée à ω .

Remarque 4.4.3 *Dans le cas où X n'est pas pourvue de structure réelle, on obtient le même résultat d'équidistribution des points critiques de la restriction de p à une hypersurface complexe aléatoire, voir le Théorème 3 de [33]. Cette fois, l'espérance est relative à la mesure complexe (4.3).*

D'un point de vue global, des calculs topologiques donnent l'estimation suivante du nombre total de points critiques de $p|_{C_\sigma}$ pour une section σ donnée.

Proposition 4.4.4 (voir [33]) *Soit $\sigma \in H^0(X, L^d)$. Alors le nombre de points critiques de $p|_{C_\sigma}$ est équivalent à $d^n(\int_X \omega^n)$ quand d tend vers l'infini.*

Le Théorème 4.4.1 se déduit de la Proposition 4.4.4 conjuguée au Théorème 4.4.2 de la façon suivante. Soit $\epsilon > 0$ fixé, et

$$\chi : X \setminus (\mathbb{R}X \cup \text{Crit}(p)) \rightarrow [0, 1]$$

une fonction plateau, choisie de sorte que $\text{Vol}(\chi^{-1}(1)) \geq 1 - \epsilon$. Le nombre moyen de points critiques de $p|_{\mathbb{R}C_\sigma}$ est inférieur au nombre total de points critiques moins la valeur moyenne de $\langle \nu, \chi \rangle$, ce qui par la Proposition 4.4.4 et le Théorème 4.4.2 est plus petit que $\epsilon(\int_X \omega^n)d^n + o(d^n)$. Ceci étant valable pour tout ϵ , on en déduit que ce nombre est un $o(d^n)$. Si $p|_{\mathbb{R}C_\sigma}$ était à valeurs dans \mathbb{R} et de Morse, alors la majoration du nombre total de Betti s'ensuivrait.

Dans le cas général, il faut estimer la topologie de l'intersection de $\mathbb{R}C_\sigma$ avec une fibre F donnée de p , par exemple la fibre au-dessus de l'infini. En utilisant la théorie de Morse et Mayer-Victoris, on obtient l'inégalité suivante :

$$b_*(\mathbb{R}C_\sigma) \leq 4b_*(\mathbb{R}F \cap \mathbb{R}C_\sigma) + \#\text{Crit}(p|_{\mathbb{R}C_\sigma}).$$

Par l'inégalité de Thom-Smith, on a de plus

$$b_*(\mathbb{R}F \cap \mathbb{R}C_\sigma) \leq b_*(F \cap C_\sigma). \quad (4.7)$$

Enfin, le lemme suivant permet de majorer, en choisissant $X = F$ et $L = L|_F$, le terme de droite de l'inégalité (4.7) par $O(d^{n-1})$. Ceci achève l'esquisse de démonstration du Théorème 4.4.1. ■

Lemme 4.4.5 (voir [33]) *Soit L un fibré en droites ample au-dessus d'une variété projective X compacte de dimension n . Soit $\sigma \in H^0(X, L^d)$ s'annulant transversalement. Alors*

$$b_*(C_\sigma) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \left(\int_X \omega^n \right) d^n.$$

Démonstration. La formule d'adjonction s'écrit

$$c(TX)|_{C_\sigma} = c(TC_\sigma) \wedge c(NC_\sigma)$$

où NC_σ désigne le fibré normal à C_σ . On obtient facilement

$$c_n(C_\sigma) = \sum_{k=0}^n (-1)^k d^k c_1(L)^k \wedge c_{n-k}(X)|_{C_\sigma}.$$

On en déduit donc que la caractéristique d'Euler de C_σ est équivalente à $(-1)^n d^n c_1(L)$ quand d tend vers l'infini. Ensuite, le théorème hyperplan de Lefschetz montre que tous les nombres de Betti hormis le n -ième $b_n(C_\sigma)$ restent bornés quand d tend vers l'infini. D'où le résultat. ■

Démonstration de la Proposition 4.4.4. On suppose d'abord que $p : C_\sigma \mapsto \mathbb{C}P^1$ est une fibration de Lefschetz. Si l'on retire à C_σ la fibre F_0 au-dessus de zéro et celle au-dessus de l'infini, l'application $|p|^2$ est de Morse et d'indice toujours égal à n aux points critiques. Par la théorie de Morse et l'additivité de la caractéristique d'Euler, on obtient

$$\chi(C_\sigma) = 2\chi(F_0 \cap C_\sigma) + (-1)^n \# \text{Crit}(p|_{C_\sigma}).$$

La conclusion découle du Lemme 4.4.5 appliqué à $F_0 \cap C_\sigma$ et à C_σ , ainsi que du théorème hyperplan de Lefschetz. Le cas d'un pinceau de Lefschetz se traite en remarquant que la caractéristique d'Euler de l'éclaté de C_σ est égale à celle de C_σ plus celle de son intersection avec le lieu base. Cette dernière est $O(d^{n-2})$ d'après le Lemme 4.4.5. ■

Nous passons maintenant à la démonstration du Théorème 4.4.2, qui exprime l'équidistribution des points critiques de la restriction d'un pinceau de Lefschetz à une hypersurface aléatoire réelle en dehors de $\mathbb{R}X$ et des points critiques de p .

Démonstration du Théorème 4.4.2. Soit $U \subset X$ une petite boule hors du lieu critique de p et du lieu base, et $\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$. Si U est assez petite, le fibré hyperplan formé par $K = \ker dp$ est trivial, et on peut trouver (v_1, \dots, v_{n-1}) un champ de vecteurs holomorphes formant en tout point une base de K . Si e est une trivialisatation sur U de L et $\sigma = fe^d$, alors les points critiques $p|_{C_\sigma}$ sont déterminés par le lieu commun d'annulation de f et de $\partial f(v_i)$, $i = 1, \dots, n-1$. La distribution $\nu(\sigma)$ donnée par (4.6) peut être localement exprimée, grâce à la formule de Poincaré-Martinelli donnée dans [36], par

$$\nu(\sigma) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n (\partial\bar{\partial}\lambda_U)^n,$$

où $\lambda_U = \log(|f|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |df(v_i)|^2)$. Pour le calcul de la moyenne $E(\nu)$, nous échangeons par Fubini l'intégrale sur $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$ et celle sur $U \subset X \setminus \mathbb{R}X$. Mais telle quelle, la fonction λ_U et ses dérivées ne sont pas adaptées à l'intégration sur $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$ en un point particulier x de U . Nous utilisons le fait que pour tout $x \in X$ fixé, il existe un début de base asymptotiquement orthogonale de $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$ adaptée à x .

Lemme 4.4.6 ([69], Lemma 1.2 et Lemma 3.1) *Soit (L, h) un fibré holomorphe hermitien en droites complexes de courbure strictement positive ω au-dessus d'une variété projective lisse compacte X . Soit $x \in X$, $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ et $p' > p_1 + \dots + p_n$. Alors il existe $d_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $d > d_0$, le fibré L^d possède une section holomorphe globale σ satisfaisant $\int_X h^d(\sigma, \sigma) dx = 1$ pour la forme volume $dx = \frac{1}{\int_X \omega^n} \omega^n$ et*

$$\int_{X \setminus B(x, \frac{\log d}{\sqrt{d}})} h^d(\sigma, \sigma) dx = O\left(\frac{1}{d^{2p'}}\right). \quad (4.8)$$

De plus, si (x_1, \dots, x_n) sont des coordonnées locales dans le voisinage de x , telles $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$ est une base orthonormée de $T_x X$, on peut supposer que dans un voisinage de x ,

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \lambda(x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} + O(|x|^{2p'})) e^d \left(1 + O\left(\frac{1}{d^{2p'}}\right)\right),$$

où

$$\lambda^{-2} = \int_{B(x, \frac{\log d}{\sqrt{d}})} |x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}|^2 h^d(e^d, e^d) dx$$

et e est une trivialisatation locale de L dont le potentiel $\Phi = -\log h(e, e)$ atteint un maximum en x avec une hessienne égale à $\pi\omega(\cdot, \cdot)$. De plus, le produit L^2 de deux sections différentes construites ainsi est un $O(1/d)$. Enfin, si (X, c_X) possède une structure réelle et si L est réel, on peut choisir ces sections réelles.

Concrètement, voici les développements de Taylor des sections ainsi construites pour $p' = 3$ et $|p| \leq 2$. Ce seront les seuls cas qui nous intéresseront par la suite.

Lemme 4.4.7 Soit σ_0 la section associée à $p = 0$, σ_j la section associée à $p_j = 1$ et $p_i = 0$ si $i \neq j$, et $\sigma_{k,l}$ la section associée à $p_k = p_l = 1$ et $p_j = 0$ si $j \notin \{k, l\}$. On a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_0(y) &= (\lambda_0 + O(\|y\|^6)) e^d(y) (1 + O(\frac{1}{d^6})), \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \sigma_j(y) &= (\lambda_1 y_j + O(\|y\|^6)) e^d(y) (1 + O(\frac{1}{d^6})), \\ \forall k, l \in \{1, \dots, n\}, k \neq l, \sigma_{k,l}(y) &= (\lambda_{(1,1)} y_k y_l + O(\|y\|^6)) e^d(y) (1 + O(\frac{1}{d^6})), \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sigma_{k,k}(y) &= (\lambda_{(2,0)} y_k^2 + O(\|y\|^6)) e^d(y) (1 + O(\frac{1}{d^6})), \end{aligned}$$

avec, si δ_L désigne $\int_X c_1(L)^n$ le degré de L ,

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{d}^n} \lambda_0 &= \sqrt{\delta_L} \quad ; \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{d}^{n+1}} \lambda_1 = \sqrt{\pi} \sqrt{\delta_L} \\ \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{d}^{n+2}} \lambda_{(1,1)} &= \pi \sqrt{\delta_L} \quad \text{et} \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{d}^{n+2}} \lambda_{(2,0)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\delta_L}. \end{aligned}$$

Remarque 4.4.8 Dans le cas où $(X, \omega) = (\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ et $(L, h) = (\mathcal{O}(1), h_{FS})$, les polynômes homogènes $(\sqrt{\frac{(n+d)!}{n!j_0! \cdots j_n!}} X_0^{j_0} \cdots X_n^{j_n})_{\sum j_k = d}$ forment non seulement (cf. la Remarque 4.2.1) une base orthonormée de $H^0(X, L^d)$, mais elles sont également des sections pics associées à 0, dans les coordonnées $x_i = X_i/X_0$. L'absence de $\sqrt{\pi}$ dans provient du fait que dans le Lemme 4.4.7, les dérivées des coordonnées y_i sont orthonormées en 0 pour la métrique $g = \omega(\cdot, \cdot)$, ce qui n'est pas le cas pour les x_i . En un autre point x de $\mathbb{C}P^n$, on utilise le groupe unitaire pour trouver une base de polynômes-pics centrés sur x . Notons que pour $x \in \mathbb{R}P^n$, les sections obtenues sont réelles, puisqu'on aura alors utilisé l'action du groupe orthogonal.

Si $x \in U$ est fixé, soit σ_0 la fonction pic de Hörmander définie dans le Lemme 4.4.7. Dans cette trivialisatation, la section aléatoire $\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$ définie près de x est $f_x = f \frac{e^d}{\sigma_0} = f e^{-g_x}$. En définissant

$$\lambda_x = \log (|f_x|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |df_x(v_i) + f_x \partial g_x(v_i)|^2),$$

on a l'égalité $\lambda_U = \Re g_x + \lambda_x$, ainsi que $\lambda_U(x) = -\log \|e^d\|(x) + \lambda_x(x)$ et $\partial\bar{\partial}\lambda_U = \partial\bar{\partial}\lambda_x$. En utilisant l'équation de courbure (4.1) et Stokes, on obtient, pour tout fonction test $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E(\langle \nu(\sigma), \chi \rangle) &= d^n \int_X \chi \omega^n \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n-k} d^k \int_{x \in X} \partial\bar{\partial}\chi \wedge \omega^k \wedge \int_{\mathbb{R}H^0(X, L^d)} \lambda_x(x) (\partial\bar{\partial}\lambda_x)|_x^{n-1-k} d\mu(\sigma). \end{aligned}$$

Il suffit donc, afin de démontrer le Théorème 4.4.1, que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, et pour tout compact K inclus dans $X \setminus \mathbb{R}X$,

$$\sup_{x \in K} \int_{\mathbb{R}H^0(X, L^d)} \|\lambda_x(\partial\bar{\partial}\lambda_x)^k\| d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma) = o(d^{k+1}). \quad (4.9)$$

Obtenir l'estimation (4.9) est technique. Sans rentrer dans les détails pénibles, donnons quelques éléments sur lesquels les estimations s'appuient les calculs. D'abord remarquons que l'intégrand ne dépend pas des dérivées d'ordre 3 ou plus de f_x , ce qui réduit l'intégration à l'orthogonal du sous-espace de $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$ formé par les sections s'annulant à l'ordre 2 en x , et ainsi le calcul à une intégrale sur un sous-espace de dimension indépendante de d . Ensuite, si $h_0 = df_x$ (les différentielles des objets holomorphes sont désignés par ∂ , donc d désigne ici et dans la suite le degré) et si

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad h_i = \partial f_x(v_i) + df_x \partial g_x(v_i),$$

$\|\lambda_x(\partial\bar{\partial}\lambda_x)^k\|$ est majoré par une somme, en nombre indépendant de d , de termes de la forme

$$\left\| \log \left(\sum_{i=0}^{n-1} |h_i|^2 \right) \frac{\partial h_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial h_{i_k} \wedge \overline{\partial h_{j_1}} \wedge \dots \wedge \overline{\partial h_{j_k}}}{\sum_{i=0}^{n-1} |h_i|^2} \right\|. \quad (4.10)$$

Maintenant, on peut décomposer la section σ suivant le début de base fournie par les lemmes 4.4.6 et 4.4.7 :

$$\sigma = a_0 \sigma_0 + \sum_{j=1}^n a_j \sigma_j + \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} b_{kl} \sigma_{kl} + \tau, \quad (4.11)$$

où $a_j, b_{kl} \in \mathbb{R}$ et τ s'annule à l'ordre 2 en x . On a donc au point x , grâce au Lemme 4.4.7, $h_0 = a_0$, et

$$h_i = \sqrt{\pi d} \sum_{j=1}^n a_j \partial_j v_i + a_0 \partial_x g(v_i).$$

La majoration du numérateur s'obtient, entre autres, en utilisant l'estimation $\|\partial g_x\| = O(d)$. On en déduit que

$$|h_i| = O(\sqrt{d} \|(a_i)_{1, \dots, n}\| + d|a_0|),$$

ainsi que, en utilisant l'estimation $\|\nabla^2 g_x\| = O(d)$,

$$|\partial h_i| = O\left(\sqrt{d}\|(a_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}\| + d\|(b_{kl})_{1 \leq k \leq l \leq n}\| + \|(a_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}\|d\sqrt{d} + |a_0|d\right).$$

La puissance du terme en $d\sqrt{d}$ dans chaque produit du développement (4.10) est au maximum égal à deux, puisqu'il correspond à la 1-différentielle ∂f_x . Le dénominateur se minore quant à lui de la façon suivante. En dehors du point critique, on peut toujours supposer que $p = z_n$, si bien qu'au point x ,

$$\forall i = 1, \dots, n-1, |h_i| = |\sqrt{\pi d} a_i + a_0 \partial_i g_x|,$$

ce qui permet de minorer $\sum_{i=1}^{n-1} |h_i|^2$.

Lorsque l'ouvert U contient un point du lieu base, la minoration du dénominateur ne se fait plus aussi simplement. On peut supposer qu'alors p s'écrit $[z_{n-1} : z_n] \in \mathbb{C}P^1$. Ainsi, une trivialisaton de $\ker dp$ est engendrée par les vecteurs

$$v_1 = z_{n-1} \partial / \partial z_{n-1} + z_n \partial / \partial z_n, v_2 = \partial / \partial z_1, \dots, v_{n-1} = \partial / \partial z_{n-2}.$$

Il existe alors une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{cases} |\partial f_x(v_1)|^2 & \geq C(|v_1|^2(|a_{n-1}|^2 + |a_n|^2)) \\ \text{et } \sum_{i=1}^{n-2} |\partial f_x(v_i)|^2 & \geq C(\sum_{i=1}^{n-2} |a_i|^2). \end{cases}$$

Par Fubini, le résultat de l'intégration sur $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$ s'avère être essentiellement le même que dans le cas régulier précédent, sauf qu'apparaît en facteur un terme singulier en $x : 1/|v_1|^2$. On constate alors que ce terme est intégrable au voisinage du lieu base.

Si U contient un point critique en dimension 2, on peut choisir des coordonnées et une trivialisaton de $\ker dp$ par $z_1 \partial / \partial z_2 - z_2 \partial / \partial z_1$, et le résultat s'en déduit de la même façon que pour le lieu base. ■

4.5 Nombres de Betti moyens

Récemment avec Jean-Yves Welschinger nous avons donné une version beaucoup plus fine du Théorème 4.4.1 par une méthode différente et plus directe.

Théorème 4.5.1 (voir [32]) *Soit (X, ω, c_X) une variété compacte lisse projective réelle de dimension complexe n et $L \rightarrow X$ un fibré en droites holomorphe réel de courbure ω . Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $E(b_i)$ est la moyenne du i -ème nombre de Betti de la partie réelle du lieu d'annulation d'une section $\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$, pour la mesure donnée par (4.4). Alors*

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{d}^n} E(b_i) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e(i, n-1-i) \text{Vol}_h(\mathbb{R}X).$$

Ici le volume de $\mathbb{R}X$ est calculé à l'aide de la restriction à $\mathbb{R}X$ de la métrique g associée à ω . De plus, quand $n = 1$, la limite supérieure est une limite et l'inégalité une égalité, de sorte que

$$E(b_0) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\text{Long}_h(\mathbb{R}X)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{d}.$$

Remarque 4.5.2 *La forme volume dx utilisée pour le produit scalaire L^2 (4.2) est ici quelconque, et non pas nécessairement $\omega^n / \int_X \omega^n$, voir la Remarque 4.5.10. Il est remarquable que les résultats ne dépendent pas de ce choix.*

Les coefficients $e(p, q)$ intervenant ici sont eux-mêmes des espérances provenant des matrices aléatoires. Plus précisément, on équipe l'espace des matrices symétriques réelles de taille n du produit scalaire rendant la base formée par les matrices $\tilde{E}_{ii} = \sqrt{2}E_{ii}$ et $\tilde{E}_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ orthonormée. Désignons par $d\mu_{\mathbb{R}}$ la mesure Gaussienne de probabilité associée. C'est précisément la mesure traditionnelle GOE des matrices aléatoires, voir l'ouvrage [54] par exemple. Pour $p + q = n$, le coefficient $e(p, q)$ est égal à l'intégrale de la valeur absolue du déterminant d'une matrice de signature (p, q) pour la mesure de probabilité $d\mu_{\mathbb{R}}$:

$$e(p, q) = \int_{Sym(p, q, \mathbb{R})} |\det A| d\mu_{\mathbb{R}}(A).$$

La somme

$$e(n) = \sum_{i=0}^n e(i, n-i) \int_{Sym(n, \mathbb{R})} |\det A| d\mu_{\mathbb{R}}(A)$$

est quant à elle la moyenne de $|\det|$ sur les matrices symétriques de taille n . Remarquons que la mesure $d\mu_{\mathbb{R}}$ n'est pas de probabilité sur l'espace $Sym(p, q, \mathbb{R})$. Voici deux propriétés au sujet de ces coefficients.

Théorème 4.5.3 (voir [32]) 1. *Pour tout entier n impair,*

$$e(n) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right).$$

2. *Pour n est pair, le résultat est vrai asymptotiquement quand n tend vers l'infini.*

3. *Soit $\alpha \in [0, 1/2]$. Il existe une constante $c_\alpha > 0$, telle que*

$$\sum_{i=0}^{[\alpha n]} e(i, n-i) \leq \exp(-c_\alpha n^2).$$

4. *Soit $\alpha \in [0, 1/2]$. Il existe une constante $c'_\alpha > 0$, telle que*

$$Pr(A \in Sym(n) \mid A \in \bigcup_{i=0}^{[\alpha n]} Sym(i, n-i)) = \sum_{i=0}^{[\alpha n]} Vol(Sym(i, n-i)) \leq \exp(-c'_\alpha n^2).$$

Remarque 4.5.4 *Il s'avère que le volume de $\mathbb{R}P^n$ pour la métrique induite par la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^n$ est égal à $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$. En effet, les géodésiques ont une longueur égale à $\sqrt{\pi}$, si bien que l'espace projectif réel est isométrique au quotient de la sphère de rayon $1/2\pi$ dans l'espace euclidien. Par conséquent, $Vol_{FS}(\mathbb{R}P^n) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}^n} Vol(S^n)$, d'où le résultat.*

Corollaire 4.5.5 *Pour tout entier n pair,*

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{d}^n} E(b_*) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\text{Vol}_h(\mathbb{R}X)}{\text{Vol}_{FS}(\mathbb{R}P^n)} \right).$$

Pour n impair, cette inégalité n'est vraie qu'asymptotiquement en n . \square

Remarque 4.5.6 *Rappelons que S. S. Podkoritov a démontré dans [58] que lorsque n est impair, la moyenne dans $\mathbb{R}P^n$ de la caractéristique d'Euler de ces hypersurfaces est équivalente à $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \epsilon_n \sqrt{d}^n$ quand d tend vers l'infini, avec ϵ_n une constante strictement positive équivalente à $\frac{2\sqrt{2}}{n}$ quand n tend vers l'infini.*

L'assertion 3. de ce théorème suggère qu'en grande dimension n de X , les nombres de Betti d'une hypersurface aléatoire de grand degré se concentrent autour de la dimension moitié.

Nous avons démontré en fait une telle répartition pour les indices des points critiques de la restriction aux hypersurfaces aléatoires $\mathbb{R}C_\sigma$ d'une fonction de Morse fixe. Plus précisément, soit $p : \mathbb{R}X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Pour $\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$ générique, la restriction $p|_{\mathbb{R}C_\sigma}$ de p à $\mathbb{R}C_\sigma$ est de Morse. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, soit

$$\nu_i(\sigma) = \sum_{x \in \text{Crit}_i(p|_{\mathbb{R}C_\sigma})} \delta_x \quad (4.12)$$

la distribution des points critiques d'indice i de $p|_{\mathbb{R}C_\sigma}$, où δ_x est la distribution de Dirac pour le point x . Le théorème suivant démontre l'équidistribution asymptotique des points critiques d'indice i .

Théorème 4.5.7 (voir [32]) *La moyenne $E(\nu_i) = \int_{\mathbb{R}H^0(X, L^d)} \nu_i(\sigma) d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma)$ vérifie*

$$E(\nu_i) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e(i, n-1-i) d \text{vol}_h \sqrt{d}^n \quad (4.13)$$

faiblement sur $\mathbb{R}X$, où $d \text{vol}_h$ est l'élément de volume induit par la métrique g associée à ω .

Le Théorème 4.5.7 montre que quand d tend vers l'infini, la densité de points critiques d'indice donné devient en moyenne constante sur $\mathbb{R}X$, qu'elle ne dépend pas de p , et qu'elle croît en \sqrt{d}^n . Par ailleurs, le Théorème 4.5.3 montre que lorsque la dimension n de X devient grande, l'écrasante majorité de ces points critiques sont d'indice proche de $n/2$. Avant de démontrer le Théorème 4.4.2, montrons qu'il implique le Théorème 4.5.1.

Démonstration du Théorème 4.5.1. En choisissant $\chi = 1$ sur $\mathbb{R}X$ et en appliquant (4.13), on obtient

$$E(\#\text{Crit}_i) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e(i, n-1-i) \text{Vol}_h(X) \sqrt{d}^n.$$

Les inégalités faibles de Morse (voir [55]) appliquées à la restriction de p à $\mathbb{R}C_\sigma$ impliquent le résultat. \blacksquare

La méthode pour démontrer le Théorème 4.5.7 est assez différente de celle utilisée pour le Théorème 4.4.2, qui se basait sur la formule de Poincaré-Martinelli, ce qui imposait de travailler sur des ouverts de X . Cette fois, nous nous sommes inspirés de la formule de Kac-Rice (voir [44], [59] ou [66]), qui nous permet de travailler directement sur $\mathbb{R}X$.

Démonstration du Théorème 4.5.7. Soient $\tau \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$ et $y \in \text{Crit}_i(p|_{\mathbb{R}C_\tau})$. Pour tout σ proche de τ (ou colinéaire), il existe $x \in \text{Crit}_i(p|_{\mathbb{R}C_\sigma})$ proche de y , ce qui permet de définir localement une application d'évaluation :

$$\begin{aligned} eval : \mathbb{R}H^0(X, L^d) &\rightarrow \mathbb{R}X \\ \sigma &\mapsto x \in \text{Crit}_i(p|_{\mathbb{R}C_\sigma}). \end{aligned}$$

Soit $\chi : \mathbb{R}X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction test donnée dont le support est un petit voisinage de y . On a l'égalité

$$E(\langle \nu_i, \chi \rangle) = \int_{\mathbb{R}H^0(X, L^d)} \chi \circ eval(\sigma) d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma).$$

La formule de la coaire (voir [25] ou [66] dans ce contexte) permet d'écrire

$$E(\langle \nu_i, \chi \rangle) = \int_X \chi(x) \left(\int_{eval^{-1}(x)} |\det d^\perp eval|^{-1} \frac{d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma)}{\sqrt{\pi}^n} \right) dvol_h(x),$$

puisque la codimension du sous-espace $eval^{-1}(x)$ est égale à n . Ici, la valeur de $\det d^\perp eval$ en une section $\sigma \in eval^{-1}(x)$ est le déterminant de la restriction de l'application linéaire

$$d_\sigma eval : \mathbb{R}H^0(X, L^d) \rightarrow T\mathbb{R}X$$

au sous-espace orthogonal à $\ker d_\sigma eval$, dans des bases orthonormées pour le produit scalaire \langle , \rangle sur $\mathbb{R}H^0(X, L^d)$ et pour le produit scalaire g induit par ω sur $T\mathbb{R}X$.

Donnons maintenant une représentation de $d^\perp eval$ qui laisse prise au calcul. Pour cela, supposons d'abord que le point $x_0 \in \mathbb{R}X$ n'est pas dans $\text{Crit}(p)$. Au voisinage de x_0 , le noyau de dp est engendré par un champ de vecteurs v_2, \dots, v_n . Si $\sigma = f\sigma_0$, où σ_0 est la section pic centrée sur y fournie par les lemmes 4.4.6 et 4.4.7, considérons l'application :

$$F : \mathbb{R}H^0(X, L^d) \times \mathbb{R}X \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (4.14)$$

$$(\sigma, x) \mapsto (f(x), d_x f(v_2), \dots, d_x f(v_n)) \quad (4.15)$$

On constate que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}H^0(X, L^d)$, $F(\sigma, eval_{(\tau, y)}(\sigma)) = 0$, si bien que

$$\partial_1 F + \partial_2 F \circ deval_{(\tau, y)} = 0,$$

où $\partial_1 F$ est la différentielle de F par rapport à la variable σ , et $\partial_2 F$ la différentielle par rapport à x . Par conséquent, $d^\perp eval = -\partial_2 F^{-1} \circ \partial_1^\perp F$, où $\partial_1^\perp F$ est la restriction de $\partial_1 F$ au sous-espace orthogonal à $\ker d_\sigma eval$.

Pour estimer le déterminant de cette application linéaire, nous allons d'abord utiliser les sections pics. Rappelons que d'après le Lemme 4.4.6, pour tout point x de $\mathbb{R}X$, il existe des sections pics réelles centrées sur x . On peut toujours, par ailleurs, après rotation, choisir les coordonnées localement holomorphes et réelles x_1, \dots, x_n du Lemme 4.4.6 de sorte que $dp = dx_1$ au point x .

En développant σ selon les sections centrées sur $x_0 \in \mathbb{R}X$ fournies par les lemmes 4.4.6 et 4.4.7, on a, cf. (4.11),

$$\sigma = a_0\sigma_0 + \sum_{j=1}^n a_j\sigma_j + \sum_{1 \leq k < l \leq n} b_{kl}\sigma_{kl} + \tau,$$

où τ s'annule à l'ordre 2 en x_0 . On constate que l'orthogonal du noyau de $d_\sigma \text{eval}$ est engendré par (a_0, a_2, \dots, a_n) , si les sections $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, (\sigma_{kl})_{1 \leq k < l \leq n}\}$ étaient orthonormées, ce qui est le cas asymptotiquement quand d tend vers l'infini. Par ailleurs, définissons les coefficients b_{ij} , $1 \leq j < i \leq n$ par $b_{ij} = b_{ji}$, et B la matrice symétrique

$$B = \sum_{2 \leq i \leq n} \sqrt{2}b_{ii}E_{ii} + \sum_{2 \leq i < j \leq n} b_{ij}E_{ij}, \quad (4.16)$$

où E_{ij} sont les matrices élémentaires. Le lemme suivant, dont la démonstration est aisée, relie les indices géométriques aux indices de matrices.

Lemme 4.5.8 *Si x est un point critique de $p|_{\mathbb{R}C_\sigma}$, x est d'indice $(i, n-1-i)$ si et seulement si la matrice symétrique B définie par (4.16) est d'indice $(i, n-1-i)$.*

Maintenant, supposons pour simplifier que $p = x_1$ au voisinage de x_0 . On peut donc choisir $v_i = \partial/\partial x_i$ pour $2 \leq i \leq n$, si bien que

$$\begin{aligned} F(\sigma, x) = & (a_0 + \sqrt{\pi d} \sum_i a_i x_i, \sqrt{\pi d} a_2 + \sqrt{2} d \pi b_{22} x_2 + \pi d \sum_{1 \leq k \neq 2 \leq n} b_{2k} x_k, \dots, \\ & \sqrt{\pi d} a_n + \sqrt{2} \pi d b_{nn} x_n + \pi d \sum_{1 \leq k \neq n \leq n} b_{nk} x_k) + O(2), \end{aligned}$$

où $O(2)$ est un terme d'ordre 2 en x . Puisque

$$\partial_{a_0} F = (1, 0, \dots, 0) \text{ et } \partial_{a_i} F = (0, 0, \dots, \sqrt{\pi d}, \dots, 0)$$

en $(\sigma, x_0 = \text{eval}(\sigma))$, on constate que, dans une base orthonormée, le déterminant de $d_1 F$ est équivalent à $(\sqrt{\pi d})^{n-1}$.

Par ailleurs, au point (σ, x_0) on obtient

$$\partial_{x_1} F = (a_1 \sqrt{\pi d}, \pi d b_{21}, \dots, \pi d b_{n1}),$$

et pour $2 \leq i \leq n$,

$$\partial_{x_i} F = (a_i \sqrt{\pi d}, \pi d b_{1i}, \dots, \pi d b_{i-1i}, \sqrt{2} \pi d b_{ii}, \pi d b_{i+1i}, \dots, \pi d b_{ni}).$$

Puisque sur $eval^{-1}(x_0)$ les coefficients $(a_i)_{2 \leq i \leq n}$ sont nuls, on obtient, dans une base orthonormée,

$$|\det d_2 F| \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} |a_1| \sqrt{\pi d} (\pi d)^{n-1} |\det B|.$$

Maintenant, l'intégrale $\int_{eval^{-1}(x_0)} |a_1| |\det B| d\mu_{\mathbb{R}}(\sigma)$ est égale à

$$\int_{B \in Sym(i, n-1-i)} |\det B| d\mu_{\mathbb{R}}(B) \int_{a_1} |a_1| \frac{da_1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} E(|\det B|)$$

On obtient donc l'équivalent

$$E(\langle \nu_i, \chi \rangle) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e(i, n-1-i) \sqrt{d}^n \int_X \chi(x) dvol_h,$$

ce qui démontre le Théorème 4.5.7.

Dans le cas général où p n'est pas réelle analytique ou si l'on intègre près d'un point critique, on a seulement $dp = dx_1$ en x . Le terme correctif est alors en $(\sqrt{d})^{n-1}$ fois l'inverse de la norme du plus petit vecteur v_i , $2 \leq i \leq n$. Hors des points critiques, on peut choisir cette norme uniformément minorée et l'estimation est identique. Près d'un point critique, dans des coordonnées de Morse p s'écrit $\sum_{i=1}^n y_i^2$, si bien qu'on peut choisir les v_i en $O(y)$. Or $O(1/|y|^{n-1})$ est intégrable sur \mathbb{R}^n , donc le résultat reste valable.

En dimension $n = 1$, le Théorème 4.5.1 pour les surfaces de Riemann ne nécessite pas de fonction de Morse p . La mesure $\nu_i(\sigma)$ définie par (4.12) est remplacée par la somme des distributions de Dirac sur les zéros de σ . Par conséquent, la fonction $F(\sigma, x)$ donnée par (4.14) est simplement égale à $f(x)$. On obtient de la même façon que pour $n \geq 2$ l'équivalence

$$E(\nu) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} dvol_h \sqrt{d}$$

dont l'intégration sur $\mathbb{R}X$ donne la second partie du Théorème 4.5.1. ■

Remarque 4.5.9 Lorsque $(X, \omega) = (\mathbb{C}P^1, \omega_{FS})$ et $(L, h) = (\mathcal{O}(1), h_{FS})$, la Remarque 4.4.8 montre qu'en tout point de $\mathbb{R}P^1$, il existe une base orthonormée de polynômes pics. On a donc $\det \partial_1 F = 1$ et $|\det \partial_2 F| = |a_1| \sqrt{\pi d}$, si bien que

$$E(\langle \nu, \chi \rangle) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}P^1} \chi dvol_{FS} \sqrt{d}.$$

Puisque la longueur pour la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{R}P^1$ vaut $\sqrt{\pi}$, on retrouve l'égalité $E(b_0) = \sqrt{d}$ démontré par Kostlan dans [45].

Remarque 4.5.10 Les Théorèmes 4.5.1 et 4.5.7 restent vrais si pour le produit L^2 (4.2), au lieu de la forme volume $\omega^n / \int_X \omega^n$ on choisit n'importe quelle forme volume $dx = \kappa(x) \omega^n / \int_X \omega^n$ avec $\kappa > 0$. En effet, les sections produites par le Lemme 4.4.6 sont concentrées asymptotiquement au-dessus d'un point $x_0 \in \mathbb{R}X$, si bien que leur produits scalaires seront simplement dilatées par un coefficient commun $(1 + o(1))f(x_0)$.

4.5.1 Équirépartition complexe

Par la même méthode (voir [32]), on peut redémontrer l'un des résultats de [33] mentionné à la Remarque 4.4.3, en l'occurrence l'équidistribution des points critiques de la restriction d'un pinceau de Lefschetz sur une hypersurface complexe aléatoire :

Théorème 4.5.11 (voir [32]) *Soit X variété compacte, lisse, complexe projective de dimension $n > 0$ et L un fibré en droites holomorphe et ample muni d'une métrique de courbure strictement positive ω . Soit $p : X \dashrightarrow \mathbb{C}P^1$ un pinceau de Lefschetz. Alors si ν est la somme des distributions de Dirac sur les points critiques de $p|_{C_\sigma}$, la moyenne $\frac{1}{\sqrt{d}} E(\nu)$ pour la mesure (4.3) converge faiblement vers ω^n quand d tend vers l'infini.*

Démonstration. La formule de la coaire fait intervenir cette fois, puisque nous estimons des applications linéaires complexes, le carré du module d'un déterminant plutôt que sa valeur absolue. Il s'ensuit que la forme limite $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e(i, n-i) dvol_h$ sur $\mathbb{R}X$ dans le cas réel est remplacée $e_{\mathbb{C}}(n-1) \frac{\omega^n}{n!}$, où $e_{\mathbb{C}}(n)$ est la moyenne du module au carré du déterminant d'une matrice symétrique *complexe* pour la mesure gaussienne naturelle $d\mu_{\mathbb{C}}$ donnée par (4.3). En développant ce module au carré par le développement classique suivant les permutations de $\{1, \dots, n\}$, puis en intégrant, on trouve après un peu de combinatoire que $e(n) = (n+1)!$, ce qui conclut. ■

4.6 Estimation des déterminants moyens.

Cette section ne concerne que les matrices aléatoires, et la démonstration du Théorème 4.5.3.

4.6.1 Matrices symétriques quelconques

Nous commençons par estimer la valeur absolue du déterminant moyen d'une matrice symétrique réelle.

Théorème 4.6.1 *Quand n est impair, le déterminant moyen*

$$e(n) = \int_{Sym(n, \mathbb{R})} |\det B| d\mu_{\mathbb{R}}(B)$$

vaut $e(n) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Gamma(\frac{n+2}{2})$. Quand n est pair,

$$e(n) = (-1)^m \frac{n!}{m!2^n} + (-1)^{m-1} \frac{4\sqrt{2}n!}{\sqrt{\pi}m!2^n} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{\Gamma(k+3/2)}{k!}.$$

Dans tous les cas, $e_{\mathbb{R}}(n)$ est équivalent, quand n tend vers l'infini, à $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \Gamma(\frac{n+2}{2})$.

Le résultat pour n impair était connu par les physiciens R. Delannay et G. Le Caër, voir [16]. Les auteurs avaient également obtenu le cas pair, sous la forme d'une série hypergéométrique. La démonstration est proche de celle donnée dans le §26.5 de [54].

4.6.2 Matrices symétriques d'indice donné

Nous nous intéressons maintenant à la valeur des nombres particuliers $e(i, n - i)$. Un premier problème similaire et un peu moins difficile est donné par le calcul de la probabilité qu'une matrice symétrique de taille n soit de signature $(i, n - i)$.

Proposition 4.6.2 *Si $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$ sont fixés, alors il existe une constante $\beta > 0$ telle que la probabilité qu'une matrice symétrique soit de signature $(i, n - i)$ telle que $|\frac{i}{n} - \frac{1}{2}| \geq \epsilon$ décroît en $\exp(-\beta n^2)$.*

Ce résultat est une conséquence immédiate d'un théorème de grandes déviations de Ben Arous et Guionnet, voir [10]. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \log|x - y| & \text{si } x \neq y \\ +\infty & \text{si } x = y. \end{cases}$$

et H la fonctionnelle d'énergie définie sur $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$, l'espace des mesures de probabilité sur \mathbb{R} :

$$H : \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$\mu \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) & \text{si } \int_{\mathbb{R}} \log(|x| + 1) d\mu(x) < +\infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons que la mesure de Wigner $\mu_W \in \mathcal{M}_+^1$ est la mesure de densité

$$d\mu_W = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{\{|x| \leq \sqrt{2}\}} \sqrt{2 - x^2} dx,$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Enfin, pour toute matrice symétrique réelle A de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on désigne par μ_λ la *mesure empirique* de A

$$\mu_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\sqrt{\frac{2}{n}} \lambda_i}. \quad (4.17)$$

Théorème 4.6.3 ([10]) *La fonctionnelle H est semi-continue supérieurement, strictement convexe et atteint son minimum en la loi de densité de Wigner μ_W , où $H(\mu_W) = \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + \log 2)$. De plus, si F est un fermé de $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \log Pr(A \in Sym(n), \mu_\lambda \in F) \leq - \inf_{\mu \in F} H(\mu) + H(\mu_W). \quad (4.18)$$

Démonstration de la Proposition 4.6.2. La mesure empirique d'une matrice possédant une proportion de valeurs propres positives plus grande que $\frac{1}{2} + \epsilon$ appartient au fermé $F = \{\mu \in \mathcal{M}_+^1, \mu(\mathbb{R}^+) \geq \frac{1}{2} + \epsilon\}$ indépendant de n , et auquel n'appartient pas la loi de Wigner, qui est symétrique. Le Théorème 4.6.3 permet de conclure. ■

Le Théorème 4.5.3 se démontre presque comme la second partie du Théorème 4.6.3. Puisqu'elle met en jeu des techniques de matrices aléatoires relativement simples, nous la présentons.

Démonstration du Théorème 4.5.3. D'abord, par la formule de la coaire, on a :

$$e(i, n - i) = \frac{\text{Vol}(O_n(\mathbb{R}))}{2^n \sqrt{\pi}^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int_{\substack{\lambda_1 < \dots < \lambda_i < 0 \\ 0 < \lambda_{i+1} < \dots < \lambda_n}} \left| \prod_{i=1}^n \sqrt{2} \lambda_i \right| \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_j - \lambda_i| d\mu(\lambda),$$

où la métrique sur $O(n)$ est celle rendant la base $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ orthonormée, et $d\mu(\lambda)$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Afin d'estimer à l'aide de H cette intégrale, nous avons besoin (cf. [10, p. 523]) d'une approximation de H qui assure aux mesures avec atomes une valeur finie. En l'occurrence, soit $M > 0$, $f^M = \min(f, M)$ et

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}), H_M(\mu) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} f^M(x, y) d\mu(x) d\mu(y).$$

Pour tout $1 \leq j \leq n$, soit $\gamma_j = \sqrt{\frac{2}{n}} \lambda_j$. On a alors

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} |\gamma_j - \gamma_k| - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} (\gamma_j^2 + \gamma_k^2) = -n^2 \iint_{x < y} f(x, y) d\mu_\lambda(x) d\mu_\lambda(y),$$

où $d\mu_\lambda$ est la mesure empirique définie par (4.17). On en déduit après quelques calculs

$$e(i, n - i) \leq c_n \exp \left(-n^2 \inf_{\text{Sym}(i, n-i)} H_M(\hat{\mu}) - \frac{M}{2n} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\gamma| e^{-\frac{\gamma^2}{2}} d\gamma \right)^n,$$

avec

$$c_n = \frac{\text{Vol}(O_n(\mathbb{R}))}{n! \sqrt{2}^n \sqrt{\pi}^{\frac{n(n+1)}{2}}} \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{n(n-1)}{4} + n}.$$

La formule de la coaire donne

$$\text{Vol}(O_n(\mathbb{R})) = \frac{2^n \sqrt{\pi}^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\int_{\lambda_1 < \dots < \lambda_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) d\mu(\lambda)}.$$

Par la formule de Selberg (cf. [4, Theorem 2.5.8]) et quelques calculs de séries, on obtient $\ln(c_n) = n^2 H(\mu_W) + O(n)$, si bien que

$$e(i, n - i) \leq \exp \left(-n^2 \left(\inf_{(\lambda) \in \text{Sym}(i, n-i)} H_M(\mu_\lambda) - H(\mu_W) \right) + O(n) \right).$$

Maintenant, fixons $\alpha > 0$ et désignons par \mathcal{M}_α l'ensemble des mesures μ de probabilité sur \mathbb{R} telle que $\mu(\mathbb{R}^-) \geq \frac{1}{2}(1 + \alpha)$. On a donc

$$\sum_{i=0}^{[\alpha n]} e(i, n - i) \leq \exp \left(-n^2 \left(\inf_{\mathcal{M}_\alpha} H_M - H(\mu_W) \right) + O(n) \right).$$

Il est de plus clair que $\inf_{\mathcal{M}_\alpha} H_M = \inf_{\mathcal{M}_\alpha} H$ dès que M est assez grand. De plus l'infimum sur le compact \mathcal{M}_α un minimum. Enfin, puisque H possède un unique minimum en μ_W d'après la première partie du Théorème 4.6.3, on en déduit le résultat. ■

Remarque 4.6.4 *Deux questions naturelles émergent. Si $\alpha \in [0, 1]$, quel est le minimum de la fonctionnelle d'énergie sur l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{M}_+^1, \mu(\mathbb{R}_-) = \alpha\}$? Cette valeur minore le taux de décroissance de la probabilité pour qu'une matrice aléatoire symétrique possède une signature $(i, n - i)$ avec $i/n = \alpha$. Par ailleurs, quelle est la mesure minimisante? Une réponse partielle à ces questions a été donnée, en admettant certains faits, par les physiciens S. N. Majumdar, C. Nadal, A. Scardicchio et P. Vivo, voir [52].*

Bibliographie

- [1] Selman Akbulut and Sema Salur, *Deformations in G_2 manifolds*, Adv. Math. **217** (2008), no. 5, 2130–2140.
- [2] H. Alexander, *Gromov’s method and Bennequin’s problem*, Invent. Math. **125** (1996), no. 1, 135–148.
- [3] ———, *Disks with boundaries in totally real and Lagrangian manifolds*, Duke Math. J. **100** (1999), no. 1, 131–138.
- [4] Greg W. Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 118, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [5] Antonio Auffinger, Gérard Ben Arous, and Jiri Černý, *Random matrices and complexity of spin glasses*, arXiv :1003.1129v2 (2010).
- [6] D. Auroux, *Asymptotically holomorphic families of symplectic submanifolds*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 6, 971–995.
- [7] Denis Auroux and fsc0, *Lagrangian submanifolds and Lefschetz pencils*, J. Symplectic Geom. **3** (2005), no. 2, 171–219.
- [8] Denis Auroux, Damien Gayet, and Jean-Paul Mohsen, *Symplectic hypersurfaces in the complement of an isotropic submanifold*, Math. Ann. **321** (2001), no. 4, 739–754.
- [9] Eric Bedford and Wilhelm Klingenberg, *On the envelope of holomorphy of a 2-sphere in \mathbf{C}^2* , J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 623–646.
- [10] G. Ben Arous and A. Guionnet, *Large deviations for Wigner’s law and Voiculescu’s non-commutative entropy*, Probab. Theory Related Fields **108** (1997), no. 4, 517–542.
- [11] Errett Bishop, *Differentiable manifolds in complex Euclidean space*, Duke Math. J. **32** (1965), 1–21.
- [12] Bernhelm Booß-Bavnbek and Krzysztof P. Wojciechowski, *Elliptic boundary problems for Dirac operators*, Birkhäuser, Boston, MA, 1993.
- [13] Robert L. Bryant and Simon M. Salamon, *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy*, Duke Math. J. **58** (1989), no. 3, 829–850.
- [14] Henry de Thélin, *Sur la laminarité de certains courants*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 2, 304–311.
- [15] Jean-Pierre Dedieu and Gregorio Malajovich, *On the number of minima of a random polynomial*, J. Complexity **24** (2008), no. 2, 89–108.

- [16] R. Delannay and G. Le Caër, *Distribution of the determinant of a random real-symmetric matrix from the Gaussian orthogonal ensemble*, Phys. Rev. E (3) **62** (2000), no. 2, part A, 1526–1536.
- [17] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony, *Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 1, 221–258.
- [18] S. K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 4, 666–705.
- [19] ———, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Differential Geom. **53** (1999), no. 2, 205–236.
- [20] Michael R. Douglas, Bernard Shiffman, and Steve Zelditch, *Critical points and supersymmetric vacua. I.*, Commun. Math. Phys. **252** (2004), no. 1-3, 325–358.
- [21] ———, *Critical points and supersymmetric vacua. II : Asymptotics and extremal metrics.*, J. Differ. Geom. **72** (2006), no. 3, 381–427.
- [22] Julien Duval and Damien Gayet, *Riemann surfaces and totally real tori*, arXiv :0910.2139, à paraître à Comment. Math. Helv.
- [23] ———, *Rational convexity of non-generic immersed Lagrangian submanifolds*, Math. Ann. **345** (2009), no. 1, 25–29.
- [24] Julien Duval and Nessim Sibony, *Polynomial convexity, rational convexity, and currents*, Duke Math. J. **79** (1995), no. 2, 487–513.
- [25] Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [26] M. Fernández and A. Gray, *Riemannian manifolds with structure group G_2* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) **132** (1982), 19–45 (1983).
- [27] Damien Gayet, *Convexité rationnelle des sous-variétés immergées lagrangiennes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33** (2000), no. 2, 291–300.
- [28] ———, *Seiberg-witten invariants and real curves*, arXiv :math/0404556 (2004).
- [29] ———, *Hypersurfaces symplectiques réelles et pinceaux de Lefschetz réels*, J. Symplectic Geom. **6** (2008), no. 3, 247–266.
- [30] ———, *Smooth moduli spaces of associative submanifolds*, arXiv :1011.1744 (2010).
- [31] Damien Gayet and Jean-Yves Welschinger, *Exponential rarefaction of real curves with many components*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2011), no. 113, 69–96.
- [32] ———, *Betti numbers of random real hypersurfaces and determinants of random symmetric matrices*, arXiv :1207.1579 (2012).
- [33] ———, *What is the total Betti number of a random real hypersurface?*, arXiv :1107.2288, à paraître au J. Reine Angew. Math. (2012).
- [34] Damien Gayet and Frederik Witt, *Deformations of associative submanifolds with boundary*, Adv. Math. **226** (2011), no. 3, 2351–2370.

- [35] Claude Godbillon, *Dynamical systems on surfaces*, Universitext. [University Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [36] Phillip Griffiths and James King, *Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties*, Acta Math. **130** (1973), 145–220.
- [37] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), no. 2, 307–347.
- [38] Axel Harnack, *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann. **10** (1876), no. 2, 189–198.
- [39] Reese Harvey and H. Blaine Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47–157.
- [40] L. Hörmander and J. Wermer, *Uniform approximation on compact sets in C^n* , Math. Scand. **23** (1968), 5–21 (1969).
- [41] Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. II*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Differential operators with constant coefficients, Reprint of the 1983 original.
- [42] S. Ivashkovich and V. Shevchishin, *Reflection principle and J -complex curves with boundary on totally real immersions*, Commun. Contemp. Math. **4** (2002), no. 1, 65–106.
- [43] Dominic D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [44] M. Kac, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 314–320.
- [45] E. Kostlan, *On the distribution of roots of random polynomials*, From Topology to Computation : Proceedings of the Smalefest (Berkeley, CA, 1990), Springer, New York, 1993, pp. 419–431.
- [46] Alexei Kovalev and Jason D. Lotay, *Deformations of compact coassociative 4-folds with boundary*, J. Geom. Phys. **59** (2009), no. 1, 63–73.
- [47] N. G. Kruzhilin, *Two-dimensional spheres on the boundaries of pseudoconvex domains in C^2* , Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), no. 6, 1194–1237.
- [48] Jacques Lafontaine and Michèle Audin, *Introduction : applications of pseudo-holomorphic curves to symplectic topology*, Holomorphic curves in symplectic geometry, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 1–14.
- [49] André Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9.
- [50] Brian Macdonald, *Density of complex zeros of a system of real random polynomials*, J. Stat. Phys. **136** (2009), no. 5, 807–833.
- [51] _____, *Density of complex critical points of a real random $SO(m+1)$ polynomial*, J. Stat. Phys. **141** (2010), no. 3, 517–531.
- [52] S. N. Majumdar, C. Nadal, A. Scardicchio, and P. Vivo, *How many eigenvalues of a gaussian random matrix are positive ?*, Phys. Rev. E **83** (2011).
- [53] Robert C. McLean, *Deformations of calibrated submanifolds*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 4, 705–747.

- [54] Madan Lal Mehta, *Random matrices*, third ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.
- [55] J. Milnor, *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [56] Fedor Nazarov and Mikhail Sodin, *On the number of nodal domains of random spherical harmonics*, Amer. J. Math. **131** (2009), no. 5, 1337–1357.
- [57] Rolf Nevanlinna, *Analytic functions*, Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 162, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [58] S. S. Podkorytov, *The mean value of the Euler characteristic of an algebraic hypersurface*, Algebra i Analiz **11** (1999), no. 5, 185–193.
- [59] S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. **23** (1944), 282–332.
- [60] Jean-Pierre Serre, *Une propriété topologique des domaines de Runge*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 133–134.
- [61] Bernard Shiffman and Steve Zelditch, *Distribution of zeros of random and quantum chaotic sections of positive line bundles*, Comm. Math. Phys. **200** (1999), no. 3, 661–683.
- [62] ———, *Equilibrium distribution of zeros of random polynomials*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 1, 25–49.
- [63] ———, *Number variance of random zeros on complex manifolds*, Geom. Funct. Anal. **18** (2008), no. 4, 1422–1475.
- [64] ———, *Number variance of random zeros on complex manifolds, II : smooth statistics*, Pure Appl. Math. Q. **6** (2010), no. 4, Special Issue : In honor of Joseph J. Kohn. Part 2, 1145–1167.
- [65] Bernard Shiffman, Steve Zelditch, and Scott Zrebiec, *Overcrowding and hole probabilities for random zeros on complex manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 5, 1977–1997.
- [66] M. Shub and S. Smale, *Complexity of Bezout’s theorem. II. Volumes and probabilities*, Computational algebraic geometry (Nice, 1992), Progr. Math., vol. 109, pp. 267–285.
- [67] James Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62–105.
- [68] Edgar Lee Stout, *Polynomial convexity*, Progress in Mathematics, vol. 261, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.
- [69] Gang Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geom. **32** (1990), no. 1, 99–130.
- [70] Steve Zelditch, *Szego kernels and a theorem of Tian*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 6, 317–331.