EXAMEN KMAT4213

18 mai 2016

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le lemme de Poincaré.
2. Enoncer le théorème de Whitney.

Exercice 2
On considère dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, le cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une surface de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'application $X :]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(\theta, h) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, h)$ donne un paramétrage de $\mathcal{C}$ au voisinage du point p de coordonnées $(1, 0, 0)$.
3. Calculer la première forme fondamentale I (les fonctions E, F, G) dans la base $\{X_\theta, X_h\}$ de $T_{X(\theta,h)}\mathcal{C}$ correspondant à ce paramétrage.
4. Déterminer un vecteur normal unitaire $N(\theta, h)$ au point $X(\theta, h)$.
5. Déterminer (sans calcul) la courbure de Gauss de $\mathcal{C}$.
6. Soit a un nombre réel fixé et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, at)$ la courbe paramétrée tracée sur le cylindre $\mathcal{C}$. Exprimer le vecteur vitesse au point de paramètre t dans la base $\{X_\theta, X_h\}$ de $T_{X(\theta,h)}\mathcal{C}$ pour (θ, h) convenables.
7. Les courbes paramétrées précédentes sont-elles des géodésiques ?
8. La section plane du cylindre $\mathcal{C}$ par le plan d'équation $z = x$ paramétréee par la longueur d'arc est-elle une géodésique ?

Exercice 3 (Le tore plat)
On va d'abord définir la notion de surface dans $\mathbb{R}^4$ (et non $\mathbb{R}^3$), de son espace tangent et de sa courbure.

- Une carte (locale) $x : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ est une application régulière injective d'un ensemble ouvert D de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ dont l'inverse $x^{-1} : x(D) \to D$ est continue.
- Une surface S de $\mathbb{R}^4$ est un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^4$ tel que pour tout point p de S, il existe une carte à valeurs dans S dont l'image contient un voisinage de p dans S.

- Un vecteur tangent v de $\mathbb{R}^4$ au point p est tangent à S si et seulement si v est le vecteur vitesse d'une courbe dans S. L'ensemble de tous les vecteurs tangents à S au point p est l'espace tangent T_pM.
- Soit S une surface de $\mathbb{R}^4$ et supposons qu'il existe une isométrie $F : S \to S'$, où S' est une surface dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas on va définir la courbure de Gauss au point p par $K(p) = K'(F(p))$ où K' est la courbure de Gauss de S'.

On va s'intéresser plus particulièrement au produit cartésien $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, où $\mathbf{S}^1$ désigne le cercle unité $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2;\, s^2 + t^2 = 1\}$. On identifie $\mathbf{T}^2$ au sous-ensemble M de $\mathbb{R}^4$ donné par $M = \{(s,t,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^4;\, (s,t) \in \mathbf{S}^1,\, (\xi,\eta) \in \mathbf{S}^1\}$, que l'on munit de la topologie induite.

1. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ une application C^∞ et $S = \{(s,t,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^4;\, f(s,t,\xi,\eta) = 0\}$. On suppose que $J_f^{(t,\eta)}$ est inversible à tout point de S, où $J_f^{(t,\eta)}$ est la matrice jacobienne partielle de f par rapport aux variables (t,η). Montrer que S définit une surface de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit S une surface dans $\mathbb{R}^4$. Expliquer pourquoi la définition de la courbure plus haut ne dépend pas du choix de l'isométrie.

3. Montrer que M est une surface dans $\mathbb{R}^4$. Soit $p = (s,t,\xi,\eta) \in M$. Exhiber un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ formant une base de T_pM.

4. On considère l'application Ψ qui à tout point (s,t,ξ,η) de M associe le point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ donné par $x = s$, $y = (2+t)\xi$ et $z = (2+t)\eta$.
   (a) Montrer que Ψ est injective.
   (b) Pour tout $p = (s,t,\xi,\eta) \in M$, écrire la matrice de $d\Psi(p)$ relativement à la base de T_pM trouvée à la question 3., et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Montrer que Ψ est un plongement.

5. On pose $M' = \Psi(M)$.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer, sans expliciter M', que l'on obtient ainsi une surface de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Décrire géométriquement la surface M'.

6. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ par $f(u,v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$ pour tout (u,v) de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que pour tout point p de M, il existe un voisinage U de p dans M et un ouvert W de $\mathbb{R}^2$ tels que f réalise un difféomorphisme de W vers U.
   (b) Montrer que $f|_W$ est une isométrie.
   (c) En déduire la valeur de la courbure de Gauss K de la surface M en tout point de celle-ci.
   (d) En utilisant le paramétrage local $P(u,v) = \Psi \circ f(u,v)$ de M', calculer la valeur de la courbure de Gauss K' en tout point de paramètres (u,v).
   (e) L'application Ψ réalise-t-elle une isométrie entre M et M' ?