EXAMEN KMAT4213

25 juin 2015

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1: Questions de cours

1. Enoncer le lemme de Poincaré.
2. Enoncer le théorème de Whitney.

Exercice 2 Soit M une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ et $x : D \subset \mathbb{R}^2 \to M$, $(u, v) \mapsto x(u, v)$ une carte. Soit $U = \frac{1}{\|x_u \times x_v\|} x_u \times x_v$. Soit $E = \|x_u\|^2$, $F = x_u * x_v$, $G = \|x_v\|^2$, $L = S(x_u) * x_u$, $M = S(x_u) * x_v$, $N = S(x_v) * x_v$. On rappelle que $L = U * x_{uu}$, $M = U * x_{uv}$, $N = U * x_{vv}$.

1. Calculer la matrice de l'application de Weingarten dans la base x_u, x_v.
2. En déduire les formules habituelles pour la courbure de Gauss et la courbure moyenne :
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}.$$
3. Soit maintenant $f : D \to \mathbb{R}^3$ une fonction C^∞. On considère la surface M donnée par la parmétrisation de Monge
$$x(u, v) = (u, , v, f(u, v)),\ (u, v) \in D. \tag{1}$$
   (a) Montrer que
$$E = 1 + f_u^2,\ F = f_u f_v,\ G = 1 + f_v^2,$$
$$L = f_{uu}/W,\ M = f_{uv}/W,\ N = f_{vv}/W,$$
   où $W = \sqrt{EG - F^2} = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{1/2}$.

   (b) En déduire des formules pour la courbure de Gauss K et la courbure moyenne H.

   (c) En déduire que M est

      i. plate si et seulement si
$$f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 = 0.$$
      ii. minimale si et seulement si
$$(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu} = 0.$$

T.S.V.P.

Exercice 3

On considère le sous-ensemble H de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation :

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

1. Montrer que H définit une surface de $\mathbb{R}^3$.

2. Grâce aux coordonnées cylindriques $C(r, \theta, z) = ru_\theta + zk$ où $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$ on paramètre H par

$$F(z, \theta) = \sqrt{1 + z^2} u_\theta + zk.$$

   On notera aussi $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$. Exprimer la matrice de l'application de Weingarten dans la base

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}(z, \theta), \frac{\partial F}{\partial \theta}(z, \theta) \right)$$

   de $T_{F(z,\theta)}H$. En déduire la courbure de Gauss et la courbure moyenne au point $F(z, \theta)$.

3. On suppose que $s \mapsto F(z(s), \theta(s)) = \gamma(s)$ est une géodésique de H paramétrée par longueur d'arc. Montrer que les fonctions $s \mapsto z(s)$ et $s \mapsto \theta(s)$ vérifient les équations

$$\frac{d}{ds}[(1 + z^2(s))\dot{\theta}(s)] = 0, \quad (1 + z^2(s))\dot{\theta}^2(s) + \frac{1 + 2z^2(s)}{1 + z^2(s)}\dot{z}^2(s) = 1.$$

   Indication : on n'aura pas besoin de la condition $\frac{\partial F}{\partial z} * \ddot{\gamma} = 0$.

4. On veut étudier les géodésiques pour lesquelles $(1 + z^2(s))\dot{\theta}(s) = 1$, $\dot{z}(0) > 0$, $z(0) > 0$.

   (a) Montrer que $\dot{z}(s) > 0$ et $z(s) > 0$ pour tout s pour lequel la géodésique est définie.

   (b) Montrer qu'on peut paramétrer une telle géodésique par $\varphi \in I \mapsto F(\xi(\varphi), \varphi)$ où $I =]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$ et montrer que la fonction ξ vérifie

$$(1 + 2\xi^2) \left(\frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 = \xi^2(1 + \xi^2)^2.$$

5. Montrer que la fonction ξ est positive et strictement croissante, et que

$$\lim_{\varphi \to -\infty} \xi(\varphi) = 0.$$

   En déduire l'allure de la géodésique.