EXAMEN KMAT4213

21 mai 2015

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le theorema egregium de Gauss. Expliquer son lien avec la deuxième équation structurelle $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$.

2. Définir la caractéristique d'Euler d'une surface compacte de $\mathbb{R}^3$. Enoncer le théorème de Gauss-Bonnet.

Notation : Dans toute la suite $*$ désigne le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$, $\|.\|$ la norme associée et $\times$ le produit vectoriel.

Exercice 2 (Surfaces réglées)

Soit I un intervalle ouvert et $\alpha, w : I \to \mathbb{R}^3$ deux applications de classe C^2 avec $w'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. On considère la surface S paramétrée par

$$x(t,v) = \alpha(t) + vw(t),\ t \in I,\ v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Les points (t,v) tels que $x_t \times x_v = 0$ sont appelés des points singuliers. La courbe α est appelée la directrice et la droite passant par $\alpha(t)$ de de vecteur générateur $w(t)$ la génératrice de la surface. On va supposer $\|w(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$. Dans un premier temps on fera également l'hypothèse

$$\alpha'(t) * w'(t) = 0,\ \forall t \in I. \tag{H}$$

1. Montrer que $w'(t) * w(t) = 0$ pour tout $t \in I$. Déduire de ceci et de l'hypothèse (H) l'existence d'une fonction $\lambda(t)$ telle que $\alpha'(t) \times w(t) = \lambda(t) w'(t)$. Exprimer λ en fonction de α', w, w'.

2. Caractériser les points singuliers et montrer qu'une normale à la surface aux points non singuliers est donnée par
$$U(t,v) = \frac{\lambda w' + vw' \times w}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}\|w'\|}.$$

3. On pose
$$E = \|x_t\|^2,\ F = x_t * x_v,\ G = \|x_v\|^2,\ L = S(x_t) * x_t,\ M = S(x_t) * x_v,\ N = S(x_v) * x_v.$$
Montrer que $L = U * x_{tt}$, $M = U * x_{tv}$, $N = U * x_{vv}$.

T.S.V.P.

4. Montrer que la courbure de Gauss est donnée par

$$K = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + v^2)^2}.$$

(Indication : on pourra utiliser la formule $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$). Décrivez les points où K s'annule. Pour t fixé, $\lambda(t) \neq 0$ quels sont les points où $|K(t,v)|$ est maximal ?

5. Dans cette partie on va montrer que quitte à reparamétrer S l'hypothèse (H) est toujours vérifiée. Soit alors S donnée par (1) sans que (H) soit nécessairement vérifiée. On cherche une reparamétrisation de S de la forme

$$y(t,u) = \beta(t) + uw(t),\ t \in I,\ u \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Montrer qu'il existe une application différentiable $\beta(t)$ telle que (2) est une reparamétrisation de (1) et telle que (H) est vérifiée avec α remplacé par β. Indication: on cherchera $\beta(t)$ sous la forme

$$\beta(t) = \alpha(t) + u(t)w(t).$$

6. Décrivez la surface $z = xy$ comme une surface réglée avec une paramétrisation qui vérifie (H) ainsi que $\|w(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$. Calculer la fonction $\lambda(t)$ et la courbure de Gauss pour cette surface.

Exercice 3 (Courbes sur une surface de $\mathbb{R}^3$)

Soit M une surface dans $\mathbb{R}^3$ et φ une $1-$forme différentielle fermée sur M, α un lacet de classe C^1.

1. Montrer que $\int_\alpha \varphi = 0$ si φ est exacte, ou si α est homotope à une constante.

2. Soit maintenant M une surface de révolution donnée par la paramétrisation

$$x(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v),\ u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi[, \tag{3}$$

où g, h sont deux fonctions C^∞ et $h(u) > 0$, $g'^2(u) + h'^2(u) > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. On considère une courbe de classe C^2 $\gamma : t \mapsto x(u(t), v(t))$ dans M. On suppose que γ est paramétrée par longueur d'arc, c.à.d. $\|\dot\gamma(t)\| = 1$.

   (a) Montrer que les équations géodésiques pour γ sont données par

$$\begin{aligned} \dot u^2(g''(u)g'(u) + h''(u)h'(u)) - \dot v^2 h(u)h'(u) + \ddot u(g'(u)^2 + h'(u)^2) &= 0, & (4)\\ 2\dot u\dot v h'(u)h(u) + \ddot v h^2(u) &= 0. & (5)\end{aligned}$$

   (b) Montrer que les méridiens $v = const.$ sont des géodésiques.

   (c) Montrer que les parallèles $u = const.$ sont des géodésiques si et seulement si $h'(u) = 0$.

3. On considère maintenant le tore de révolution

$$x(u,v) = (r\sin u, (R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v),\ (u,v) \in ([0, 2\pi[)^2.$$

avec $R > r > 0$. Pour des entiers m et n on considère le lacet $\alpha(t) = x(mt, nt)$, $0 \le t \le 2\pi$. Soit ξ la $1-$ forme avec $\xi(x_u) = 1$, $\xi(x_v) = 0$ et η la $1-$ forme avec $\eta(x_u) = 0$, $\eta(x_v) = 1$.

   (a) Calculer $\int_\alpha \xi$ et $\int_\alpha \eta$.

   (b) Montrer que ξ et η ne sont pas exactes.

   (c) Montrer que les méridiens et parrallèles d'un tore de révolution ne sont pas homotopes à une constante.