Université Joseph Fourier M1
Année universitaire 2013/2014

EXAMEN KMAT4213

26 juin 2014

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1: Cartes de Monge

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}^3$ une fonction C^∞. On considère la surface M donnée par la parmétrisation de Monge

$$x(u, v) = (u, , v, f(u, v)),\ (u, v) \in D. \tag{1}$$

On pose $E = \|x_u\|^2$, $F = x_u * x_v$, $G = \|x_v\|^2$, $L = S(x_u) * x_u$, $M = S(x_u) * x_v$, $N = S(x_v) * x_v$. Soit U la normale unitaire orientée vers le haut.

1. Montrer que $L = U * x_{uu}$, $M = U * x_{uv}$, $N = U * x_{vv}$.
2. Montrer que
$$E = 1 + f_u^2,\ F = f_u f_v,\ G = 1 + f_v^2,$$
$$L = f_{uu}/W,\ M = f_{uv}/W,\ N = f_{vv}/W,$$
où $W = \sqrt{EG - F^2} = (1 + f_u^2 + f_v^2)^{1/2}$.
3. Calculer la matrice de l'application de Weingarten dans la base x_u, x_v.
4. En déduire des formules pour la courbure de Gauss K et la courbure moyenne H.
5. En déduire que M est
   (a) plate si et seulement si
   $$f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2 = 0.$$
   (b) minimale si et seulement si
   $$(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu} = 0.$$
6. On considère maintenant la carte
$$x(u, v) = (u, v, \log\cos v - \log\sin u),$$
définie pour $0 < u, v < \pi/2$. Montrer que l'image est une surface minimale avec courbure de Gauss
$$K = \frac{-1}{\sin^2 u \cos^2 v W^4},$$
où $W = (1 + \cot^2 u + \tan^2 v)^{1/2}$.

Exercice 2 : Courbes sur une surface de $\mathbb{R}^3$

Soit M une surface dans $\mathbb{R}^3$ et φ une $1-$forme différentielle fermée sur M, α un lacet de classe C^1.

1. Montrer que $\int_\alpha \varphi = 0$ si φ est exacte, ou si α est homotope à une constante.

2. Soit maintenant M une surface de révolution donnée par la paramétrisation

$$x(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v),\ u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi[, \tag{2}$$

où g, h sont deux fonctions C^∞ et $h(u) > 0$, $g'^2(u) + h'^2(u) > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. On considère une courbe de classe C^2 $\gamma : t \mapsto x(u(t), v(t))$ dans M. On suppose que γ est paramétrée par longueur d'arc, c.à.d. $\|\dot\gamma(t)\| = 1$.

   (a) Montrer que les équations géodésiques pour γ sont données par

$$\begin{aligned} \dot u^2(g''(u)g'(u) + h''(u)h'(u)) - \dot v^2 h(u)h'(u) + \ddot u(g'(u)^2 + h'(u)^2) &= 0, \quad (3)\\ 2\dot u\dot v h'(u)h(u) + \ddot v h^2(u) &= 0. \quad (4) \end{aligned}$$

   (b) Montrer que les méridiens $v = const.$ sont des géodésiques.

   (c) Montrer que les parallèles $u = const.$ sont des géodésiques si et seulement si $h'(u) = 0$.

3. On considère maintenant le tore de révolution

$$x(u,v) = (r\sin u, (R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v),\ (u,v) \in ([0, 2\pi[)^2.$$

avec $R > r > 0$. Pour des entiers m et n on considère le lacet

$$\alpha(t) = x(mt, nt), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Soit ξ la $1-$ forme avec $\xi(x_u) = 1$, $\xi(x_v) = 0$ et η la $1-$ forme avec $\eta(x_u) = 0$, $\eta(x_v) = 1$.

   (a) Calculer $\int_\alpha \xi$ et $\int_\alpha \eta$.

   (b) Montrer que ξ et η ne sont pas exactes.

   (c) Montrer que les méridiens et parrallèles d'un tore de révolution ne sont pas homotopes à une constante.