Université Joseph Fourier M1
Année universitaire 2013/2014

EXAMEN KMAT4213

20 mai 2014

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1: Surfaces de révolution

1. On considère une surface de révolution donnée par la paramétrisation

$$x(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v),\ u \in \mathbb{R},\ v \in [0, 2\pi[, \tag{1}$$

où g, h sont deux fonctions C^∞ et $h(u) > 0$, $g'^2(u) + h'^2(u) > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer x_u, x_v. En déduire les expressions pour $E = \|x_u\|^2$, $F = x_u * x_v$, $G = \|x_v\|^2$.

   (b) Soit $L = S(x_u) * x_u$, $M = S(x_u) * x_v$, $N = S(x_v) * x_v$. Montrer que $L = U * x_{uu}$, où U est la normale unitaire à la surface qui sert à définir l'opérateur de Weingarten S. Comment est-ce qu'on peut exprimer M, N à l'aide de la normale unitaire U et des deuxième dérivées de x ?

   (c) Calculer L, M, N pour la surface de révolution donnée par (1).

   (d) En déduire que les deux courbures principales sont données par

$$k_\mu = \frac{-\begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix}}{(g'^2 + h'^2)^{3/2}}, \quad k_\pi = \frac{g'}{h(g'^2 + h'^2)^{1/2}}.$$

2. La courbe $h(u) = c\,\mathrm{ch}(u/c)$ dans le plan x, y est une chaînette (ici ch est le cosinus hyperbolique). Sa forme est celle d'un câble suspendu qui est sous l'influence de la gravité. On va faire tourner cette courbe autour de l'axe des x.

   (a) La surface de révolution qui en résulte est appelée une caténoïde. Donner sa paramétrisation ainsi que des formules pour ses courbures principales.

   (b) Calculer la courbure moyenne et la courbure de Gauss d'une caténoïde (on pourra utiliser $1 + \mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2$) .

3. On rappelle qu'une surface est minimale si sa courbure moyenne est nulle. On se propose dans cette partie de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 Si une surface de révolution M est une surface minimale, alors M est incluse soit dans un plan, soit dans une caténoïde.

T.S.V.P.

Soit M une surface de révolution qu'on suppose minimale. On va considérer la paramétrisation (1) de cette surface.

(a) Supposons que g' est identiquement nul. Montrer que M est incluse dans un plan.

(b) On suppose que g' ne s'annule jamais.

i. Montrer que M possède une paramétrisation

$$y(u,v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v) \tag{2}$$

avec une fonction lisse f.

ii. Montrer que la condition de minimalité est équivalente à

$$ff'' = 1 + f'^2. \tag{3}$$

iii. Montrer que la solution générale de (3) est donnée par $f(u) = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{u}{a} + b\right)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ (on pourra utiliser qu'une solution de (3) ne s'annule pas).

iv. En déduire que M est une partie d'une caténoïde.

(c) Montrer que $g' = 0$ à certains points et $g' \neq 0$ à d'autres points ne peut pas se produire.

Exercice 2 : Courbes spéciales dans une surface

Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^2. On commence par deux définitions.

Définition 1 1. Un vecteur tangent v à M est asymptotique si $k(v) = S(v) * v = 0$.

2. Une courbe régulière dans M est une courbe asymptotique si son vecteur de vitesse est toujours asymptotique.

3. Une courbe régulière dans M est une courbe principale si son vecteur de vitesse est toujours dans une direction principale.

Définition 2 (Repère de Darboux) Soit α une courbe paramétrée en longueur d'arc dans M. On définit le champ de repères de Darboux T, U, V comme suit :

- T est le vecteur unitaire tangent à la courbe.
- U est la normale unitaire à la surface restreinte à la courbe α.
- $V = U \times T$.

1. Montrer que

$$\begin{cases} T' &=& gV + kU, \\ V' &=& -gT + tU, \\ U' &=& -kT - tV, \end{cases}$$

où $k = k(T) = S(T) * T$ est la courbure normale dans la direction T et $t = S(T) * V$. La nouvelle fonction g est appelée la courbure géodésique de α.

2. En déduire que α est

(a) une géodésique si et seulement si $g = 0$,

(b) une courbe asymptotique si et seulement si $k = 0$,

(c) une courbe principale si et seulement si $t = 0$.