Examen
Calcul différentiel et équations différentielles

3 mai 2023

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Autour du cours

1. Enoncer la formule de Taylor-Lagrange en toute dimension. Préciser les hypothèses.

2. On considère l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t), \tag{1}$$

   où $A(t) \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ pour un certain intervalle ouvert I contenant 0.

   (a) Montrer que pour toute donnée initiale $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique $u \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de (1) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ de dimension n.

Exercice 1

Soit X un espace de Banach et $E = \mathcal{L}_c(X)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues sur X muni de la norme d'opérateurs.

1. En utilisant seulement la définition de la différentiabilité, montrer que $f : E \ni A \mapsto A \circ A \in E$ est différentiable en tout point $A \in E$ et donner l'expression de sa différentielle.

2. Montrer que f est deux fois différentiable et donner l'expression de sa différentielle seconde.

3. Soit $U = Isom(X)$ l'ensemble des isomorphismes de X. On rappelle que U est un ouvert de E. Montrer que $g : U \ni A \mapsto A^{-1} \in E$ est différentiable et donner l'expression de sa différentielle.

4. Montrer que $h = f \circ g$ est différentiable sur U et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 2 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et C l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$.

1. Au voisinage de quels points la relation $f(x, y) = 0$ détermine-t-elle y en fonction de x, x en fonction de y par le théorème de fonctions implicites ?

2. Calculer la dérivée de la fonction implicite en fonction de la fonction implicite elle-même lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C en tout point $(a, b) \neq (0, 0)$.

T.S.V.P.

Exercice 3 (Plus petite valeur propre d'une matrice symétrique)

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $\langle ., . \rangle$, et de la norme euclidienne associée, notée $\|.\|_2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, et soit f la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \langle Ax, x \rangle$. Montrer que

1. f est de classe C^∞.
2. Il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\|_2 = 1$ et $f(v) = \inf_{\|x\|_2=1} f(x)$.
3. v est un vecteur propre de A, c.à.d. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Av = \lambda v$.
4. λ est la plus petite valeur propre de A.

Exercice 4 (Cylindre) Soit $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y^2 + z^2 = 1\}$.

1. Dessiner M.
2. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer l'espace affine tangent $T_{(0,0,1)}M$.

Exercice 5 (Lotka-Volterra)

Dans cet exercice on étudie le système Lotka-Volterra (système proie-prédateur)

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)(a - by(t)), \\ y'(t) & = & y(t)(-c + dx(t)), \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \tag{3}$$

où $a, b, c, d > 0$ et x_0, $y_0 \geq 0$. On cherche une solution $M(t) = (x(t), y(t)) \in C^1(I; \mathbb{R}^2)$ pour un certain intervalle I contenant 0.

1. Existence, unicité, solutions particulières.
   (a) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une solution maximale unique $M(t) = (x(t), y(t)) \in C^1(I; \mathbb{R}^2)$ de (2), (3).
   (b) Montrer que si $x_0 = 0$, alors $x(t) = 0$ pour tout $t \in I$.
   (c) Montrer que si $x_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
   Des résultats analogues à (b), (c) sont valables pour $y(t)$, on les admet dans la suite.
   (d) Soit $H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$. Montrer que $H(x(t), y(t))$ est constante pour toute solution $M(t)$ de (2).
   (e) En déduire que $I = \mathbb{R}$.
   (f) Trouver toutes les solutions constantes de (2).
2. Périodicité des solutions. On définit

$$Z_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < \frac{c}{d},\ 0 < y < \frac{a}{b}\right\},\ Z_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > \frac{c}{d},\ 0 < y < \frac{a}{b}\right\},$$
$$Z_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > \frac{c}{d},\ y > \frac{a}{b}\right\},\ Z_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < \frac{c}{d},\ y > \frac{a}{b}\right\}.$$

   On suppose $(x_0, y_0) \in Z_1$. Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ la solution associée.
   (a) Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $x(t_1) = \frac{c}{d}$, $0 < y(t_1) < \frac{a}{b}$. En déduire que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $(x(t_1 + \varepsilon), y(t_1 + \varepsilon)) \in Z_2$. *On montre de la même façon que $(x(t), y(t))$ sort de la zone Z_i pour entrer dans la zone Z_{i+1} pour tout $i \in \{1, .., 4\}$, $(Z_5 := Z_1)$. En particulier on trouve $t_5 > t_1$ tel que $x(t_5) = \frac{c}{d} = x(t_1)$, $y(t_5) < \frac{a}{b}$. Ce résultat est admis pour la suite.*
   (b) Montrer que $y(t_5) = y(t_1)$.
   (c) En déduire que la solution $M(t)$ est périodique.