Université Grenoble Alpes
MAT 103
Examen de janvier 2023
Durée : 2h00
Sans calculatrice, ni document.
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (5 points)

(1) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, puis calculer la dérivée. Les domaines de dérivabilité ne sont pas demandés.

$$f(x) = x^2 e^{3x+1}$$

$$g(x) = 6\sqrt{x^2+3}$$

$$h(x) = 3\ln(x^2+2x+1)$$

(2) Calculer les dérivées partielles premières de $f(x, y) = x^2 y + 5xy$.

Exercice 2 (5 points)

(1) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et calculer une primitive.

$$f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$h(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$$

(2) Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 (t^2 - 2t - 3)dt$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1} dt$$

(suite au verso)

Exercice 3 (4 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer si possible $A \times B$ et $B \times A$. En cas d'impossibilité, expliquer pourquoi le calcul est impossible.

(2) Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

(3) Comment vérifier le calcul de la question (2) ?

(4) Dans cette question, on propose une autre méthode pour déterminer A^{-1}. Pour cela, on considère la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A(4I - A)$. En déduire la matrice A^{-1}.

Exercice 4 (6 points)

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

(1) Calculer u_1 et u_2. En déduire que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

(2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

2a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

2c) La suite (u_n) est-elle décroissante ? croissante ?

(3) Déterminer le plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq 1000$. Indications numériques : $\ln(999)/\ln(3) \sim 6,28$, $\ln(1000)/\ln(4) \sim 4,98$.