Développements limités

Bernard Ycart

Les développements limités sont l'outil principal d'approximation locale des fonctions. L'objectif de ce chapitre est de vous apprendre à les calculer. Vous aurez essentiellement besoin de savoir manipuler des polynômes, ainsi que d'avoir assimilé les limites, la comparaison des fonctions et la dérivation.

Table des matières

30 janvier 2014

1 Cours

1.1 Polynômes de Taylor

Commençons par rappeler deux résultats fondamentaux que vous connaissez déjà par cœur (si ce n'est pas le cas, dépêchez-vous de les apprendre).

Théorème 1.

- *Pour tout* $x \in]-1,1[$ *:*
$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \,. \tag{1}$$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*
$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \,. \tag{2}$$

Le premier s'obtient à partir de l'identité :
$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \,.$$
Le second se déduit de la formule du binôme de Newton et est démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

Il faut voir dans (1) et (2) des résultats d'*approximation* : ils permettent d'évaluer de manière relativement précise la valeur prise par une fonction, en calculant un polynôme (ce qui est non seulement facile à la main, mais surtout peu coûteux en temps de calcul). À ce propos, dans tout le chapitre nous commettons l'abus de langage consistant à désigner par « polynôme » ce qui est en fait une fonction polynomiale.

Considérons la formule (1). Notons :
$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \,.$$
La figure 1 montre une représentation graphique de la fonction f et des polynômes P_n pour n allant de 0 à 5. Plus n est grand, meilleure est l'approximation pour un x donné. Dans ce cas particulier, il est facile de calculer l'erreur commise si on remplace $f(x)$ par $P_n(x)$.
$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \,.$$
Cette erreur est donc de l'ordre de x^{n+1}. Pour être plus concret, pensez $x = 0.1$. Alors $x^n = 10^{-n}$ et $P_n(0.1) = 1.11\ldots1$. La différence $f(x) - P_n(x)$ vaut $10^{-n+1}/0.9$. Pour $n = 5$, on commet une erreur de l'ordre du millionième en remplaçant $1/0.9$ par 1.11111.

L'intérêt est plus flagrant pour l'exponentielle, pour laquelle il n'existe pas d'autre moyen de calcul que de l'approcher par des polynômes. Posons :
$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \,.$$

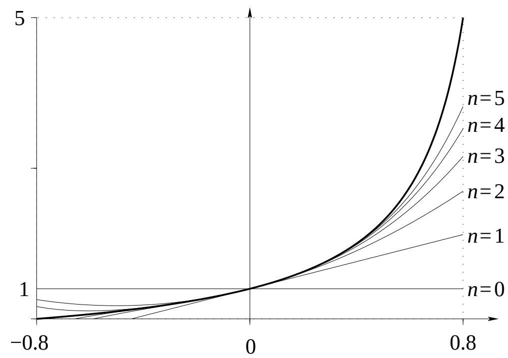

FIGURE 1 – Fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ et ses polynômes de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre $n = 5$.

Le tableau ci-dessous donne la différence entre $f(0.1)$ et $P_n(0.1)$, pour n allant de 0 à 5 (voir la figure 2 pour la représentation graphique de f et $P_0, \ldots, P_5$).

n	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{e}^{0.1} - P_n(0.1)$	0.105	$5.2\ 10^{-3}$	$1.7\ 10^{-4}$	$4.3\ 10^{-6}$	$8.5\ 10^{-8}$	$1.4\ 10^{-9}$

Comment obtient-on les polynômes P_n à partir de f ? C'est très simple : on fait en sorte que leurs dérivées en 0 coïncident avec celles de la fonction jusqu'à l'ordre n :

$$\forall k = 0, \ldots, n\ , \quad f^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(0)\ .$$

Le polynôme P_n étant de degré n, il est entièrement déterminé par la donnée de ses $n+1$ coefficients :

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\ .$$

Vérifiez sur les deux exemples ci-dessus : la dérivée n-ième en 0 de $x \mapsto 1/(1-x)$ est $n!$, celle de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est 1.

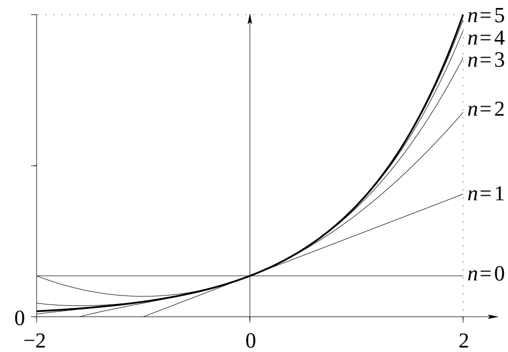

FIGURE 2 – Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et ses polynômes de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre $n = 5$.

Ce que nous venons de voir au voisinage de 0, s'étend en n'importe quel point de la façon suivante.

Définition 1. *Soit n un entier. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I contenant un point a, dérivable $n-1$ fois sur I, et dont la dérivée n-ième en a existe. On appelle* polynôme de Taylor *d'ordre n en a de f, le polynôme :*

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

On appelle reste de Taylor *d'ordre n en a de f, la fonction R_n qui à $x \in I$ associe :*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) .$$

L'idée est de remplacer une fonction f que l'on ne sait pas calculer (ou difficilement) par un polynôme, qui est facilement calculable. Mais si $f(x)$ n'est pas calculable, alors bien sûr le reste $R_n(x)$ ne l'est pas non plus. On doit donc chercher des moyens d'estimer ou de majorer ce reste. Nous les étudierons à la section suivante. Le moins que l'on puisse demander quand on approche une fonction par un polynôme de degré n, est que le reste soit négligeable devant $(x-a)^n$. C'est le sens de la définition suivante.

Définition 2. *Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f* admet un développement limité d'ordre n en a *lorsqu'il existe un polynôme P_n tel que le reste $f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) \ .$$

Nous verrons que toutes les fonctions usuelles admettent un développement limité pour lequel P_n est le polynôme de Taylor. Même si on ne les utilise jamais, il existe des fonctions qui ne vérifient pas les hypothèses de la définition 1 et qui pourtant admettent des développements limités. Par exemple la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ . \end{cases}$$

Elle vérifie évidemment $f(x) = o(x^3)$, elle admet donc des développements limités en 0 d'ordre 1, 2 et 3. Pourtant elle n'est continue sur aucun intervalle contenant 0.

Nous nous ramènerons toujours à des développements limités au voisinage de 0, grâce à l'observation suivante.

Proposition 1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a+h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en* 0*.*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + o(h^n) \ .$$

Désormais, nous simplifierons les écritures en n'écrivant plus que des développements limités en 0.

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant.

Proposition 2. *Soient I un intervalle ouvert contenant* 0*, et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré n tels que au voisinage de* 0 *:*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \textit{et} \quad f(x) = Q_n(x) + o(x^n) \ .$$

Alors $P_n = Q_n$.

Démonstration : Le polynôme $P_n - Q_n$ est de degré au plus n, et il est négligeable devant x^n au voisinage de 0. Ce n'est possible que s'il est nul. □

1.2 Formules de Taylor

Le résultat de base, le seul que vous ayez vraiment besoin de retenir, dit que sous les hypothèses de la définition 1, le reste de Taylor R_n est négligeable devant x^n au voisinage de 0, donc la fonction admet un développement limité, dont la partie polynomiale est son polynôme de Taylor d'ordre n. C'est le *théorème de Taylor-Young*.

Théorème 2. *Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction dérivable $n-1$ fois sur I, et dont la dérivée n-ième en 0 existe. Soit R_n son* reste de Taylor *d'ordre n en 0 :*

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \right) .$$

Au voisinage de 0, R_n est négligeable devant x^n :

$$R_n(x) = o(x^n) .$$

Démonstration : c'est une récurrence assez simple.

Pour $n = 1$, le résultat est une autre manière d'exprimer la dérivabilité de f en 0. En effet,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) ,$$

équivaut à :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x} = 0 .$$

Par définition, ceci signifie que $f(x)-f(0)-(x-0)f'(0)$ est négligeable devant x au voisinage de 0 :

$$f(x)-f(0)-xf'(0) = R_1(x) = o(x) .$$

Supposons maintenant que le résultat soit vrai à l'ordre $n-1$. Si f vérifie les hypothèses à l'ordre n, alors f' les vérifie à l'ordre $n-1$. Or, le polynôme de Taylor d'ordre $n-1$ de f' est exactement $P_n'(x)$.

$$f'(0) + \frac{f''(0)x}{1!} + \cdots + \frac{f'^{(n-1)}(0)x^{n-1}}{(n-1)!} = \left(f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} \right)' .$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que :

$$R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) = o(x^{n-1}) .$$

En revenant aux définitions, ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x| \leqslant \eta \implies \left| \frac{R_n'(x)}{x^{n-1}} \right| \leqslant \varepsilon .$$

Fixons x dans l'intervalle $]0, \eta]$ et appliquons le théorème des accroissement finis à $R_n(x)$, sur l'intervalle $[0, x]$:

$$\exists c \in]0, x[\; , \quad \frac{R_n(x)}{x} = R_n'(c) \; .$$

Alors :

$$\left| \frac{R_n(x)}{x^n} \right| = \left| \frac{R_n'(c)}{x^{n-1}} \right| \leqslant \; \left| \frac{R_n'(c)}{c^{n-1}} \right| \leqslant \varepsilon \; .$$

Le raisonnement est le même pour $x \in [-\eta, 0[$. Nous avons donc montré que $R_n(x)$ est négligeable devant x^n. D'où le résultat, par récurrence. $\square$

La plupart des fonctions que vous aurez à manipuler sont indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition. Elles admettent donc des développements limités à tout ordre.

Corollaire 1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0. Pour tout entier n, f admet un développement limité d'ordre n en 0. Soit R_n son reste de Taylor d'ordre n. Au voisinage de 0,*

$$R_n(x) \sim \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \, x^{n+1} \; .$$

Démonstration : D'après le théorème 2, f admet un développement limité aux ordres n et $n+1$, pour tout n. Or :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \, x^{n+1} + R_{n+1}(x) \; .$$

Comme $R_{n+1}(x)$ est négligeable devant x^{n+1}, le rapport de $R_n(x)$ à $\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}$ tend vers 1. D'où le résultat. $\square$

Moyennant une hypothèse à peine plus forte que celle du théorème 2, on peut donner un résultat plus précis sur le reste de Taylor R_n : la *formule de Taylor avec reste intégral*.

Théorème 3. *Soit n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I (c'est-à-dire $n+1$ fois dérivable, de dérivée $(n+1)$-ième continue). Soit R_n son reste de Taylor d'ordre n en 0.*

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t \; . \tag{3}$$

Démonstration : c'est encore une récurrence.

Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental de l'Analyse :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \;.$$

Pour n quelconque, posons :

$$I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \;,$$

et intégrons par parties.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + I_{n-1} \;. \end{aligned}$$

Si on suppose la formule vraie à l'ordre $n-1$, alors $I_{n-1} = R_{n-1}(x)$, or :

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_n(x) \;,$$

donc $R_n(x) = I_n$: le résultat est vrai à l'ordre n. Il est donc vrai pour tout n, par récurrence. □

1.3 Opérations sur les développements limités

Nous allons traduire sur les développements limités les opérations habituelles sur les fonctions (somme, produit, composition, dérivation, intégration). Ces résultats permettent de calculer les développements limités de toutes les fonctions que vous rencontrerez, à condition de connaître un petit nombre de développements, ceux des fonctions les plus courantes.

Théorème 4. *Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soient f et g deux fonctions définies sur I, admettant chacune un développement limité d'ordre n en 0.*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \textit{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o(x^n) \;.$$

1. somme : *$f + g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est la somme de ceux de f et g.*
2. produit : *fg admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le produit P_nQ_n.*
3. composition : *si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un développement limité en 0, dont le polynôme de Taylor est constitué des termes de degrés inférieurs ou égaux à n dans le polynôme composé $P_n \circ Q_n$.*

Démonstration : Rappelons que si r et s sont deux fonctions négligeables devant x^n, alors leur somme, ainsi que leurs produits par des fonctions bornées sont encore négligeables devant x^n. En particulier :

$$f(x)+g(x) = \Big(P_n(x)+o(x^n)\Big) + \Big(Q_n(x)+o(x^n)\Big) = P_n(x)+Q_n(x)+o(x^n)\ .$$

Pour le produit, il suffit d'écrire :

$$f(x)g(x) = \Big(P_n(x)+o(x^n)\Big)\Big(Q_n(x)+o(x^n)\Big) = P_n(x)Q_n(x)+o(x^n)\ .$$

Si on note A_n le polynôme formé des termes de degré au plus n dans P_nQ_n, alors $P_n(x)Q_n(x) - A_n(x) = o(x^n)$. On a bien :

$$f(x)g(x) = A_n(x)+o(x^n)\ .$$

Le raisonnement est analogue pour la composition. □

Par exemple, avec

$$f(x) = 1-x-x^2+o(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x+x^2+o(x^2)\ ,$$

on obtient :

$$f(x)+g(x) = 1+x+o(x^2)\ , \quad f(x)g(x) = 2x-x^2+o(x^2)\ , \quad f\circ g(x) = 1-2x-5x^2+o(x^2).$$

En règle générale, il faut toujours commencer un calcul avec des développement limités qui soient tous au moins de l'ordre final souhaité, quitte à ne pas calculer en cours de route les termes négligeables. Il peut être nécessaire de partir d'un ordre supérieur à l'ordre souhaité, nous en verrons des exemples.

Théorème 5. *Soient n un entier et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur I, dont la dérivée n-ième en 0 existe. Soit P_n son polynôme de Taylor d'ordre n, et R_n le reste.*

$$f(x) = P_n(x)+R_n(x)\ , \quad R_n(x) = o(x^n)\ .$$

1. dérivation : *la dérivée f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est la dérivée de celui de f.*

$$f'(x) = P_n'(x)+o(x^{n-1})\ .$$

2. intégration : *toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0, dont le polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.*

Par exemple, si $f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, et F est une primitive de f, alors :

$$f'(x) = -1 + 2x + o(x) \quad \text{et} \quad F(x) = F(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\ .$$

Démonstration : Pour la dérivation, c'est une observation que nous avons déjà utilisée dans la démonstration du théorème de Taylor-Young (théorème 2). L'intégration est la même observation, appliquée à la primitive. □

Dans la section suivante, nous mettrons en pratique ces résultats pour calculer les développements limités des fonctions usuelles.

1.4 Développement des fonctions usuelles

Tous les développement limités de cette section sont *au voisinage de* 0. Pour les obtenir, le premier moyen est de calculer les dérivées successives et d'en déduire le polynôme de Taylor. On obtient ainsi les développements suivants, que vous devrez connaître par cœur.

Théorème 6. *Soit n un entier, α un réel.*

1. $$\boxed{\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .}$$

2. $$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\ .}$$

3. $$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\ .}$$

4. $$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\ .}$$

5. $$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n)\ .}$$

Démonstration : Nous avons déjà vu le développement limité de l'exponentielle : les dérivées successives en 0 sont toutes égales à 1. Nous avions aussi traité le développement de $1/(1-x)$, dont la dérivée n-ième en 0 vaut $n!$. Pour le sinus et le cosinus,

$$\sin'(x) = \cos(x)\ , \quad \sin''(x) = -\sin(x)\ , \quad \sin^{(3)}(x) = -\cos(x)\ , \quad \sin^{(4)}(x) = \sin(x)\ .$$

Les dérivées successives en 0 de sin et cos valent alternativement, 0 et ± 1. Précisément :

$$\sin^{(n)}(0) = \left\{ \begin{array}{rll} 0 & \text{si} & n \equiv 0 \quad [4] \\ 1 & \text{si} & n \equiv 1 \quad [4] \\ 0 & \text{si} & n \equiv 2 \quad [4] \\ -1 & \text{si} & n \equiv 3 \quad [4]\ , \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \cos^{(k)}(0) = \left\{ \begin{array}{rll} 1 & \text{si} & n \equiv 0 \quad [4] \\ 0 & \text{si} & n \equiv 1 \quad [4] \\ -1 & \text{si} & n \equiv 2 \quad [4] \\ 0 & \text{si} & n \equiv 3 \quad [4]\ . \end{array} \right.$$

La figure 3 représente les fonctions sinus et cosinus avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0.

Le point *5* peut être vu comme une généralisation de la formule du binôme de Newton ; si α est un entier positif, $(1+x)^\alpha$ est un polynôme, et tous les termes du développement sont nuls à partir de $n = \alpha + 1$. Dans le cas général, la dérivée n-ième de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est :

$$x \longmapsto \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \,.$$

La démonstration par récurrence est facile. On en déduit immédiatement la formule annoncée. □

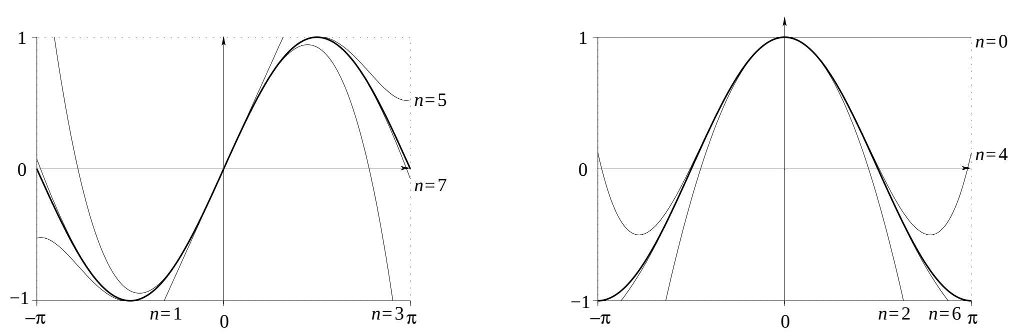

FIGURE 3 – Fonctions sinus et cosinus avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0.

Constatez que le développement du sinus ne contient que des termes impairs, celui du cosinus que des termes pairs. C'est une propriété générale qui se démontre facilement : si une fonction est paire, ses dérivées d'ordre impair en 0 sont nulles, donc son polynôme de Taylor ne contient que des termes pairs ; si la fonction est impaire, ce sont ses dérivées d'ordre pair qui s'annulent et le polynôme de Taylor ne contient que des termes impairs.

A partir des cinq développements du théorème 6, on peut en calculer beaucoup d'autres. Par exemple par linéarité à partir du développement de l'exponentielle :

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \,.$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \; .$$

Il est à noter que les développements du sinus et cosinus ordinaires peuvent se retrouver de la même façon en utilisant les formules d'Euler. La figure 4 représente les fonctions sinh et cosh avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0. Observez que dans les deux cas, le quatrième polynôme ne se distingue pas de la fonction sur l'intervalle de représentation.

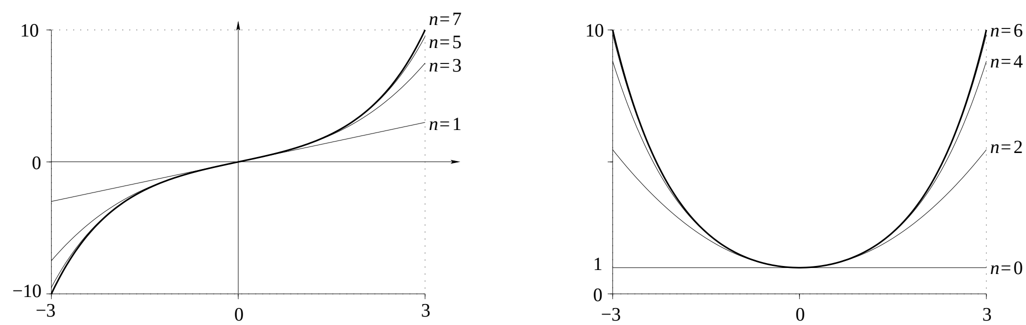

FIGURE 4 – Fonctions sinus et cosinus hyperboliques avec leurs premiers polynômes de Taylor en 0.

Utilisons maintenant le développement de $1/(1-x)$. Par composition avec $x \mapsto -x$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \; .$$

La primitive nulle en 0 est $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \; .$$

La figure 5 représente la fonction ln et ses six premiers polynômes de Taylor.

Par composition avec $x \mapsto x^2$, on obtient aussi :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \; .$$

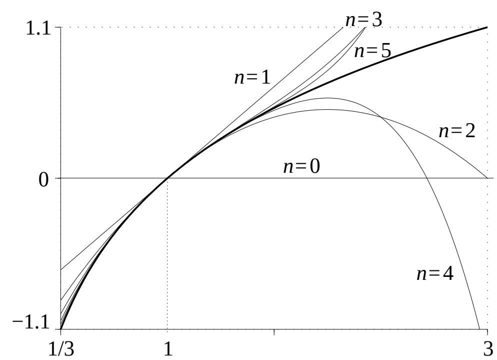

FIGURE 5 – Fonction ln et ses polynômes de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre $n = 5$.

La primitive nulle en 0 est $\arctan(x)$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \ .$$

Utilisons enfin le développement de $(1+x)^\alpha$. Pour $\alpha = -1$, on retrouve le développement de $1/(1+x)$ que nous avons déjà écrit. Les cas les plus fréquents sont $\alpha = 1/2$, $\alpha = -1/2$ et ceux où α est un entier négatif.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n(n!)}\,x^n + o(x^n) \ . \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(n!)}\,x^n + o(x^n) \ . \\
\frac{1}{(1+x)^k} &= 1 - k\,x + \frac{k(k+1)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}\,x^n + o(x^n) \ .
\end{aligned}$$

Du développement de $1/\sqrt{1+x}$, on déduit celui de $1/\sqrt{1-x^2}$, par composition avec

$x \mapsto -x^2$. La primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$ nulle en 0 est $\arcsin(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{8}\,x^4 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,x^{2n} + o(x^{2n})\,. \\
\arcsin(x) &= x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{40}\,x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+1})\,.
\end{aligned}$$

Pour illustrer les différentes techniques, nous proposons de calculer le développement de la fonction tangente d'ordre 5 par sept méthodes différentes. Nous ne détaillons pas tous les calculs : il vous est vivement conseillé de les reprendre par vous-même.

Méthode 1 : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Partez avec les développements limités de sin et cos à l'ordre 5 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\,.$$

Calculez ensuite le développement de $1/\cos(x)$. (il est inutile d'écrire les termes de degrés supérieurs à 5).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)} \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\,.
\end{aligned}$$

Il reste à effectuer le produit par le développement de $\sin(x)$.

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\,.$$

Méthode 2 : $\tan(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$.
Attention, il y a un piège : si vous procédez comme pour la méthode précédente, voici ce que vous trouvez.

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\,.$$

Donc :

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)}{2 - \frac{4x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} + o(x^4)}\,.$$

Tout ce que vous pourrez en déduire, c'est un développement à l'ordre 4, et non 5. Pour éviter cela, il faut augmenter l'ordre au départ.

$$1-\cos(2x)=2x^2-\frac{2x^4}{3}+\frac{4x^6}{45}+o(x^6)\quad\text{et}\quad \sin(2x)=2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}+o(x^6)\ .$$

Donc :

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{45}+o(x^5)}{1-\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}+o(x^5)}\ .$$

Vous calculez séparément :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{2x^4}{15}+o(x^5)\right)} &= 1+\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{2x^4}{15}\right)+\left(\frac{2x^2}{3}\right)^2+o(x^5)\\ &= 1+\frac{2x^2}{3}+\frac{14x^4}{45}+o(x^5)\ ,\end{aligned}$$

puis vous effectuez le produit :

$$\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{45}+o(x^5)\right)\left(1+\frac{2x^2}{3}+\frac{14x^4}{45}+o(x^5)\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\ .$$

Méthode 3 : $\tan^2(x)=-1+\dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Même piège que précédemment : si vous partez de développements d'ordre 5, vous n'obtiendrez finalement que l'ordre 4. Les calculs successifs sont les suivants.

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\ ,$$

$$\cos^2(x)=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2x^6}{45}+o(x^6)\ ,$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+o(x^6)\ ,$$

$$-1+\frac{1}{\cos^2(x)}=x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+o(x^6)\ ,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-1+\frac{1}{\cos^2(x)}} &= \sqrt{x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+o(x^6)}\\ &= x\sqrt{1+\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{17x^4}{45}+o(x^4)\right)}\\ &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\ .\end{aligned}$$

Il peut vous paraître osé d'avoir remplacé $\sqrt{x^2}$ par x sans se préoccuper du signe : il se trouve que l'expression obtenue est aussi valable pour $x < 0$ (pensez que la fonction est impaire).

Méthode 4 : $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
Comme nous prendrons une primitive à la fin, il suffit d'un développement d'ordre 4 pour la dérivée (ce qui en l'occurrence ne change pas grand-chose).

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) .$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)+\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2+o(x^4) = 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4) .$$

Il reste à prendre la primitive, en utilisant le fait que le terme constant est nul.

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) .$$

Méthode 5 : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
Nous avons ici une équation dont l'inconnue est le développement cherché. Comme la fonction tangente est impaire, nous savons que son développement d'ordre 5 est de la forme $a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors :

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \Big(a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)\Big)^2 = 1 + a\,x^2 + 2ab\,x^4 + o(x^4) .$$

La primitive nulle en 0 a pour développement :

$$x + \frac{a\,x^3}{3} + \frac{2ab\,x^5}{5} + o(x^5) .$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & a/3 \\ 2ab/5 & = & c\,. \end{array}\right.$$

On obtient donc : $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

Méthode 6 : $\tan(x) = -\Big(\ln(\cos)\Big)'(x)$.
Comme nous dériverons à la fin, nous devons commencer avec des développements d'ordre 6.

$$\begin{array}{rcl} \ln(\cos(x)) & = & \ln\left(1 + \left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right) \\ & = & \left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720}\right) - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) \\ & = & -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + o(x^6) . \end{array}$$

L'opposé de la dérivée donne bien :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

Méthode 7 : $\tan(\arctan(x)) = x$.
Nous connaissons le développement de arctan d'ordre 5 :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\ .$$

Soit $\tan(x) = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$ le développement cherché. Alors :

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(x)) &= a\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + b\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + c\Big(x\Big)^5 + o(x^5)\\ &= a\,x + (-a/3 + b)\,x^3 + (a/5 - b + c)\,x^5 + o(x^5)\ .\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1\\ -a/3 + b &=& 0\\ a/5 - b + c &=& 0\ .\end{array}\right.$$

On obtient encore : $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

1.5 Développements asymptotiques

On trouve dans les développements limités une idée simple, qui est l'idée de base de toute approximation : pour approcher une fonction au voisinage d'un point, il faut choisir une échelle « d'infiniment petits » (les x^n dans le cas des développements ordinaires). On écrit alors l'approximation souhaitée comme une combinaison linéaire des infiniment petits de l'échelle. Bien d'autres échelles que les x^n sont possibles. On peut aussi transposer la même idée pour des développements au voisinage de $+\infty$, ou encore pour des échelles d'infiniment grands. Nous ne ferons pas de théorie générale des développement asymptotiques dans cette section. Nous nous contenterons d'une liste d'exemples, qui se déduisent tous par composition des développement limités ordinaires. Cette liste est loin d'être exhaustive, mais vous donnera une idée du type de généralisations que l'on peut donner aux polynômes de Taylor. Reprendre vous-même les calculs est un exercice conseillé...

Échelle des x^α au voisinage de 0^+

$$\begin{aligned}\sqrt{x + x^2} &= \sqrt{x}\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)\\ &= x^{1/2} + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{8} + o(x^{5/2})\ .\end{aligned}$$

$$\sin(x^{2/3}) = x^{2/3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^{10/3}}{120} + o(x^{10/3})\ .$$

Échelle des $x^n \ln^m(x)$ au voisinage de 0^+

$$\ln(x)\sin(x) = x\ln(x) - \frac{x^3\ln(x)}{6} + \frac{x^5\ln(x)}{120} + o(x^5\ln(x))$$

$$\begin{aligned} x^{x^2+x} &= \exp\Big((x^2+x)\ln(x)\Big) \\ &= 1 + x\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + x^2\ln(x) + \frac{1}{6}x^3\ln^3(x) + x^3\ln^2(x) + o(x^3)\ . \end{aligned}$$

Échelle des x^{-n} au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{1}{x}\,\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^5}\right)\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\ . \end{aligned}$$

Échelle des $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ au voisinage de $+\infty$

$$\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3} + o(\mathrm{e}^{-3x})\ .$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\mathrm{e}^{x/3}}{1+\mathrm{e}^{x/2}} &= \mathrm{e}^{-x/6}\frac{1+\mathrm{e}^{-x/3}}{1+\mathrm{e}^{-x/2}} \\ &= \mathrm{e}^{-x/6}\Big(1+\mathrm{e}^{-x/3}\Big)\Big(1-\mathrm{e}^{-x/2}+\mathrm{e}^{-x}+o(\mathrm{e}^{-x})\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-x/6}+\mathrm{e}^{-x/2}-\mathrm{e}^{-2x/3}-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-7x/6}+o(\mathrm{e}^{-7x/6})\ . \end{aligned}$$

Échelle des x^{-n} au voisinage de 0^+

$$\begin{aligned} \tan(\pi/2-x) &= \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x+x^3/3+o(x^3)} \\ &= \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x^2/3+o(x^2)} \\ &= \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x}-\frac{x}{3}+o(x)\ . \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2} &= \\
&= \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)}{(x^2/2 - x^4/24 + x^6/720 + o(x^6))^2} \\
&= \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)}{x^4(1/2 - x^2/24 + x^6/720 + o(x^2))^2} \\
&= \frac{4}{x^3}\,\frac{1 - x^2/6 + x^4/120 + o(x^4)}{1 - x^2/6 + x^4/80 + o(x^4)} \\
&= \frac{1}{4x^3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{11x^4}{720} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{4}{x^3} - \frac{x}{60} + o(x)\ .
\end{aligned}
$$

Échelle des $x^{-\alpha}$ au voisinage de 0^+

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\ln(1+x)}} &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{-1/2} \\
&= x^{-1/2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^{-1/2} \\
&= x^{-1/2}\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{7x^2}{96} + o(x^2)\right) \\
&= x^{-1/2} + \frac{x^{1/2}}{4} - \frac{7x^{3/2}}{96} + o(x^{3/2})\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{\sqrt{\sin^3(x)}} &= \frac{\left(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)\right)^{1/3}}{\left(x - x^3/6 + o(x^3)\right)^{3/2}} \\
&= x^{-7/6}\,\frac{\left(1 - x/2 + x^2/3 + o(x^3)\right)^{1/3}}{\left(1 - x^2/6 + o(x^2)\right)^{3/2}} \\
&= x^{-7/6}\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\
&= x^{-7/6}\left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
&= x^{-7/6} - \frac{x^{-1/6}}{6} + \frac{x^{5/6}}{3} + o(x^{5/6})\ .
\end{aligned}
$$

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f(x) = x + x^2 + o(x^4)$. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☐ La fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0.
2. ☒ La fonction f est continue en 0.
3. ☒ La dérivée de f en 0 est égale à 1.
4. ☐ Si f est 2 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(2)}(0) = 1$.
5. ☒ Si f est 3 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(3)}(0) = 0$.
6. ☐ La fonction $x \mapsto f(x)/x$ admet un développement limité d'ordre 3 en 0.
7. ☒ La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ admet un développement limité d'ordre 5 en 0.
8. ☐ $f^2(x) = x^2 + x^4 + o(x^6)$.
9. ☒ $f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^6)$.
10. ☐ $f(2x) = 2x + 2x^2 + o(x^4)$.
11. ☐ $f(x^4) = o(x^4)$.
12. ☒ $f(2x^2) \sim 2x^2$.

Vrai-Faux 2. Soient f et g deux fonctions, admettant un développement limité d'ordre 2 en 0. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☒ La fonction $f + g$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
2. ☒ La fonction fg admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
3. ☐ La fonction f/g admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
4. ☒ La fonction $x \mapsto x^2 f(x)g(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
5. ☐ La fonction $x \mapsto x^2 f(x) + g(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.
6. ☐ La fonction $x \mapsto f^2(x)g^2(x)$ admet un développement limité d'ordre 4 en 0.

Vrai-Faux 3. Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = x + x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) = -x + x^3 + o(x^3) \ .$$

On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☒ $f(x) + g(x) = o(x^2)$.
2. ☐ $f(x) - g(x) = o(x)$.
3. ☐ $f(x) + 2g(x) = o(f(x))$.
4. ☒ $2f(x) + g(x) \sim f(x)$.
5. ☐ $f(x)g(x) = -x^2 + x^6 + o(x^6)$.

6. ☒ $f^2(x) - g^2(x) \sim 4x^4$.
7. ☐ $f^2(x)g(x) \sim x^3$.
8. ☒ $f(x)g^2(x) \sim x^3$.

Vrai-Faux 4. Soit n un entier quelconque. On note f la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, prolongée par continuité en 0. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Pour tout n, f admet un développement limité d'ordre n en 0.
2. ☐ Pour tout n, le développement limité d'ordre n de f ne contient que des termes impairs.
3. ☐ Pour tout n, $x \mapsto f(x)/x$ admet un développement limité d'ordre n en 0.
4. ☒ $f(x^2) - 1 = O(x^4)$.
5. ☒ $(f(x) - 1)^2 = O(x^4)$.
6. ☐ $f(x) - \cos(x) = O(x^4)$.
7. ☒ $f(x) - \cos(x/\sqrt{3}) = O(x^4)$.

Vrai-Faux 5. Soient n un entier et f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Les propositions portent sur des développements limités d'ordre n en 0. On suppose que f est *paire*. On peut en déduire que (vrai ou faux et pourquoi ?) :

1. ☐ Le développement de $1/f$ ne contient que des termes impairs.
2. ☐ Le développement de $x \mapsto f(x^3)$ ne contient que des termes impairs.
3. ☒ Le développement de $x \mapsto f(\sin(x))$ ne contient que des termes pairs.
4. ☒ Le développement de $x \mapsto \sin(x)f(x)$ ne contient que des termes impairs.
5. ☐ Le développement de $x \mapsto xf(x)/|x|$ ne contient que des termes impairs.
6. ☒ Le développement de f'' ne contient que des termes pairs.
7. ☐ Si F est une primitive quelconque de f, le développement de F ne contient que des termes impairs.

Vrai-Faux 6. Sit n un entier. Les propositions suivantes portent sur des développements limités d'ordre n en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\dfrac{1}{1-2x} = 1 + 2x + \cdots + 2^n x^n + o(x^n)$.
2. ☐ $\dfrac{1}{2-x} = 1 + (1-x) + \cdots + (1-x)^n + o(x^n)$.
3. ☒ $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} + \cdots + \dfrac{x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$.
4. ☒ $\dfrac{1}{2+3x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3x}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{n+1}} + o(x^n)$.

5. ☐ $\dfrac{1+x}{1-x} = 1 + 2x - 2x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2x^n}{2^n+1} + o(x^n)$.
6. ☐ $\dfrac{1-x}{1+x} = 1 + 2x - 2x^2 + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2x^n}{2^n+1} + o(x^n)$.
7. ☒ $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + o(x^n)$.
8. ☐ $\dfrac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + 3nx^n + o(x^n)$.

Vrai-Faux 7. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\mathrm{e}^{x-1} = x + o(x)$.
2. ☒ $\mathrm{e}^{x-1} = 1/\mathrm{e} + o(1)$.
3. ☒ $\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$.
4. ☐ $\mathrm{e}^{x^2-1} = \mathrm{e} + \mathrm{e}\, x^2 + o(x^2)$.
5. ☒ $\mathrm{e}^{(x-1)^2} = \mathrm{e} - 2\mathrm{e}\, x + 3\mathrm{e}\, x^2 + o(x^2)$.
6. ☐ $(\mathrm{e}^x - 1)^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$.
7. ☐ $(\mathrm{e}^x)^2 - 1 = o(x)$.
8. ☒ $(\mathrm{e}^x)^2 - 1 - 2x = 2x^2 + o(x^2)$.

Vrai-Faux 8. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\sin(2x) = 2x - x^3/3 + o(x^3)$.
2. ☒ $\sin(\pi/2 - x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$.
3. ☒ $\sin(\tan(x)) = x + o(x^2)$.
4. ☐ $\sin(\sin(x)) = x - x^3/6 + o(x^3)$.
5. ☒ $\cos(\sin(x)) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$.
6. ☐ $\sin(\cos(x)) = o(x)$.
7. ☐ $\tan(\sin(x)) = x + x^3/3 + o(x^3)$.
8. ☒ $\tan(\sin(x)) - \sin(\tan(x)) = o(x^6)$.

Vrai-Faux 9. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\sqrt{2+x} = 1 + (1+x)/2 + o(1+x)$.
2. ☐ $\sqrt{4+x} = 2 + x/2 + o(x)$.
3. ☒ $1/\sqrt{4+x} = 1/2 - x/16 + o(x)$.
4. ☐ $\sqrt[3]{3+x} = 1 + x/3 + o(x)$.
5. ☒ $1/\sqrt[3]{1-3x} = 1 + x + o(x)$.

6. ☒ $\sqrt[3]{1+3x^3} = 1 + x^3 + o(x^5)$.
7. ☒ $(8+3x)^{2/3} = 4 + x + o(x)$.
8. ☐ $(8+3x)^{-2/3} = 1/4 + x + o(x)$.

Vrai-Faux 10. Les propositions suivantes portent sur des développements limités en 0. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\ln(1-x) = -x + x^2/2 + o(x^2)$.
2. ☒ $\ln(1-x^2) = -x^2 - x^4/2 - x^6/3 + o(x^6)$.
3. ☐ $\ln(1+\mathrm{e}^x) = 1 + x + o(x)$.
4. ☒ $\ln(\cos(x)) = -x^2/2 + o(x^3)$.
5. ☒ $\ln(1+\cos(x)) = \ln(2) - x^2/4 + o(x^3)$.
6. ☐ $\ln(1+\sin(x)) = x + o(x^2)$.
7. ☒ $\ln(1+\sin(x)) - \ln(1+\tan(x)) = o(x^2)$.
8. ☐ $\ln(1+x^2) - \ln((1+x)^2) = o(x)$.

Vrai-Faux 11. Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
2. ☐ $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. ☐ $\cos\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
4. ☒ $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
5. ☒ $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\ln(x) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
6. ☐ $x^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
7. ☒ $\mathrm{e}^{-x} = o\left(\frac{1}{x^{314}}\right)$.

Vrai-Faux 12. Les propositions suivantes portent sur des développements asymptotiques au voisinage de 0^+. Lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\sqrt{x+x^2} = \sqrt{x} + x/2 + o(x)$.
2. ☒ $\sqrt{x+\sqrt{x}} = x^{1/4} + x^{3/4}/2 + o(x^{3/4})$.
3. ☐ $\cos(x^{2/5}) = 1 + o(x)$.
4. ☐ $\sin(\sqrt[3]{x^3+x^5}) = x + o(x^2)$.
5. ☒ $\frac{\ln(x)}{\sin(x)} = \frac{\ln(x)}{x} + o(x\ln(x))$.

6. ☒ $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(x)} = \dfrac{\ln(x)}{2x} + o(x\ln(x))$.
7. ☐ $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})} = \dfrac{\ln(x)}{2x} + o(x\ln(x))$.
8. ☒ $\dfrac{\ln(\sqrt{1+x})}{\sin(\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} + o(\sqrt{x})$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f\ : x \mapsto \sin(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \cos(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \mathrm{e}^x\ ,$$

$$f\ : x \mapsto \ln(1+x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \arctan(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \arcsin(x)\ ,$$
$$f\ : x \mapsto \sinh(x^2)\ ,\quad f\ : x \mapsto \cosh(x^2)\ ,\quad f\ : x \mapsto \ln(1+x^2)\ .$$

1. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre $n = 5$. Écrire le polynôme de Taylor P_5.
2. Pour $x = 0.1$ puis $x = 0.01$, donner une valeur numérique approchée de $f(x) - P_5(x)$.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f\ : x \mapsto \sin(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \cos(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \mathrm{e}^x\ ,$$

$$f\ : x \mapsto \ln(1+x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \arctan(x)\ ,\quad f\ : x \mapsto \arcsin(x)\ ,$$

1. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(2x)$.
2. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(x/3)$.
3. Ecrire le développement limité d'ordre 10 en 0 de $x \mapsto f(x^2)$.
4. Ecrire le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f(x+x^2)$.

Exercice 3. Démontrer les résultats suivants.

1. $\cos(x)\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.
2. $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$.
3. $\dfrac{1}{1-\sin(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$.
4. $\dfrac{1}{1-\arctan(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$.
5. $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x + \dfrac{2x^3}{3} + o(x^4)$.

6. $\ln(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)$.
7. $\ln(1 + x^2\sin(x)) = x^3 - \dfrac{x^5}{6} - \dfrac{x^6}{2} + o(x^6)$.
8. $\cos(\sin(x)) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$.
9. $\sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2) = -2x^2 - x^3 + 7x^4 + o(x^4)$.
10. $\cosh(1 - \cos(x)) = 1 + \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$.
11. $\cos(1 - \cosh(x)) = 1 - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$.
12. $\sin(x - \arctan(x)) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + o(x^8)$.
13. $\sin(x - \arctan(x)) - x + \arctan(x) = o(x^8)$.
14. $\cosh(1 - \cos(x)) + \cos(\cosh(x) - 1) = 2 - \dfrac{x^6}{24} + o(x^6)$.
15. $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x)) = \dfrac{x^5}{3} + o(x^8)$.
16. $(\cosh(x) - \cos(x))(\sinh(x) - \sin(x))^2 = \dfrac{x^8}{9} + o(x^{11})$.
17. $\arcsin(\ln(1 + x^2)) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.
18. $\dfrac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = -1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7x^4}{24} + o(x^4)$.
19. $\dfrac{\arctan(x) - x}{\tan(x) - x} = -1 + x^2 - \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$.
20. $\dfrac{1}{1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{x^2}{36} + o(x^3)$.
21. $(1 + x)^{1/(1+x)} = 1 + x - x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$.
22. $\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5x^2}{24} - \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$.
23. $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{\mathrm{e}x^3}{48} + o(x^3)$.
24. $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \dfrac{x^2}{60\sqrt{\mathrm{e}}} + o(x^3)$.
25. $\ln(2 + x + \sqrt{1+x}) = \ln(3) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$.

26. $\ln(2\cos(x)+\sin(x)) = \ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{5x^2}{8} + \dfrac{5x^3}{24} + o(x^3)$.
27. $\arctan(\mathrm{e}^x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{12} + o(x^4)$.

Exercice 4. Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre $2n$ en 0 de la fonction $x \mapsto 1/(1-x^2)$.

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}) \ .$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis composer avec $x \mapsto x^2$.
2. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $1/(1+x)$, puis calculer la demi-somme.
3. Écrire les développements d'ordre $2n$ de $x \mapsto 1/(1-x)$ et $1/(1+x)$, puis calculer le produit.

Exercice 5. Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-2}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + o(x^n) \ .$$

1. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = -2$, puis composer avec $x \mapsto -x$.
2. Écrire le développement d'ordre $n+1$ de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis dériver.
3. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis élever au carré.
4. Écrire le développement d'ordre n de $x \mapsto 1/(1-x)$, puis composer avec $x \mapsto 2x - x^2$.

Exercice 6. Soit n un entier. Démontrer les résultats suivants (utiliser une décomposition en éléments simples si nécessaire).

1. $\dfrac{1}{2+x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{8} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}} + o(x^{2n})$.
2. $\dfrac{1}{(x-4)^2} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{x}{32} + \dfrac{3x^2}{4^4} + \cdots + \dfrac{(n+1)x^n}{4^{n+2}} + o(x^n)$.
3. $\dfrac{x^2}{x-4} = -\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{16} - \cdots - \dfrac{x^n}{4^{n-1}} - \cdots + o(x^n)$.
4. $\dfrac{x^2}{x^2-4} = -\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{16} - \cdots - \dfrac{x^{2n}}{4^n} - \cdots + o(x^{2n})$.
5. $\dfrac{x^2}{x^2+4} = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{16} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{4^n} + \cdots + o(x^{2n})$.

6. $\dfrac{x}{(1-2x)(1-4x)} = 1 + 6x + 28x^2 + \cdots + 2^n(2^{n+1}-1)x^n + o(x^n)$.
7. $\dfrac{x}{2x^2-3x+1} = x + 3\,x^2 + \cdots + (-1+2^n)\,x^n + \cdots + o(x^n)$.
8. $\dfrac{x^3}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{2}x^3 + \cdots + \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{(-2)^{2-n}}{3}\right) x^n + o(x^n)$.
9. $\dfrac{x^3+1}{x^2+x-2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3x^2}{8} + \cdots + \left(-\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3}(-2)^{-n-1}\right) x^n + \cdots + o(x^n)$.
10. $\dfrac{x-6x^3}{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-6x)} = x + 12x^2 + \cdots + \dfrac{(2^n-1)(3^n-1)x^n}{2} + o(x^n).$

Exercice 7.

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :
$$x \mapsto \sin^2(x)\ , \quad x \mapsto \cos^2(x)\ , \quad x \mapsto \sin(x)\cos(x)\ .$$
3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\ , \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}\ , \quad \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}\ .$$

Exercice 8.

1. Écrire les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions sinus et cosinus hyperboliques.
2. Calculer, en effectuant le produit, les développements limités d'ordre 6 en 0 des fonctions :
$$x \mapsto \sinh^2(x)\ , \quad x \mapsto \cosh^2(x)\ , \quad x \mapsto \sinh(x)\cosh(x)\ .$$
3. Retrouver les résultats de la question précédente, en utilisant les formules :
$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}\ , \quad \cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}\ ,$$
$$\sinh(x)\cosh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2}\ .$$

Exercice 9. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction arc sinus.
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\ .$$
On notera a, b, c les trois réels (supposés inconnus) tels que $\arcsin(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.

1. Écrire le développement limité d'ordre 4 de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$. En déduire les valeurs de a, b, c.
2. Écrire les développements limités d'ordre 4 de sin puis de $\sin \circ \arcsin$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 5 de cos, puis de $\cos \circ \arcsin$, puis de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. En utilisant la formule $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire, en fonction de a, b, c, les développement limités d'ordre 6 de la primitive de arcsin nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \mapsto x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 10. Le but de l'exercice est de retrouver, par différentes méthodes, le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction argument sinus hyperbolique.

$$\operatorname{argsinh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) .$$

On notera a, b, c les trois réels (supposés inconnus) tels que $\operatorname{argsinh}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$.

1. On rappelle la formule $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer le développement limité d'ordre 5 de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$. Calculer les valeurs de a, b, c.
2. On rappelle que la dérivée de argsinh est la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-1/2}$. Calculer le développement limité d'ordre 4 de cette fonction. Retrouver les valeurs de a, b, c.
3. Écrire les développements limités d'ordre 4 de sinh puis de $\sinh \circ \operatorname{argsinh}$. Retrouver les valeurs de a, b, c.
4. Écrire les développements limités d'ordre 5 de cosh, puis de $\cosh \circ \operatorname{argsinh}$. En utilisant la formule $\cosh(\operatorname{argsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$, retrouver les valeurs de a, b, c.
5. Écrire, en fonction de a, b, c, les développement limités d'ordre 6 de la primitive de argsinh nulle en 0, ainsi que de la fonction $x \mapsto x \operatorname{argsinh}(x) - \sqrt{1+x^2} + 1$. En utilisant le fait que ces deux fonctions sont égales, retrouver les valeurs de a, b, c.

Exercice 11. Soit n un entier. Le but de l'exercice est de retrouver, par deux méthodes différentes, le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction argument tangente hyperbolique.

$$\operatorname{argtanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) .$$

1. On rappelle que $\operatorname{argtanh}(x)$ est la primitive, nulle en 0, de la fonction $x \mapsto 1/(1-x^2)$. Écrire le développement limité d'ordre n de $\operatorname{argtanh}'$, et en déduire celui de argtanh.
2. On rappelle la formule :

$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big) .$$

Ecrire les développements limités d'ordre n de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$, en déduire celui de argtanh.

Exercice 12.

1. Écrire les développements limités d'ordre 5 en 0, des fonctions sin, arcsin, sinh, argsinh, tan, arctan tanh, argtanh.
2. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$\begin{aligned} \tanh(x) \leqslant \arctan(x) \leqslant \sin(x) \leqslant \operatorname{argsinh}(x) \leqslant x \\ \leqslant \sinh(x) \leqslant \arcsin(x) \leqslant \tan(x) \leqslant \operatorname{argtanh}(x) \ . \end{aligned}$$

Exercice 13. Démontrer les résultats suivants.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\mathrm{e}^x + 1) - 2(\mathrm{e}^x - 1)}{x^3} = \frac{1}{6}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{x^2} = 1$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} = \frac{1}{2}$.
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{1}{3}$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x)}{(\mathrm{e}^x - 1)\sin(x)} = \frac{3}{2}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(x) - x^2}{\cos(x^2) - 1} = \frac{2}{3}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\tan(x) - \arcsin(x)} = -1$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)} = 2$.
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x) - \sinh(2x)}{(1 - \cos(3x))\arctan(x)} = -\frac{4}{27}$.
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{1/3} - 1 - \sin(x) - x}{1 - \cos(x)} = -2$.

15. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2} = -\frac{12}{13}$.
16. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\sinh(\tanh(x)) - \tanh(\sinh(x))} = -1$.
17. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{\arcsin(\arctan(x)) - \arctan(\arcsin(x))} = 1$.

Exercice 14. Pour chacune des fonctions f suivantes.

$$f \ : x \mapsto \sin(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \cos(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \mathrm{e}^x \ ,$$

$$f \ : x \mapsto \ln(1+x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arctan(x) \ , \quad f \ : x \mapsto \arcsin(x) \ ,$$

$$f \ : x \mapsto 1/(1-x) \ , \quad f \ : x \mapsto \sqrt{1+x} \ , \quad f \ : x \mapsto 1/\sqrt{1+x} \ .$$

1. Écrire le développement limité d'ordre 5 de f en 0. Ce développement sera utilisé pour toutes les questions suivantes.
2. Écrire un développement asymptotique au voisinage de 0^+ pour $f(\sqrt{x})$.
3. Écrire un développement asymptotique au voisinage de 0^+ pour $f(x^x - 1)$.
4. Écrire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ pour $f(1/x)$.
5. Écrire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ pour $f(\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 15. Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de 0^+.

1. $\displaystyle \frac{1}{\ln^2(1+x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{12} + o\left(x\right)$.
2. $\displaystyle \frac{1}{\sin^3(x^2)} = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2x^2} + o\left(x\right)$.
3. $\displaystyle \sqrt{x+2x^3} = x^{1/2} + x^{5/2} - \frac{x^{7/2}}{2} o\left(x^{7/2}\right)$.
4. $\displaystyle \frac{\sqrt{x+x^3}}{\sqrt[3]{x+x^2}} = x^{1/6} - \frac{x^{7/6}}{3} + \frac{13x^{13/6}}{18} + o\left(x^{13/6}\right)$.
5. $\displaystyle x^x = 1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + o(x^2\ln(x))$.
6. $\displaystyle \left(\frac{1+\ln(x)}{\ln(x)}\right)^x = 1 + \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x}{2\ln^2(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^2(x)}\right)$.

Exercice 16. Démontrer les résultats suivants, qui expriment des développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$.

1. $\displaystyle \frac{1}{2+x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

2. $\dfrac{1+x^2}{(1+x)(2-x)} = -1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
3. $\dfrac{1}{x\sin(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{7}{360x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.
4. $\dfrac{1}{x\arctan(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{4}{45x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.
5. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} = x^{5/6} - \dfrac{1}{3x^{7/6}} + \dfrac{1}{2x^{13/6}} + o\left(\dfrac{1}{x^{13/6}}\right)$.
6. $\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-3x}}}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}} = \mathrm{e}^{-x/6} - \dfrac{\mathrm{e}^{-7x/6}}{3} + \dfrac{13\mathrm{e}^{-13x/6}}{18} + o\left(\mathrm{e}^{-13x/6}\right)$.

Exercice 17. Démontrer les résultats suivants.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(\sqrt{x^2+x}) - \sinh(\sqrt{x^2-x}) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh(\cosh(x)) - \cosh(\sinh(x)) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\cosh(\sqrt{x+1}) - \cosh(\sqrt{x})\Big)^{1/x} = \mathrm{e}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x+x)^{\mathrm{e}^x-x^2} - (\mathrm{e}^x+x^2)^{\mathrm{e}^x-x} = -\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\left((x+1)^{1/(x+1)}\right)} - x^{\left(x^{1/x}\right)} = 1$.

Exercice 18. Pour chacune des applications f suivantes, déterminer les asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que la position de la courbe représentative par rapport à ces asymptotes.

1. $f \ : \quad x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.
2. $f \ : \quad x \longmapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.
3. $f \ : \quad x \longmapsto (x+1)\arctan(x)$.
4. $f \ : \quad x \longmapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)}$.
5. $f \ : \quad x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$.
6. $f \ : \quad x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\mathrm{e}^{x/(x+1)}$.
7. $f \ : \quad x \longmapsto x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
8. $f \ : \quad x \longmapsto x^3\arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
9. $f \ : \quad x \longmapsto x\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
10. $f \ : \quad x \longmapsto \sqrt[3]{x^3-2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}$.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f(x) = 1 + x + o(x^2)$.

$\boxed{\text{A}}$ $2f(x) = 1 + 2x + o(x)$.
$\boxed{\text{B}}$ $f(2x) = 1 + 2x + o(x)$.
$\boxed{\text{C}}$ $f^2(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$.
$\boxed{\text{D}}$ $f(x^2) = 1 + x^2 + o(x^2)$.
$\boxed{\text{E}}$ $f(x) - x = o(x^2)$.

Question 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant 0, dérivable en 0. Soit P le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f en 0.

$\boxed{\text{A}}$ $P(x) = f(0) + xf'(0)$.
$\boxed{\text{B}}$ Le polynôme de Taylor d'ordre 1 de $x \mapsto f(x^2)$ en 0 est $P(x^2)$.
$\boxed{\text{C}}$ Le polynôme de Taylor d'ordre 1 de $x \mapsto f(x+1)$ en -1 est $P(x+1)$.
$\boxed{\text{D}}$ Le polynôme de Taylor d'ordre 1 de $x \mapsto f(x+1)$ en 0 est $P(x+1)$.
$\boxed{\text{E}}$ Le polynôme de Taylor d'ordre 1 de $x \mapsto f(\mathrm{e}^x)$ en 0 est $P(x+1)$.

Question 3. Soient f et g deux fonctions, admettant un développement limité d'ordre 1 en 0. On suppose que $f(0) = g(0) = 0$.

$\boxed{\text{A}}$ Le polynôme de Taylor d'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ est le polynôme nul.
$\boxed{\text{B}}$ La fonction $x \mapsto f(x)/g(x)$ admet forcément un développement limité d'ordre 0 en 0.
$\boxed{\text{C}}$ La limite quand x tend vers 0 de $f(x)/g(x)$ existe forcément.
$\boxed{\text{D}}$ La limite quand x tend vers 0 de $(f(x)g(x))/x^2$ existe forcément.
$\boxed{\text{E}}$ La limite quand x tend vers 0 de $x^2f(x)/g(x)$ existe forcément.

Question 4. Soient f et g deux fonctions telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = 1 + x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - x^2 + o(x^2)\ .$$

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) + g(x) = 1 + o(x^2)$.
$\boxed{\text{B}}$ $f(x) - g(x) = 2x^2 + o(x^2)$.
$\boxed{\text{C}}$ $f(x)/g(x) = 1 + o(x^2)$.
$\boxed{\text{D}}$ $f(x^2)g(x) = 1 + o(x^4)$.
$\boxed{\text{E}}$ $f(g(x) - 1) = 1 + x^4 + o(x^4)$.

Question 5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = 3 + 2x + x^2 + o(x^4) \ .$$

Soit F la primitive de f telle que $F(0) = 1$.

A $F(x) = 3x + x^2 + x^3 + o(x^5)$.

B La dérivée troisième de F en 0 est nulle.

C La dérivée seconde de f' en 0 est nulle.

D $F(x) = 1 + 3x + x^2 + o(x^2)$.

E $f'(x) = 2 + 2x + o(x^4)$.

Question 6. Au voisinage de 0 :

A $\cos(2x) = 1 - 2x + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

B $\mathrm{e}^{1+2x} = \mathrm{e}\Big(1 + 2x + 2x^2 \dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)\Big)$.

C $\sin(2x) = 2x + \dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)$.

D $\dfrac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$.

E $\sqrt{1+2x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

Question 7. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est *impaire*. Les propositions portent sur des développements limités en 0.

A Dans le développement limité d'ordre 2 de $x \mapsto f(\cos(x))$, le terme constant est forcément nul.

B La limite quand x tend vers 0 de $f(x)/\sin(x)$ existe forcément.

C La dérivée quatrième de $x \mapsto f'(x^2)$ est forcément nulle.

D La limite quand x tend vers 0 de $f'(x)/f''(x)$ existe forcément.

E Le développement limité de $x \mapsto f(\sin(x))$ ne contient que des termes de degrés pairs.

Question 8.

A $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{1-\mathrm{e}^{2x}} = -1$.

B $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-2x}} = -1$.

C $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{1-\sqrt{1-2x}} = -1$.

D $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{1-\cos(2x)} = 2$.

E $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sin^2(2x)}{\cos(2x)} = 2$.

Question 9. Au voisinage de 0^+ :

[A] $\sqrt{\sin(4x)} = 2\sqrt{x} - \frac{8}{3}x^{5/2} + o(x^{5/2})$.

[B] $\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{\tan(x)}} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$.

[C] $x^x = 1 + x\ln(x) + o(x^2)$.

[D] $\sqrt{x}^x = 1 + \sqrt{x}\ln(x) + o(\sqrt{x})$.

[E] $\sqrt{x}^x = 1 + \frac{1}{2}x\ln(x) + o(x)$.

Question 10. Au voisinage de $+\infty$:

[A] $\frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

[B] $\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

[C] $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

[D] $\frac{1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

[E] $\frac{1}{1-x^2} = -1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Réponses : 1–BD 2–AC 3–AD 4–BE 5–CD 6–AB 7–BE 8–AD 9–AE 10–CE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit n un entier.

1. Écrire le développement limité de $x \mapsto 1/(1-x)$ à l'ordre n en 0.
2. Écrire le développement limité de $x \mapsto 1/(1+x)$ à l'ordre n en 0.
3. Écrire le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre $n+1$ en 0.
4. Écrire le développement limité de $x \mapsto 1/(1+x^2)$ à l'ordre $2n$ en 0.
5. Écrire le développement limité de $x \mapsto \arctan(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

Exercice 1 :

1. Écrire le développement limité de $x \mapsto 1/\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 0.
2. En déduire le développement limité de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ à l'ordre 6 en 0.
3. En déduire le développement limité de $x \mapsto \arcsin(x)$ en 0 à l'ordre 7.
4. Écrire le développement limité de $x \mapsto x/\sqrt{1-x^2}$ à l'ordre 7 en 0.

5. On rappelle que la fonction tangente est impaire. Soit :

$$\tan(x) = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + d\,x^7 + o(x^7)\ ,$$

son développement limité en 0 à l'ordre 7. Calculer en fonction de a, b, c, d le développement limité de $x \mapsto \tan(\arcsin(x))$ à l'ordre 7 en 0.

6. En utilisant la formule $\tan(\arcsin(x)) = x/\sqrt{1-x^2}$, déduire des questions précédentes les valeurs de a, b, c, d.
7. Écrire le développement limité de $x \mapsto 1/(1+x^2)$ à l'ordre 6 en 0.
8. En déduire le développement limité de $x \mapsto \arctan(x)$ à l'ordre 7 en 0.
9. En utilisant les résultats des questions 6 et 8, vérifier que :

$$\tan(\arctan(x)) = x + o(x^7)\ .$$

Exercice 2 :

1. Écrire le développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - \sin(x)$ à l'ordre 2 en 0.
2. Écrire le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2$ à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2} = -\frac{2}{3}\ .$$

Exercice 3 :

1. Démontrer que $\arcsin(x) - \sinh(x)$ et $\operatorname{argsinh}(x) - \sin(x)$ sont équivalents à $x^5/15$ au voisinage de 0.
2. Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0\ .$$

Démontrer que, au voisinage de 0 :

$$\mathrm{e}^{u(x)} - 1 \sim u(x)\ ,\quad \mathrm{e}^{v(x)} - 1 \sim v(x)\ ,\quad \Big(\mathrm{e}^{u(x)} - \mathrm{e}^{v(x)}\Big) \sim \Big(u(x) - v(x)\Big)\ .$$

3. Déduire des questions précédentes que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\arcsin(x)} - \mathrm{e}^{\sinh(x)}}{\mathrm{e}^{\operatorname{argsinh}(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)}} = 1\ .$$

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Le développement limité de $x \mapsto 1/(1-x)$ à l'ordre n en 0 est :
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\ .$$
2. Par composition avec $x \mapsto -x$, on obtient :
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\ .$$
3. La primitive de $x \mapsto 1/(1+x)$ nulle en 0 est $\ln(1+x)$:
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})\ .$$
4. Par composition de $x \mapsto 1/(1+x)$ avec $x \mapsto x^2$, on obtient :
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})\ .$$
5. La primitive de $x \mapsto 1/(1+x^2)$ nulle en 0 est $\arctan(x)$:
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})\ .$$

Exercice 1 :

1. On connaît le développement de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'ordre n en 0 :
$$(1+x)^\alpha = \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n)\ .$$
Pour $\alpha = -1/2$ et $n = 3$, la formule donne :
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)\ .$$
2. En composant par $x \mapsto -x^2$ dans le développement précédent :
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + o(x^6)\ .$$
3. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est la primitive de $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$, nulle en 0. Il suffit de prendre la primitive du développement précédent, avec un terme constant nul.
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^7)\ .$$

4. En multipliant par x celui de la question 2 :

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} + \frac{5x^7}{16} + o(x^7)\ .$$

5. Il s'agit de composer le développement de tangente, donné en fonction de a, b, c, d, avec celui de la question 3. On ne calcule pas les termes de degrés supérieurs à 7.

$$\begin{aligned}
\tan(\arcsin(x)) &= a\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}\right) + b\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}\right)^3 \\
&\quad + c\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^5 + d\Big(x\Big)^7 + o(x^7) \\
&= ax + \left(\frac{a}{6} + b\right)x^3 + \left(\frac{3a}{40} + \frac{b}{2} + c\right)x^5 + \\
&\quad \left(\frac{5a}{112} + \frac{37b}{120} + \frac{5c}{6} + d\right)x^7 + o(x^7)\ .
\end{aligned}$$

6. Par unicité du développement limité, les coefficients des polynômes de Taylor écrits aux questions 4 et 5 doivent être les mêmes. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
a & = & 1 \\
\frac{a}{6} + b & = & \frac{1}{2} \\
\frac{3a}{40} + \frac{b}{2} + c & = & \frac{3}{8} \\
\frac{5a}{112} + \frac{37b}{120} + \frac{5c}{6} + d & = & \frac{5}{16}\ .
\end{array}\right.$$

On en tire successivement :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
a & = & 1 \\
b & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\
c & = & \frac{3}{8} - \frac{3}{40} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15} \\
d & = & \frac{5}{16} - \frac{5}{112} - \frac{37}{360} - \frac{1}{9} = \frac{17}{315}\ .
\end{array}\right.$$

7. On utilise le développement de $x \mapsto 1/(1-x)$ à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\ ,$$

que l'on compose avec $x \mapsto -x^2$.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6) \ .$$

8. La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est la primitive de $x \mapsto 1/(1+x^2)$, nulle en 0. Il suffit de prendre la primitive du développement précédent, avec un terme constant nul.

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7) \ ,$$

9. Par composition :

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 \\
&\qquad + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(x\right)^7 + o(x^7) \\
&= x + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\right)x^5 + \\
&\qquad \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{17}{315}\right)x^7 + o(x^7) \\
&= x + o(x^7) \ .
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \ .$$

Par composition, on en déduit :

$$\mathrm{e}^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) \ ,$$

et :

$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) \ .$$

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sin(x)$ est :

$$\sin(x) = x + o(x^2) \ .$$

Par combinaison linéaire :

$$\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - \sin(x) = \frac{5x^2}{12} + o(x^2) \ .$$

2. Par application de la formule donnant le développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, on obtient pour $\alpha = 1/2$:
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\ .$$
Par composition on en déduit :
$$\sqrt{1+3x} = 1 + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{8} + o(x^2)\ ,$$
et
$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\ .$$
Par combinaison linéaire, on en déduit :
$$\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2 = -\frac{5x^2}{8} + o(x^2)\ .$$
3. Le quotient des développements limités des deux questions précédentes donne :
$$\frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \tan(x/2)} = \frac{\frac{5}{12}x^2 + o(x^2)}{-\frac{5}{8}x^2 + o(x^2)} = -\frac{2}{3} + o(1)\ .$$
Donc :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2} = -\frac{2}{3}\ .$$

Exercice 3 :

1. Les développements limités à l'ordre 5 des fonctions sin, sinh, arcsin, argsinh sont les suivants.
$$\begin{array}{rcl}
\sin(x) &=& x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\\
\sinh(x) &=& x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\\
\arcsin(x) &=& x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)\\
\mathrm{argsinh}(x) &=& x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)
\end{array}$$
D'où :
$$\arcsin(x) - \sinh(x) = x^5\left(\frac{3}{40} - \frac{1}{120}\right) + o(x^5) = \frac{x^5}{15} + o(x^5)\ ,$$
et
$$\mathrm{argsinh}(x) - \sin(x) = x^5\left(\frac{3}{40} - \frac{1}{120}\right) + o(x^5) = \frac{x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

2. Du développement à l'ordre 1 de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, on déduit :
$$\mathrm{e}^{u(x)} = 1 + u(x) + o(u(x)) \;,$$
donc :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{u(x)} - 1}{u(x)} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{o(u(x))}{u(x)} = 1 \;.$$
Ce résultat s'applique aussi à $v(x)$, et aussi à $u(x) - v(x)$. Donc :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{u(x)} - \mathrm{e}^{v(x)}}{u(x) - v(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{v(x)} \frac{\mathrm{e}^{u(x)-v(x)}}{u(x) - v(x)} = 1 \;.$$

3. Si on applique le résultat précédent à $u(x) = \arcsin(x)$ et $v(x) = \sinh(x)$, on obtient :
$$\Big(\mathrm{e}^{\arcsin(x)} - \mathrm{e}^{\sinh(x)}\Big) \sim \Big(\arcsin(x) - \sinh(x)\Big) \sim \frac{x^5}{15} \;.$$
De même :
$$\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{argsinh}(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)}\Big) \sim \Big(\mathrm{argsinh}(x) - \sin(x)\Big) \sim \frac{x^5}{15} \;.$$
Par quotient des deux équivalents :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\arcsin(x)} - \mathrm{e}^{\sinh(x)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{argsinh}(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)}} = 1 \;.$$

3 Compléments

3.1 La formule de Machin

Non, il ne s'agit pas d'un mathématicien aussi inconnu que quelconque, mais bien de John Machin (1680-1751). Pour autant, on ne sait pas grand chose de la date à laquelle il a obtenu sa formule, ni même de la méthode avec laquelle il l'aurait démontrée (si tant est qu'il l'ait démontrée). Elle apparaît dans un livre de William Jones en 1706. Celui-ci dit :

> … dans le cercle, le diamètre est à la circonférence comme 1 à $\left(\frac{16}{5} - \frac{4}{239}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}\right)$ &*c.* = 3.14159&*c.* = π. J'ai reçu cette série (parmi d'autres pour le même but, et tirées du même principe), de l'excellent analyste, et mon ami très estimé, Mr John Machin.

En écriture moderne :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{16}{5^{2k+1}} - \frac{4}{239^{2k+1}} \right) = \pi \ . \tag{4}$$

Calculer la somme ci-dessus pour une valeur de n raisonnablement élevée permet d'obtenir π avec une grande précision. Jones lui-même dit que π peut ainsi être calculé « to 100 places; as computed by the accurate and ready pen of the truly ingenious Mr John Machin ».

D'où vient cette formule (4) ? Tout simplement du développement de la fonction arc tangente connu, bien avant Taylor, de James Gregory (1638-1675).

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \ .$$

On démontre que pour $|x| < 1$, $\arctan(x)$ est effectivement limite de ses polynômes de Taylor.

$$\forall x\,,\ |x| < 1\ , \quad \arctan(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \ .$$

C'est encore vrai pour $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \ . \tag{5}$$

Mais (5) n'est pas très utile : si on calcule la somme pour $n = 1000$, on n'obtient que 2 décimales exactes de π. Là interviennent les formules trigonométriques, et en particulier :

$$\forall a, b\,,\ ab \neq 1\ , \quad \arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \ .$$

Cela devrait vous suffire pour vérifier que :

$$\arctan(1) = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) ,$$

ce qui est équivalent à la formule de Machin. La convergence est effectivement beaucoup plus rapide : en calculant dans (4) la somme pour $n = 10$, on obtient déjà 15 décimales exactes. Sur le même modèle, de nombreuses autres formules de calcul de π ont été trouvées. Voici celle de Störmer (1896) :

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 7\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 12\arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 24\arctan\left(\frac{1}{12943}\right) ,$$

et celle de Takano (1982) :

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\left(\frac{1}{49}\right) + 32\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right) + 12\arctan\left(\frac{1}{110443}\right) .$$

De nos jours, les formules basées sur le développement de la fonction arc tangente sont encore utilisées, ainsi que bien d'autres, dans la course aux décimales de π (cf. `www.pi314.net`). Le record est détenu depuis le 6 décembre 2002 par Kanada et ses collaborateurs avec pas moins de 1 241 100 000 000 décimales ! Le calcul, effectué à l'aide de la formule de Takano, puis vérifié par celle de Stoemer, a pris au total 601 heures et 56 minutes sur un ordinateur Hitachi à 64 processeurs, chacun traitant 14.4 10^9 opérations par seconde.

3.2 Taylor was rich

Brook Taylor (1685-1731) venait d'une famille aisée, qui pouvait se permettre de lui payer des professeurs particuliers. Cette éducation privilégiée lui laissa non seulement le goût des sciences et des lettres classiques, mais aussi celui de la peinture et de la musique. Certaines sources affirment que John Machin lui aurait enseigné les mathématiques en 1701. Il avait alors 16 ans et son professeur 21. Toujours est-il qu'il entretint une correspondance suivie avec Machin, et c'est dans cette correspondance que l'on trouve les premières traces de la « formule de Taylor ». Elle apparaît dans une lettre du 26 juillet 1712 ; Taylor y explique qu'il en a eu l'idée suite à une remarque de Machin lors d'une conversation au café. Taylor venait d'être élu à la Royal Society, trois mois auparavant. Il en devint secrétaire deux ans plus tard, à seulement 29 ans.

Une brillante carrière l'attendait. Mais sa vie personnelle n'allait pas se dérouler sous d'aussi heureux auspices. En 1721, il décida de se marier. Miss Brydges venait d'une bonne famille, mais pas assez fortunée au goût de M. Taylor père, qui cessa toute relation avec son fils. Deux ans plus tard, la jeune épouse mourut en couche, avec leur premier enfant. Les relations entre père et fils reprirent, et en 1725, Taylor se remaria avec Sabetta Sawbridge, avec l'approbation paternelle. Malheureusement, celle-ci mourut aussi en couches, en 1730. La santé fragile de Taylor déclina après cette nouvelle épreuve, et il mourut l'année suivante, à 45 ans.

3.3 Madhava de Sangamagramma

Madhava de Sangamagramma (1350-1425) est né près de Cochin, sur la côte sud-ouest de l'Inde, dans l'état de Kerala. L'ampleur de ses contributions mathématiques n'a été mise en lumière que récemment. Il semble qu'il soit le premier au monde a avoir systématisé les passages à la limite, à partir des procédures finies des mathématiques de l'antiquité : c'est ce qui constitue de nos jours le fondement de l'analyse telle qu'elle vous est enseignée.

Tous les travaux mathématiques de Madhava ont été perdus, et ses découvertes ne sont connues que par les écrits de mathématiciens indiens plus récents, en particulier Jyesthadeva (1500-1575). Dans un livre paru en 1530, ce dernier décrit le développement de arc tangente obtenu par Madhava vers 1400, soit plus de deux siècles avant Newton et Gregory.

> Le premier terme est le produit du sinus donné et du rayon de l'arc désiré, divisé par le cosinus de l'arc. Les termes suivants sont obtenus par un procédé d'itération, quand le premier terme est multiplié de façon répétée par le carré du sinus et divisé par le carré du cosinus. Tous les termes sont ensuite divisés par les nombres impairs 1, 3, 5,... L'arc est obtenu en ajoutant et soustrayant respectivement les termes de rang impair et ceux de rang pair.

Vous avez du mal a reconnaître le développement de $\arctan(x)$? C'est un peu normal. Le texte donne la recette pour trouver un angle θ dont le sinus et le cosinus sont connus. En substance il faut commencer par calculer le rapport $x = \sin(\theta)/\cos(\theta)$, c'est-à-dire la tangente. Ensuite, il faut multiplier de façon répétée ce rapport par son carré (donc calculer $x, x^3, x^5, \ldots$) Puis les termes doivent être divisés par les entiers impairs (soit $x, x^3/3, x^5/5\ldots$ Il reste à ajouter en alternant les signes :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

3.4 Polynômes d'approximation de Legendre

Nous avons introduit ce chapitre en vous présentant les polynômes de Taylor comme un moyen d'approcher une fonction au voisinage d'un point. Ce n'est pas le seul, et, selon le critère de qualité que l'on choisira d'adopter, ce n'est pas forcément le plus efficace. Il existe une théorie des polynômes d'approximation, que vous apprendrez peut-être plus tard. Nous allons ici nous contenter de vous donner une idée, en vous présentant brièvement les polynômes de Legendre.

Il convient tout d'abord de définir ce que l'on entend par « critère d'approximation ». Considérons une fonction f, supposée continue sur un intervalle $[a, b]$. Si l'on désire l'approcher par un polynôme P_n, le plus intuitif est sans doute de considérer l'erreur d'approximation maximale sur tout l'intervalle. On la note (pour des raisons que vous apprendrez plus tard) $\|f - P_n\|_\infty$.

$$\|f - P_n\|_\infty = \sup\{\, |f(x) - P_n(x)|\,,\ x \in [a, b]\,\}\ .$$

Vous vous souvenez sans doute qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son maximum, et donc le réel $\|f - P_n\|_\infty$ est bien défini. Il se trouve que l'erreur maximale est moins facile à manipuler que l'*erreur quadratique* $\|f - P_n\|_2$.

$$\|f - P_n\|_2 = \left(\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}\ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait déterminer le polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que cette nouvelle erreur d'approximation soit minimale. Pour énoncer le résultat, nous nous ramenerons, sans perte de généralité, au cas $a = -1$, $b = 1$: il suffit pour cela de remplacer la variable x par $t = 2(x - a)/(b - a) - 1$.

Sur $[-1, 1]$, les polynômes de meilleure approximation s'expriment sur la base des *polynômes de Legendre*. On peut définir le polynôme de Legendre (normalisé) de degré n par la formule suivante.

$$L_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n (n!)} \Big((x^2 - 1)^n \Big)^{(n)}\ .$$

Théorème 7. *Soit f une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons :*

$$c_n = \int_{-1}^{1} f(t) L_n(t)$$

Soit $P_n(f)$ le polynôme :

$$P_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, L_n\ .$$

Alors :

$$\|f - P_n(f)\|_2 = \inf\{\, \|f - Q\|_2\,,\ Q \in \mathbb{R}_n[X]\,\}\ .$$

Le polynôme $P_n(f)$ est donc le meilleur approximant de f de degré inférieur ou égal à n, au sens de l'erreur quadratique. Il se trouve qu'en pratique, il est en général meilleur que le polynôme de Taylor de même degré, au sens de l'erreur maximale.

Voici une expérience. Prenons pour f la fonction exponentielle, sur l'intervalle $[-1, 1]$. Pour n allant de 5 à 10, nous avons calculé l'erreur maximale $\|f - P_n\|_\infty$, en prenant pour P_n le polynôme de Taylor de degré n en 0, puis le polynôme d'approximation de Legendre de même degré. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous : Legendre l'emporte haut la main !

n	5	6	7	8	9	10
Taylor	$1.6\ 10^{-3}$	$1.3\ 10^{-4}$	$2.8\ 10^{-5}$	$3.1\ 10^{-6}$	$3.0\ 10^{-7}$	$2.7\ 10^{-8}$
Legendre	$1.1\ 10^{-4}$	$8.2\ 10^{-6}$	$5.4\ 10^{-7}$	$3.1\ 10^{-8}$	$1.6\ 10^{-9}$	$7.8\ 10^{-11}$

Voici l'introduction du discours que Siméon Denis Poisson (1781-1840) prononça aux funérailles d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

> Lorsque nous perdons un de nos confrères les plus avancés en âge, nos regrets sont adoucis par la pensée qu'il a moins souffert à ses derniers moments, et qu'affaibli par les années, il s'est éteint sans douleur. Cette consolation nous manque aujourd'hui : la maladie qui a terminé les jours de M. Legendre dans sa 81$^{\text{e}}$ année, a été longue et douloureuse ; mais il en a supporté les souffrances avec courage et sans se faire illusion sur leur fatale issue ; avec une résignation que devaient lui rendre bien difficile, le bonheur qu'il trouvait dans son intérieur, et les soins et les vœux dont il était entouré.
>
> Notre confrère a souvent exprimé le désir qu'en parlant de lui, il ne fût question que de ses travaux, qui sont, en effet, toute sa vie. Je me conformerai religieusement à sa volonté, dans cet hommage que je viens rendre, au nom de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, au géomètre illustre, au doyen de la science, dont le monde savant va pleurer la perte.

Nous aussi, nous respecterons sa volonté : pour une fois, vous serez privés de ces ragots dont nous vous savons friands.