Dérivabilité et convexité

Bernard Ycart

D'accord, vous n'avez pas attendu ce chapitre pour dériver des fonctions. Attention cependant à deux nouveautés importantes : le théorème des accroissements finis et la convexité. Une bonne maîtrise de la notion de limite vous sera indispensable pour tout comprendre.

Table des matières

1 Cours 1
1.1 Taux d'accroissement et dérivée 1
1.2 Opérations sur les dérivées 4
1.3 Dérivées successives 9
1.4 Théorème des accroissements finis 10
1.5 Fonctions convexes 15

2 Entraînement 19
2.1 Vrai ou faux 19
2.2 Exercices 20
2.3 QCM 28
2.4 Devoir 30
2.5 Corrigé du devoir 31

3 Compléments 37
3.1 Newton et Leibniz 37
3.2 Le calcul différentiel indien 38
3.3 Le dernier disciple de Galilée 39
3.4 Règle de l'Hôpital et Théorème de Rolle 42
3.5 Cette plaie lamentable 44
3.6 Une construction de l'exponentielle et du logarithme 47

8 novembre 2011

1 Cours

1.1 Taux d'accroissement et dérivée

On considère une fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I.

Définition 1. *On appelle* taux d'accroissement *de f en a, la fonction τ_a suivante.*

$$\begin{array}{rcl} I\setminus\{a\} & \stackrel{\tau_a}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \;. \end{array}$$

Si $x \in I \setminus \{a\}$, la valeur de $\tau_a(x)$ est le rapport de l'accroissement de la fonction, $f(x)-f(a)$, à l'accroissement de la variable $x-a$. Sur le graphe de la fonction, c'est la *pente* de la droite passant par les points du graphe $(a, f(a)$ et $(x, f(x))$. Cette droite s'appelle une *sécante*. Si I est un intervalle de temps et $f(x)$ désigne la position d'un point mobile au temps x, $\tau_a(x)$ est la *vitesse moyenne* du mobile sur l'intervalle $[a, x]$ (distance parcourue divisée par le temps de parcours).

Définition 2. *On dit que f est* dérivable *en a si le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ converge, quand x tend vers a. Si c'est le cas, sa limite est la* dérivée de f en a *et se note $f'(a)$.*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;.$$

La dérivée *de f est la fonction f', qui à un point associe la dérivée de f en ce point, si elle existe.*

Géométriquement, la valeur de la dérivée en a est la *pente de la tangente* en a à la courbe d'équation $y = f(x)$ (figure 1). Si $f(x)$ est la position d'un mobile à l'instant x, $f'(a)$ est sa *vitesse instantanée* à l'instant a. Voici deux cas particuliers.

- Si f est constante, ses taux d'accroissements sont nuls, et donc sa dérivée en tout point est nulle.

$$\forall x \in I \;,\; f(x) = \lambda \implies \forall x \in I \;,\; f'(x) = 0 \;.$$

- Si f est linéaire, ses taux d'accroissements sont constants, et donc sa dérivée en tout point est constante.

$$\forall x \in I \;,\; f(x) = \lambda x \implies \forall x \in I \;,\; f'(x) = \lambda \;.$$

Il est souvent commode de se ramener à des limites en 0, en écrivant :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \;.$$

Voici une écriture équivalente.

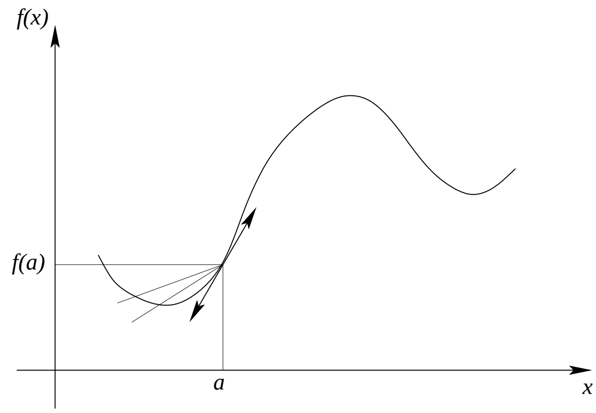

FIGURE 1 – Sécantes et tangente en a à la courbe d'équation $y = f(x)$.

Proposition 1. *La fonction f admet $f'(a)$ comme dérivée en a si et seulement si, au voisinage de 0 pour h :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \; .$$

Démonstration : Le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ admet $f'(a)$ pour limite en a si et seulement si :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h} = 0 \; .$$

Par définition, ceci équivaut à dire que $f(a+h)-f(a)-hf'(a)$ est négligeable devant h, au voisinage de 0 :

$$f(a+h) - f(a) - hf'(a) = o(h) \; .$$

□

Définition 3. *On dit que la fonction f admet un* développement limité d'ordre 1 *en a si :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \; .$$

Dire que f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, c'est donner une approximation : on affirme par là que, si h est petit, $f(a+h)$ peut être approché par la valeur de f en a, $f(a)$, plus un terme linéaire $hf'(a)$. La différence entre $f(a+h)$ et cette approximation est négligeable devant h.

Si f est dérivable en a, elle est nécessairement continue en ce point.

Proposition 2. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration : Écrivons le développement limité d'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \;.$$

On en déduit

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \;,$$

ce qui équivaut à :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \;.$$

□

Voici un premier exemple.

Proposition 3. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier fixé. La fonction $f \;: x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point a où elle est définie, et :*

$$f'(a) = na^{n-1} \;.$$

Démonstration : Si $n = 0$ la fonction est constante et sa dérivée est nulle. Supposons $n > 0$. Écrivons le taux d'accroissement de f en a. Pour $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i\, a^{n-1-i} \;.$$

La somme contient n termes, dont chacun tend vers a^{n-1} quand x tend vers a.

Considérons maintenant la fonction $g \;: x \mapsto x^{-n}$, définie pour $x \neq 0$. Son taux d'accroissement en $a \neq 0$ s'écrit :

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{(\frac{1}{x})^n - (\frac{1}{a})^n}{x-a} = \frac{(\frac{1}{x})^n - (\frac{1}{a})^n}{ax(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})} = -\frac{1}{ax}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^i \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1-i} \;.$$

La somme contient n termes, dont chacun tend vers $(1/a)^{n-1}$ quand x tend vers a. Le taux d'accroissement a donc pour limite

$$g'(a) = -n\, a^{-n+1-2} = -n\, a^{-n-1} \;.$$

□

Prenons par exemple $n = 3$ et $a = 1$. On obtient :

$$(1+h)^3 = 1 + 3h + o(h) \;.$$

L'expression exacte est :

$$(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 \;.$$

Si h est petit (pensez $h = 10^{-3}$), la valeur approchée $1 + 3h$ est effectivement très proche de la valeur exacte $(1+h)^3$.

Il peut se faire que le taux d'accroissement admette seulement une limite unilatérale en a, auquel cas on parle de *dérivée à gauche* ou de *dérivée à droite*.

Définition 4. *On dit que f est* dérivable à gauche *(respectivement : dérivable à droite) en a si le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ admet une limite à gauche (respectivement : à droite) en a. Si c'est le cas, sa limite est la* dérivée à gauche de f en a *(respectivement : dérivée à droite de f en a).*

Considérons par exemple la fonction valeur absolue $f \; : x \mapsto |x|$. Son taux d'accroissement en 0 est :

$$\tau_0(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \;\;1 & \text{si} \quad x > 0 \,. \end{cases}$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, mais elle admet une dérivée à gauche égale à -1, et une dérivée à droite égale à 1.

Il se peut aussi que la fonction ne soit définie que sur un intervalle dont a est une borne, auquel cas, on ne peut espérer qu'une dérivée unilatérale. Considérons la fonction suivante.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ ]-\infty, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}\,. \end{array}$$

Son taux d'accroissement en 0 est défini, pour $x \in]-\infty, 1]$, par

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{1 - x}\,,$$

et donc :

$$\lim_{x \to 0^-} \tau_0(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \tau_0(x) = 1\,.$$

La fonction f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en 0, mais elles sont différentes : f n'est pas dérivable en 0.

Considérons maintenant le taux d'accroissement en 1. Pour $x \in [0, 1[$, il vaut :

$$\tau_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x - 1} = \frac{x}{-\sqrt{1 - x}}\,,$$

et donc :

$$\lim_{x \to 1^-} \tau_1(x) = -\infty\,.$$

La fonction f n'admet pas de dérivée à gauche en 1. Le fait que la limite du taux d'accroissement soit $-\infty$ se traduit par une tangente verticale à la courbe représentative (figure 2).

1.2 Opérations sur les dérivées

Les résultats de cette section sont à connaître par cœur : ils vous permettent de calculer les dérivées de toutes les fonctions que vous rencontrerez, à partir d'un petit nombre de dérivées usuelles.

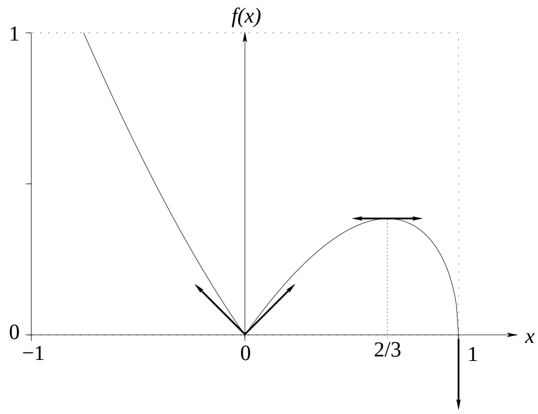

FIGURE 2 – Courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$.

Théorème 1. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant a. On suppose que f et g sont dérivables en a. Alors :*

1. *$f + g$ est dérivable en a, de dérivée $f'(a) + g'(a)$*
2. *fg est dérivable en a, de dérivée $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Comme cas particulier du point 2, si λ est une constante, la dérivée de λf est $\lambda f'$.

Démonstration : Par hypothèse,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \; .$$

1. Écrivons le taux d'accroissement de la somme.
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \; .$$
Comme la limite de la somme est la somme des limites, le résultat s'ensuit.
2. Écrivons le taux d'accroissement du produit.
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \; .$$

Comme g est dérivable, elle est continue en a, donc $g(x)$ tend vers $g(a)$ quand x tend vers a. La limite d'un produit est le produit des limites, idem pour la somme. D'où le résultat.

□

Le théorème 1, combiné avec la proposition 3, entraîne en particulier que toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, dérivable en a. Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $f(a)$, dérivable en $f(a)$. Alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a, de dérivée :*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a)) \,.$$

Démonstration : Par hypothèse, les taux d'accroissement de f en a et de g en $f(a)$ convergent :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) \,.$$

Nous allons utiliser en plus les conséquences suivantes :

C1 : f est continue en a,

C2 : si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) \neq f(a)$ au voisinage de a,

C3 : le taux d'accroissement de g est borné au voisinage de $f(a)$.

L'idée consiste à écrire le taux d'accroissement de $g \circ f$ en a comme un produit de deux taux :

$$\tau(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \tau_1(x)\, \tau_2(x) \,,$$

avec :

$$\tau_1(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \quad \text{et} \quad \tau_2(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,.$$

Évidemment, $\tau_1(x)$ n'est défini que si $f(x) \neq f(a)$. Mais si $f(x) = f(a)$, alors $\tau(x) = 0$.

Considérons d'abord le cas où $f'(a) = 0$. Dans ce cas, $\tau_2(x)$ tend vers 0, et comme conséquence de C1 et C3, il existe un intervalle $J \subset I$ et une constante M telle que :

$$\forall x \in J \setminus \{a\} \,,\ |\tau(x)| \leqslant M|\tau_2(x)| \,.$$

Donc $\tau(x)$ converge vers 0.

Considérons maintenant le cas où $f'(a) \neq 0$. Comme conséquence de C2, $\tau_1(x)$ est bien défini au voisinage de a. La convergence de $\tau_2(x)$ vers $g'(f(a))$ découle de la dérivabilité de g et de la continuité de f (composition des limites). □

D'après la proposition 3, appliquée à la fonction inverse $g \ : y \mapsto 1/y$, celle-ci est dérivable en tout point b où elle est définie, et $g'(b) = -1/b^2$. On déduit du théorème

2 que si f est dérivable et ne s'annule pas en a, alors son inverse $x \mapsto 1/f(x)$ est dérivable, de dérivée
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}\;.$$
En combinant ceci avec la formule donnant la dérivée d'un produit, on obtient la dérivée d'un quotient.
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{v(a)u'(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}\;.$$
Attention à ne pas confondre l'inverse $1/f$ avec la fonction réciproque f^{-1} dans le cas où f est bijective.

Proposition 4. *Soit f une bijection d'un intervalle ouvert I vers un intervalle ouvert J. Soit a un point de I et $b = f(a) \in J$. Si f est dérivable en a, de dérivée non nulle, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en b, et :*
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\;.$$

Démonstration : Pour tout point y de J, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Écrivons le taux d'accroissement de f^{-1} en b : pour tout $y \in J \setminus \{b\}$,
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}\;.$$
Puisque f est continue en a, f^{-1} est continue en b, et donc
$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}\;.$$
□

Les théorèmes de cette section permettent de démontrer la dérivabilité de toutes les fonctions que vous aurez à examiner, à condition d'admettre la dérivabilité des « briques de base » que sont les fonctions usuelles.

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables en tout point d'un intervalle ouvert où elles sont définies.

Ceci concerne les fonctions polynômes, fractions rationnelles, puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, mais exclut bien sûr la valeur absolue.

Voici un tableau récapitulatif des formules de dérivation à connaître par cœur.

fonction	**dérivée**
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
u/v	$(vu'-uv')/v^2$
$u\circ v$	$v'(u'\circ v)$
$1/u$	$-u'/u^2$
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$
u^α	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
u^{-1}	$1/(u'\circ u^{-1})$

Les dérivées suivantes doivent être connues.

fonction	**dérivée**
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$1/x$	$-1/x^2$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

La connaissance des dérivées usuelles, permet, en appliquant la définition 2, de calculer des limites de taux d'accroissement. À titre d'exemple, nous donnons ci-dessous trois limites à connaître.

Théorème 3. *Au voisinage de* 0, $\sin(x)$, e^x-1 *et* $\ln(1+x)$ *sont équivalents à* x*.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\ .$$

Démonstration : Les trois limites sont démontrées dans l'ordre.

1. La dérivée de la fonction sinus en 0 est $\cos(0)=1$. Son taux d'accroissement en 0 est :
$$\tau_0(x)=\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\frac{\sin(x)}{x}\ .$$
D'où le résultat.
2. La dérivée de la fonction exponentielle en 0 est $\mathrm{e}^0=1$. Son taux d'accroissement en 0 est :
$$\tau_0(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0}=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\ .$$
D'où le résultat.

3. La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 est $1/(1+0) = 1$. Son taux d'accroissement en 0 est :
$$\tau_0(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x} \; .$$
D'où le résultat.

□

1.3 Dérivées successives

Etant donné un intervalle ouvert I, on dit que f est *dérivable sur* I, si elle est dérivable en tout point de I. Soit f une fonction dérivable sur I. Sa dérivée f' peut être elle-même dérivable. On appelle alors *dérivée seconde* la dérivée de f', et on la note f''. Cette fonction peut être elle-même dérivable, etc. Si f est k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ sa dérivée d'*ordre* k, ou dérivée k-ième. Par définition, la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même.

Par exemple, si n est un entier fixé, et f est la fonction $x \mapsto x^n$,
$$\forall k = 1, \dots, n \, , \; f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall k > n \, , \; f^{(k)}(x) = 0 \; .$$
Vous rencontrerez souvent les notations suivantes, que nous n'utiliserons pas ici.
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \; , \quad f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \; , \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \; .$$
Définition 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est* de classe $\mathcal{C}^k$ *sur I, ou encore f est k* fois continûment dérivable*, si elle admet une dérivée k-ième* continue *sur I.*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si elle admet des dérivées successives de tout ordre (elles sont nécessairement continues puisque dérivables). Vous pouvez retenir que :

toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$
sur les intervalles ouverts où elles sont définies.

Ceci concerne les fonctions polynômes, fractions rationnelles, puissances, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus.

La formule de Leibniz, très proche de la formule du binôme de Newton, exprime la dérivée n-ième d'un produit à d'aide des dérivées successives des composantes.

Proposition 5. *Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur un intervalle I, alors le produit fg est n fois dérivable sur I et :*
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \, g^{(n-k)} \; . \tag{1}$$

Démonstration : par récurrence sur n. Puisque par définition $f^{(0)} = f$, la formule est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour n. Si f et g sont dérivables $n+1$ fois sur I, alors pour tout $k = 0, \ldots, n$, le produit $f^{(k)}\, g^{(n-k)}$ est dérivable et sa dérivée est :

$$(f^{(k)}\, g^{(n-k)})' = f^{(k+1)}\, g^{(n-k)} + f^{(k)}\, g^{(n-k+1)}\ .$$

D'après (1), $(fg)^n$ est dérivable, comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. Sa dérivée s'écrit :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \left(\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} f^{(h)} g^{(n+1-h)}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \left(\sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} f^{(h)} g^{(n+1-h)}\right) \\
&\qquad + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\ .
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal. La formule est vraie pour $n+1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence. $\square$

À titre d'exemple, calculons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n(1+x)^2$. Posons $f\ : x \mapsto x^n$ et $g\ : x \mapsto (1+x)^2$. Alors :

$$f^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}\, x^2\ ,\ f^{(n-1)}(x) = n!\, x\ ,\ f^{(n)}(x) = n!\ ,$$

et

$$g'(x) = 2(1+x)\ ,\ g''(x) = 2\ , \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 3\ ,\ g^{(k)}(x) = 0\ .$$

Par application de (1),

$$(fg)^{(n)} = n!\,(1+x)^2 + 2n\, n!\, x(1+x) + \frac{n(n-1)}{2}\, n!\, x^2\ .$$

1.4 Théorème des accroissements finis

En un point où la dérivée d'une fonction s'annule, les accroissements de la fonction sont négligeables devant les accroissements de la variable. Souvent, c'est un point où les variations de la fonction changent de sens, donc un maximum ou un minimum.

Définition 6. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I. On dit que a est un*

- maximum local *de f si*

$$\exists \eta > 0\,,\ |x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant f(a)\ ,$$

- minimum local *de f si*

$$\exists \eta > 0\,,\ |x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant f(a)\ .$$

Insistons sur l'adjectif *local*. Il suffit que la valeur de f en a soit la plus grande des valeurs prises par f sur un petit intervalle autour de a pour que f soit un maximum local. Cette valeur n'est pas nécessairement la plus grande prise par f sur tout son domaine de définition (voir le graphe de la figure 3).

Théorème 4. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Si f présente un extremum (maximum ou minimum) local en un point a de I, et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration : Si a est un minimum local de f, alors c'est un maximum local de $-f$: quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que a est un maximum local.

$$\exists \eta > 0\,,\ |x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant f(a)\ .$$

Donc pour tout x dans l'intervalle $[a-\eta, a[$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \geqslant 0\ .$$

Pour tout x dans l'intervalle $]a, a+\eta[$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \leqslant 0\ .$$

D'où le résultat. □

Reprenons l'exemple de la figure 2 : $f\ : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$. La dérivée est :

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2-x^3}}\ .$$

Elle s'annule en $x = 2/3$, et f admet effectivement un maximum en ce point. Mais savoir que $f'(2/3) = 0$ permet seulement d'affirmer que la tangente en ce point est horizontale. Il se pourrait que la dérivée en un point soit nulle sans que la fonction admette un extremum en ce point : par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ en 0. D'autre part, une fonction peut présenter un extremum en a, sans être dérivable en ce point (par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$ en 0).

Voici un autre exemple (figure 3). Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \stackrel{f}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \quad 0 & \text{si} \quad x = 0\ . \end{cases} \end{array}$$

Le taux d'accroissement de f en 0 est $x\sin(1/x)$, qui tend vers 0. La dérivée de f

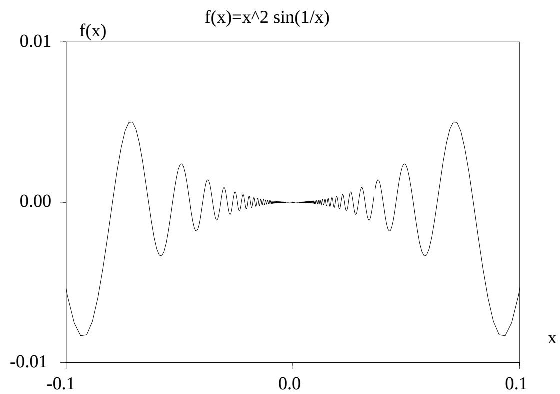

FIGURE 3 – Graphe de la fonction $x \mapsto x^2\sin(1/x)$.

en 0 est donc nulle. Pourtant, tout intervalle contenant 0, contient aussi des valeurs positives, et des valeurs négatives (et aussi une infinité d'extrema locaux).

Nous allons appliquer le théorème 4, pour démontrer le *théorème de Rolle*.

Théorème 5. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors la dérivée de f s'annule sur $]a,b[$.*

$$\exists c \in]a,b[\ , \quad f'(c) = 0\ .$$

Démonstration : Une application continue sur intervalle fermé borné, atteint sa borne inférieure m et sa borne supérieure M : il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tels que pour tout $x \in [a,b]$,

$$m = f(c_1) \leqslant f(x) \leqslant f(c_2) = M\ .$$

Si $m = M$, l'application f est constante sur $[a,b]$, et sa dérivée est identiquement nulle. Si $m < M$, alors l'une au moins de ces deux valeurs est différente de $f(a)$ (et donc de $f(b)$). Si $m < f(a)$, alors $c_1 \in]a,b[$ est un minimum pour f, et donc $f'(c_1) = 0$, d'après le théorème précédent. Si $M > f(a)$, alors c_2 est un maximum pour f, et donc $f'(c_2) = 0$. □

On en déduit le résultat le plus important de cette section, le *théorème des accroissements finis*.

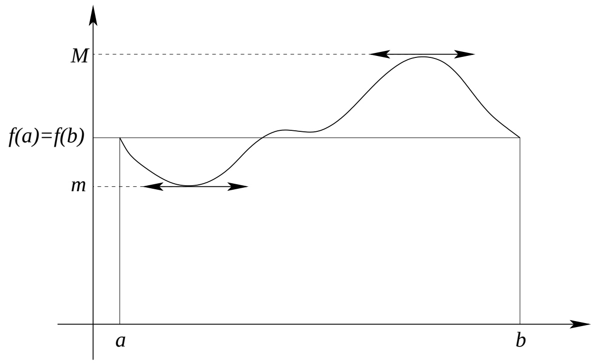

FIGURE 4 – Théorème de Rolle.

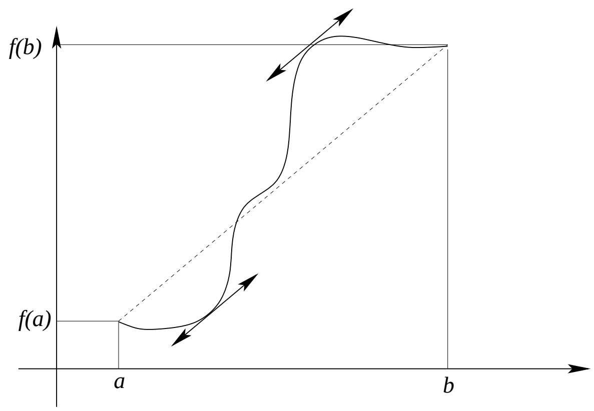

FIGURE 5 – Théorème des accroissements finis.

Théorème 6. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.*

$$\exists c \in]a, b[\ , \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \ .$$

Démonstration : Considérons la fonction g, qui à $x \in [a, b]$ associe

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \, x \ .$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. De plus, elle prend la même valeur en a et b :

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \ .$$

D'après le théorème de Rolle, la dérivée de g s'annule en un point c de $]a, b[$.

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \ .$$

D'où le résultat. □

Graphiquement, le théorème des accroissements finis dit que la courbe représentative de f sur $[a,b]$ possède au moins une tangente parallèle à la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (figure 5). Si $f(x)$ représente la position d'un mobile à l'instant x, le théorème des accroissements finis dit que en au moins un point, la vitesse instantanée doit être égale à la vitesse moyenne sur l'intervalle.

Le plus souvent en pratique, on ne sait rien de la valeur de c qui est telle que la tangente en c est parallèle à la sécante. Mais de son existence découlent des inégalités permettant d'obtenir des renseignements précis sur les accroissements de la fonction. Le théorème des accroissements finis permet aussi d'établir le lien entre le sens de variation de f et le signe de sa dérivée.

Proposition 6. *Soit I un intervalle ouvert non vide, et f une fonction dérivable sur I. La fonction f est :*
- *croissante sur I si et seulement si f' est positive ou nulle sur I,*
- *décroissante sur I si et seulement si f' est négative ou nulle sur I.*

Démonstration : La fonction f est croissante si et seulement si $-f$ est décroissante. Il suffit donc de démontrer le premier point. Si f est croissante, alors ses taux d'accroissement sont tous positifs ou nuls :

$$\forall x, y \in I \;, \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant 0 \;.$$

Comme la dérivée en chaque point est limite de taux d'accroissement, elle est aussi positive ou nulle.

Réciproquement, soient x et y deux points de I tels que $x < y$. Appliquons le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, y]$: il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geqslant 0 \;.$$

Donc $f(x) \leqslant f(y)$. □

Ce résultat n'est valable que sur un *intervalle* : la fonction $x \mapsto 1/x$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$, pourtant elle n'est pas décroissante. D'autre part, si la dérivée est strictement positive, alors la fonction est strictement croissante. La réciproque est fausse. La fonction peut être strictement croissante même si la dérivée s'annule en certains points (par exemple $x \mapsto x^3$).

Comme autre application du théorème des accroissements finis, il est possible d'obtenir la dérivée en un point comme prolongement par continuité de la dérivée calculée sur un intervalle.

Proposition 7. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si f' admet une limite finie en a, alors f est dérivable à droite en a et :*

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x) .$$

Démonstration : Soit $x \in]a, b]$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[a, x]$. Il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) .$$

Soit l la limite à droite de f' en a. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$a < x \leqslant a + \eta \implies |f'(x) - l| \leqslant \varepsilon .$$

Donc pour $a < x \leqslant a + \varepsilon$,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| \leqslant \varepsilon .$$

D'où le résultat. □

Ce résultat n'est qu'une condition suffisante. Il peut se faire que la dérivée existe sans qu'elle soit continue. Par exemple la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ a une dérivée nulle en 0 (figure 3). Pourtant sa dérivée en x, $2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, n'a pas de limite en 0.

1.5 Fonctions convexes

Définition 7. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. On dit que f est* convexe *sur I si et seulement si :*

$$\forall x, y \in I\ ,\ \forall \lambda \in [0, 1]\ , \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) . \tag{2}$$

Si $x < y$, et $\lambda \in [0, 1]$, alors $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est un point de l'intervalle $[x, y]$. La condition (2) dit que le point de la courbe représentative d'abscisse $\lambda x + (1 - \lambda)y$ doit être situé au-dessous du segment de sécante joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ (figure 6). En d'autres termes, tout *arc* de la courbe représentative doit être situé au-dessous de sa corde. De manière équivalente, la partie du plan située au-dessus de la courbe représentative est une région *convexe*, au sens où tout segment joignant deux de ses points est entièrement contenu dans la région.

Une fonction est dite *concave* si son opposée est convexe. Les propriétés sont inversées : tout arc est au-dessus de sa corde. La région du plan située *au-dessous* de la courbe représentative est convexe.

La fonction exponentielle est convexe, la fonction logarithme est concave. La fonction $x \mapsto x^a$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ pour $a \geqslant 1$, elle est concave pour $0 \leqslant a \leqslant 1$. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, concave sur $\mathbb{R}^-$, de même que la fonction $x \mapsto x^3$.

Voici une autre caractérisation de la convexité.

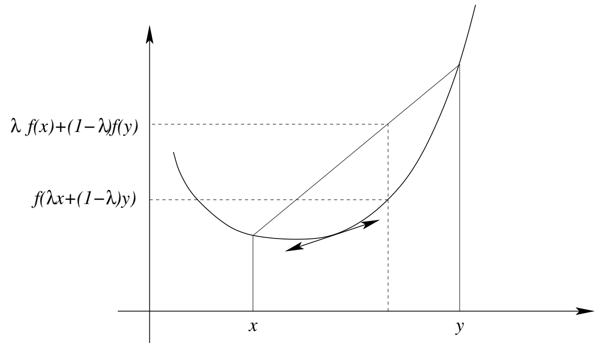

FIGURE 6 – Courbe représentative d'une fonction convexe.

Proposition 8. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. La fonction f est* convexe *sur I si et seulement si, pour tout $a \in I$ le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ est une fonction croissante de x sur $I \setminus \{a\}$.*

$$\forall x, y \in I \setminus \{a\}\,,\ x \leqslant y \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}\ .$$

Démonstration : Commmençons par la condition nécessaire. Soit $a \in I$ et $x, y \in I \setminus \{a\}$ tels que $x \leqslant y$. Trois cas sont possibles : $x \leqslant y < a$, $x < a < y$, $a < x \leqslant y$. Nous traitons le premier, les deux autres sont analogues. Soit $\lambda = (a-y)/(a-x)$. Alors $y = \lambda x + (1-\lambda)a$. Comme f est convexe,

$$f(y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(a) = \frac{a-y}{a-x} f(x) + \left(1 - \frac{a-y}{a-x}\right) f(a)\ .$$

On en déduit :

$$\frac{f(y)-f(a)}{a-y} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{a-x}\ ,$$

soit :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}\ .$$

Montrons maintenant la condition suffisante. Soient x et y deux points de I tels que $x < y$ et λ un réel dans $[0, 1]$. Posons $a = \lambda x + (1-\lambda)y$, et donc :

$$\lambda = \frac{y-a}{y-x} \quad \text{et} \quad (1-\lambda) = \frac{a-x}{y-x}\ .$$

Si $\lambda = 0$ ou 1, l'inégalité est vérifiée. Nous pouvons donc supposer que a est différent de x et y. Écrivons que le taux d'accroissement en a est croissant.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}\ .$$

En multipliant les deux membres par le produit $(a-x)(y-a)$, qui est positif, on obtient :

$$f(a)(y-x) \leqslant f(x)(y-a) + f(y)(a-x) \; .$$

En divisant par $(y-x)$ ceci donne :

$$f(a) \leqslant \frac{y-a}{y-x}\, f(x) + \frac{a-x}{y-x}\, f(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \; .$$

□

Corollaire 1. *Si une fonction f est convexe sur un intervalle* ouvert *I, alors elle est dérivable à gauche et à droite en tout point de I, et donc continue sur I.*

Démonstration : Si $a \in I$, le taux d'accroissement en a, $\tau_a(x)$, est une fonction croissante de x. Il admet donc en a une limite à gauche et une limite à droite finies. □

Ce résultat n'est pas valable si l'intervalle n'est pas ouvert. Par exemple la fonction qui vaut 0 sur $[0,1[$, et 1 au point 1 est convexe sur $[0,1]$, mais elle n'est pas continue en 1. Le fait qu'une dérivée à gauche et à droite existe, n'implique pas que la fonction soit dérivable. Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0. Lorsque la fonction est dérivable, sa dérivée est croissante.

Proposition 9. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction f est* convexe *sur I si et seulement si sa dérivée f' est* croissante *sur I.*

Démonstration : Commençons par la condition nécessaire. Soient x et y deux points de I, tels que $x < y$. Pour tout $z \in [x,y]$,

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \; .$$

En faisant tendre z vers x, on en déduit :

$$f'(x) \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \; .$$

De même, en faisant tendre z vers y,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant f'(y) \; .$$

Donc $f'(x) \leqslant f'(y)$.

Montrons maintenant la condition suffisante. Soient x, y deux points de I tels que $x < y$, $\lambda \in]0,1[$, et $a = \lambda x + (1-\lambda)y$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur les deux intervalles $[x,a]$ et $[a,y]$. Il existe $c_1 \in]x,a[$ et $c_2 \in]a,y[$ tels que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_1) \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(c_2) \; .$$

La fonction f' étant croissante, on a donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a} .$$

Comme nous l'avons déjà vu dans la démonstration de la proposition 8, ceci entraîne

$$f(a) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) .$$

□

Graphiquement, la pente de la tangente d'une fonction convexe est croissante. Dans la démonstration précédente, nous avons établi les inégalités :

$$f'(x) \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant f'(y) .$$

On en déduit que pour $x < y$,

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y - x) \quad \text{et} \quad f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x - y) .$$

Donc la courbe représentative de f reste *au-dessus* de ses tangentes (figure 6).

Corollaire 2. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction f est* convexe *sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est* positive ou nulle *sur I.*

Une fonction deux fois dérivable est *concave* si et seulement si sa dérivée seconde est *négative ou nulle*. Les points où la dérivée seconde s'annule et change de signe correspondent graphiquement à des points où la courbe représentative passe de concave à convexe où inversement. On les appelle des *points d'inflexion*.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un point de I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est dérivable en a, alors le taux d'accroissement de f en a est prolongeable par continuité en a.
2. ☐ Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue sur un intervalle ouvert contenant a.
3. ☒ Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.
4. ☒ Si f est dérivable à gauche en a, alors f est continue à gauche en a.
5. ☐ Si f est dérivable à gauche et à droite en a, alors f est dérivable en a.
6. ☐ Si la dérivée de f en a est nulle, alors la tangente à la courbe représentative de f en a est verticale.
7. ☒ Si la tangente à la courbe représentative de f en a est verticale, alors f n'est pas dérivable en a.

Vrai-Faux 2. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ La dérivée de $f + g$ est la somme des dérivées de f et de g.
2. ☐ La dérivée de fg est le produit des dérivées de f et de g.
3. ☒ Le quotient f/g est dérivable en tout point où g ne s'annule pas.
4. ☒ La fonction $x \mapsto \exp(f(x)g(x))$ est dérivable sur I.
5. ☐ La fonction $x \mapsto f(\exp(x))$ est toujours dérivable sur I.

Vrai-Faux 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors f' est continue sur I.
2. ☐ Si f' est dérivable sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
3. ☒ Si f' est dérivable sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
4. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors ses dérivées successives sont toutes continues sur I.
5. ☐ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $|f|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
6. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I, alors $|f|$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I.
7. ☒ Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors $x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Vrai-Faux 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☐ Si la dérivée de f s'annule en un point de I, alors ce point est un extremum local pour f.
2. ☒ Si f prend la même valeur en deux points distincts, alors la dérivée de f s'annule entre ces deux points.
3. ☐ Si f admet un maximum local, alors f admet un maximum global.
4. ☒ Si f admet un maximum local, alors la dérivée de f s'annule en ce point.
5. ☒ Si la dérivée de f est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
6. ☒ Si la dérivée de f est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
7. ☐ Si f est strictement croissante sur I, alors sa dérivée est strictement positive sur I.
8. ☒ Si x et y sont deux points distincts tels que $f(y) - f(x) = y - x$, alors il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = 1$.

Vrai-Faux 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. ☒ Si f est convexe sur I, alors f est continue sur I.
2. ☒ Si f est convexe sur I, alors f est dérivable à droite en tout point de I.
3. ☐ Si f est convexe sur I, alors f est dérivable en tout point de I.
4. ☒ Si f est convexe et dérivable sur I, alors la dérivée de f est croissante sur I.
5. ☐ Si f et convexe et dérivable sur I, alors f est deux fois dérivable sur I.
6. ☒ Si f est deux fois dérivable sur I, et si sa dérivée seconde est positive, alors f est convexe sur I.
7. ☐ Si f est convexe et deux fois dérivable sur I, alors sa dérivée seconde ne s'annule pas sur I.

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. Donner une expression explicite du taux d'accroissement de f en un point a quelconque du domaine de définition.
2. Calculer la limite en a de ce taux d'accroissement et retrouver l'expression de la dérivée de f en a.

$$f(x)=x^2\ ;\quad f(x)=\sqrt{x}\ ;\quad f(x)=x\sqrt{x}\ ;$$
$$f(x)=\mathrm{e}^x\ ;\quad f(x)=x\mathrm{e}^x\ ;\quad f(x)=\ln(x)\ ;$$
$$f(x)=\sin(x)\ ;\quad f(x)=\cos(x)\ ;\quad f(x)=x\sin(x)\ .$$

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. On suppose que f et g sont dérivables en $a\in I$ et que $g'(a)\neq 0$. Montrer que :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}\ .$$

(C'est la « Règle de l'Hôpital »).

Exercice 3. Pour chacune des applications f définies ci-dessous :

1. Verifiez que f est prolongeable par continuité en 0.
2. L'application prolongée est-elle dérivable en 0 ?

$$f(x)=x|x|\ ;\quad f(x)=\frac{x}{1+|x|}\ ;\quad f(x)=\frac{1}{1+|x|}\ ;$$
$$f(x)=\cos(\sqrt{x})\ ;\quad f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\ ;\quad f(x)=\frac{x\cos(1/x)}{\ln(|x|)}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{x}\ln|x|\ ;\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sqrt{x}}\ ;\quad f(x)=\frac{\sin(x)}{\ln|x|}\ .$$

Exercice 4. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Soit I un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{D}_f$. Démontrer que f est dérivable sur I.
3. Calculer l'expression de la dérivée de f.

$$f(x)=(x(x-2))^{1/3}\ ;\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ ;\quad f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{(x^2+1)^3}\ ;\quad f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{1/3}}\ ;\quad f(x)=\frac{(1+\sqrt{x}^2)}{1+(x+1)^{1/3}}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}\ ;\quad f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ ;\quad f(x)=\frac{x+\ln(x)}{x-\ln(x)}\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{1+x^2\sin^2(x)}\ ;\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}^{1/x}+1}{\mathrm{e}^{1/x}-1}\ ;\quad f(x)=\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\ ;$$
$$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ;\quad f(x)=(\cos(x))^{\sin(x)}\ ;\quad f(x)=\ln\sin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\ .$$

Exercice 5. Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, sur un intervalle $[a,b]$:

1. Démontrer que f est dérivable sur $]a,b[$.
2. La fonction f est-elle dérivable à droite en a ?
3. La fonction f est-elle dérivable à gauche en b ?

$$f(x)=\sqrt{x(1-x)} \text{ sur } [0,1]\ ; \quad f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1-x)} \text{ sur } [-1,1]\ ;$$
$$f(x)=x^{2/3}(1-x)^{3/2} \text{ sur } [0,1]\ ; \quad f(x)=(1-x^2)^{2/3}(1-x)^{1/3} \text{ sur } [-1,1]\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{x\sin(x)(1-\sin(x))} \text{ sur } [0,\pi/2]\ ;$$
$$f(x)=\sqrt{(1-\cos(x))(1-\sin(x))} \text{ sur } [0,\pi/2]\ .$$

Exercice 6. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, calculer la dérivée d'ordre k des fonctions suivantes.

$$x\mapsto \frac{1}{1+x}\ ; \quad x\mapsto\frac{1}{1-x}\ ; \quad x\mapsto \ln(1-x^2)\ ;$$
$$x\mapsto x^2\,\mathrm{e}^x\ ; \quad x\mapsto x^2\ln(1+x)\ ; \quad x\mapsto x^2(1+x)^n\ ;$$
$$x\mapsto\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\ ; \quad x\mapsto \mathrm{e}^x\sin(x)\ ; \quad x\mapsto\cos^3(x)\ .$$

Exercice 7.

1. Déterminer les réels α et β tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x\leqslant 0\\ \alpha x+\beta & \text{si } x>0\ .\end{cases}$$
2. Déterminer les réels α, β et γ tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x\leqslant 0\\ \alpha x^2+\beta x+\gamma & \text{si } x>0\ .\end{cases}$$
3. Déterminer les réels α et β tels que la fonction f définie ci-dessous soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
$$f(x)=\begin{cases} x^2\mathrm{e}^{1-x}-2 & \text{si } x\geqslant 1\\ \alpha x\mathrm{e}^{\beta x^2} & \text{si } x<1\ .\end{cases}$$

Exercice 8. On dit qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *paire* si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(-x)$. On dit qu'elle est est *impaire* si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-f(-x)$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 9. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$h(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{si} \quad x < a \\ 0 & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ f(x-b) & \text{si} \quad x > b\ . \end{cases}$$
Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Représenter graphiquement h pour $a = 1$ et $b = 2$.

Exercice 10. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, dérivable à gauche et à droite en tout point de $]a,b[$. On suppose que f est continue à gauche en a, à droite en b et que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que le produit de la dérivée à gauche en c par la dérivée à droite en c soit négatif ou nul.

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, telle que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0)\ .$$
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 12. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$.

1. Montrer que le théorème de Rolle s'applique à la fonction
$$x \longmapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)\ .$$
2. En déduire qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On suppose que f' est croissante sur $]0,+\infty[$. Démontrer que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x)/x$ est croissante.

Exercice 14.

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.
2. Soient a et b deux réels et n un entier naturel. Montrer que l'équation $x^n + ax + b = 0$ a au plus trois solutions réelles.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $x^n+x^{n-1}+x^2+x-1=0$ a une seule solution réelle positive.
4. Soit a un réel positif et n un entier naturel pair. Montrer que l'équation $(x+a)^n = x^n+a^n$ admet $x=0$ pour seule solution réelle.

Exercice 15.

1. Soient α, β et γ trois réels. On considère la fonction f définie par
$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma\ .$$
Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Déterminer le point $c\in\,]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ .$$
2. Soient α, β et γ trois réels. On considère la fonction f définie par
$$f(x)=\alpha+\beta x+\gamma \mathrm{e}^x\ .$$
Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Déterminer le point $c\in\,]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ .$$

Exercice 16. Utiliser le théorème des accroissements finis pour donner un majorant des réels suivants. Comparer ce majorant avec une approximation numérique à 10^{-6} près.

$$\sqrt{10001}-100\ ;\quad \frac{1}{0.998}-1\ ;\quad 0.001-\frac{1}{1003}\ ;$$
$$\sin(3.14)\ ;\quad 1-\cos(0.002)\ ;\quad 1-\sin(1.57)\ ;$$
$$\ln(1.001)\ ;\quad \ln(2.72)-1\ ;\quad \mathrm{e}^{0.002}-1\ .$$

Exercice 17.

1. (a) Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$. Montrer que :
$$\frac{1}{2\sqrt{b}}<\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}<\frac{1}{2\sqrt{a}}\ .$$
(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\ .$$
Démontrer que pour tout n,
$$S_{n+1}-1<2\sqrt{n+1}<S_n\ .$$

2. (a) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a} \; .$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \; .$$

   Démontrer que pour tout n,

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n \; .$$

Exercice 18.

1. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction exponentielle pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \; .$$

   (b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1 - x)/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \; .$$

2. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction logarithme pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \; .$$

   (b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\ln(1+x) - x)/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \; .$$

3. (a) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction cosinus pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 \; .$$

   (b) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (1 - \cos(x))/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \; .$$

(c) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\sin(x) - x)/x$ pour démontrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0 \ .$$

(d) Utiliser le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $x \mapsto (\sin(x) - x)/x^2$ pour démontrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \ .$$

Exercice 19. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in \,]a, b[\,$, $f''(x) \leqslant 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$.

Exercice 20. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$ et $f''(x) \geqslant 0$.

1. Montrer que si f est majorée alors f est constante.
2. Montrer que si f n'est pas majorée, alors :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \ .$$

3. Montrer que la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)/x$ existe, et qu'elle est soit infinie, soit finie et strictement positive.
4. Soit $f \ : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$. Montrer que f vérifie les hypothèses de l'exercice, et calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)/x$.

Exercice 21. Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I, dérivable en un point $c \in I$, et telle que $f'(c) = 0$. Montrer que c est un minimum global pour f sur I :

$$\forall x \in I \ , \quad f(c) \leqslant f(x) \ .$$

Exercice 22.

1. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ .$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ .$$

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Exercice 23. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \ .$$

2. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1 \ .$$

Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant 1 \ .$$

3. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \ .$$

4. Soit $p > 1$. Démontrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \ .$$

(On posera $q = p/(p-1)$ et $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$).

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit f la fonction $x \mapsto x^3$ et τ_1 le taux d'accroissement de f au point 1.

$\boxed{\text{A}}$ Le taux d'accroissement τ_1 est une fonction de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ Le taux d'accroissement τ_1 est égal à 3.

$\boxed{\text{C}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tau_1(x) = x^2 + x + 1$.

$\boxed{\text{D}}$ Le taux d'accroissement τ_1 n'admet pas de limite quand x tend vers 1.

$\boxed{\text{E}}$ Le taux d'accroissement τ_1 est prolongeable par continuité en 1.

Question 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{G}_f$ son graphe, et a un point de $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ Si $\mathcal{G}_f$ admet une tangente au point $(a, f(a))$, alors f est dérivable en a.

$\boxed{\text{B}}$ Si f n'est pas dérivable en a, alors f n'est pas continue en a.

$\boxed{\text{C}}$ Si f est dérivable en a, alors au voisinage de a $(f(x) - f(a)) = o(x - a)$.

$\boxed{\text{D}}$ Si f admet une dérivée nulle en a, alors $\mathcal{G}_f$ admet une tangente horizontale au point $(a, f(a))$.

$\boxed{\text{E}}$ Si le taux d'accroissement de f en a tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, alors $\mathcal{G}_f$ admet une tangente verticale au point $(a, f(a))$.

Question 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^{-2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

$\boxed{\text{A}}$ La dérivée de f en 0 est nulle.

$\boxed{\text{B}}$ La dérivée de f en $x \neq 0$ est $-2x\mathrm{e}^{-x^{-2}}$.

$\boxed{\text{C}}$ Le graphe de f admet une tangente verticale en 0.

$\boxed{\text{D}}$ La dérivée de f en 1 est $2/\mathrm{e}$.

$\boxed{\text{E}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ les dérivées de f en x et en $-x$ sont égales.

Question 4. Soit f la fonction qui à $x \in [-1, 1]$ associe $(1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.

$\boxed{\text{A}}$ La fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$.

$\boxed{\text{B}}$ La fonction f est dérivable à droite en -1.

$\boxed{\text{C}}$ Le graphe de f admet une tangente verticale en 1.

$\boxed{\text{D}}$ La dérivée de f en 0 est nulle.

$\boxed{\text{E}}$ La dérivée et la dérivée seconde de f prennent la même valeur en 0.

Question 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

$\boxed{\text{A}}$ La dérivée n-ième de $x \mapsto 1/(x - 1)$ est $x \mapsto (-1)^n (n!)/(x - 1)^{n+1}$.

$\boxed{\text{B}}$ La dérivée seconde de $x \mapsto x/(x - 1)$ s'annule en 0.

$\boxed{\text{C}}$ La dérivée troisième de $x \mapsto \ln |x - 1|$ est $x \mapsto 2/(x - 1)^2$.

$\boxed{\text{D}}$ La dérivée seconde de $x \mapsto \ln|x^2-1|$ est $x \mapsto 1/(x-1)^2 + 1/(x+1)^2$.

$\boxed{\text{E}}$ La dérivée troisième de $x \mapsto x/(x-1)$ est $x \mapsto -6/(x-1)^4$.

Question 6. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels.

$\boxed{\text{A}}$ Si f présente un maximum local en a, alors $f'(a)=0$.

$\boxed{\text{B}}$ Si $f'(a)=0$, alors f présente un extremum local en a.

$\boxed{\text{C}}$ Si $f(a)=f(b)$, alors f atteint son maximum sur $[a,b]$.

$\boxed{\text{D}}$ Si $f(a)=f(b)$, alors f présente un extremum local en un point de $]a,b[$.

$\boxed{\text{E}}$ S'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$, alors $f(a)=f(b)$.

Question 7. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

$\boxed{\text{A}}$ La fonction f est croissante sur $[0,1]$.

$\boxed{\text{B}}$ Il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c)=1$.

$\boxed{\text{C}}$ Pour tout $c \in]0,1[$, $f'(c) \neq 0$.

$\boxed{\text{D}}$ La fonction $f(x)-x$ admet un extremum local sur $]0,1[$.

$\boxed{\text{E}}$ La fonction $f(x)/x$ admet un extremum local sur $]0,1[$.

Question 8. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ Si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ Si f' est négative ou nulle sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Si f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{D}}$ Si f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

$\boxed{\text{E}}$ Si $x \mapsto f(x)-x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Question 9. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{A}}$ Si f est convexe sur $]0,1[$ alors f est continue sur $]0,1[$.

$\boxed{\text{B}}$ Si pour tout $\lambda \in]0,1[$, $f(\lambda) \leqslant \lambda f(1) + (1-\lambda) f(1)$, alors f est convexe sur $[0,1]$.

$\boxed{\text{C}}$ Si f est convexe sur $[0,1]$ et $f(0)=f(1)$, alors il existe $c \in]0,1[$ tel que la dérivée de f en c existe et soit nulle.

$\boxed{\text{D}}$ Si f est dérivable en un point c de $]0,1[$, alors $f'(c)$ est inférieure à $f(1)-f(0)$.

$\boxed{\text{E}}$ Si f est convexe sur $[0,1]$ et $f(0)=0$, alors la fonction $x \mapsto f(x)/x$ est croissante sur $]0,1[$.

Question 10. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $x^3 - x^2$.

$\boxed{\text{A}}$ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{B}}$ La fonction f présente un maximum local en 0.

$\boxed{\text{C}}$ La fonction f présente un minimum global en $2/3$.

$\boxed{\text{D}}$ La fonction f est convexe sur $[1/3, +\infty[$.

$\boxed{\text{E}}$ La fonction f est croissante sur $[1/3, +\infty[$.

Réponses : 1–AE 2–DE 3–AD 4–AE 5–AE 6–AD 7–BD 8–BC 9–AE 10–BD

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un point de $\mathbb{R}$.

1. Qu'appelle-t-on *taux d'accroissement* de f en a ?
2. Quand dit-on que la fonction f est dérivable en a ?
3. Démontrer que f est dérivable en a si et seulement si, au voisinage de 0 :
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)\ .$$
4. Quand dit-on que f est *convexe* sur $\mathbb{R}$?
5. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, que peut-on dire du taux d'accroissement de f en a ? Que peut-on dire de la dérivée de f en a ?

Exercice 1 : On admettra dans cet exercice les limites suivantes.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\ .$$

1. Démontrer que :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0\ .$$
2. Soit a un réel quelconque. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable en a, et que sa dérivée est $\cos(a)$.
3. Soit a un réel quelconque. Démontrer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable en a, et que sa dérivée est $-\sin(a)$.
4. Soit a un réel quelconque. Démontrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable en a, et que sa dérivée est e^a.
5. Soit a un réel strictement positif. Démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable en a, et que sa dérivée est $1/a$.

Exercice 2 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe :
$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|\ .$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$, strictement décroissante sur $]-1,1[$.

2. Calculer la dérivée seconde de f. Montrer que f est convexe sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$, concave sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
3. Soit a un réel. Soit φ_a la fonction qui à $x \neq a$ associe $1/(x-a)$. Démontrer que la dérivée n-ième de φ_a est la fonction définie par :

$$\forall x \neq a \;, \quad \varphi_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}} \;.$$

4. En déduire la dérivée n-ième de f, pour tout entier $n \geqslant 1$.
5. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on pose $g(x) = xf(x)$. Calculer la dérivée seconde de g. En déduire que g est concave sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.
6. Montrer que g admet un maximum global en 0. Vérifier que $g'(0) = 0$ et $g'(0) < 0$.
7. Pour tout entier $n \geqslant 2$, donner l'expression de la dérivée n-ième de g en fonction de n.

Exercice 3 : Soit f une fonction de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]0, +\infty[$.

1. On suppose que $f'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\; \exists A > 0 \;, \quad (x > A) \implies \left| \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \right| \leqslant \varepsilon \;.$$

2. En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \;.$$

3. Soit l un réel. On suppose que $f'(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$. Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \;.$$

(Indication : considérer la fonction $x \mapsto f(x) - lx$).

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. Le taux d'accroissement de f en a est l'application notée τ_a, qui à $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ associe :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;.$$

2. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie en a. Cette limite est la dérivée de f en a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;.$$

3. Le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ admet $f'(a)$ pour limite en a si et seulement si :
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h} = 0 \;.$$
Par définition, ceci équivaut à dire que $f(a+h)-f(a)-hf'(a)$ est négligeable devant h, au voisinage de 0 :
$$f(a+h)-f(a)-hf'(a) = o(h) \;.$$

4. On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}$ si :
$$\forall x,y\in\mathbb{R}\,,\ \forall\lambda\in[0,1]\,,\quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\;.$$

5. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors le taux d'accroissement de f en a est une fonction croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$. Comme une fonction croissante admet une limite à gauche et à droite en tout point, la dérivée à gauche et la dérivée à droite de f en a existent. Mais elles ne sont pas forcément égales et f n'est pas forcément dérivable en a.

Exercice 1 :

1. Exprimons $\cos(x)-1$ à l'aide de $\sin(x/2)$.
$$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{-2\sin^2(x/2)}{x} = -\frac{x}{2}\,\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\;.$$
Or :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \implies \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = 1\;.$$
Donc :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{2} = 0\;.$$

2. Écrivons le taux d'accroissement en a, évalué en $a+h$:
$$\begin{aligned}\tau_a(a+h) &= \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}\\ &= \frac{1}{h}\Big(\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)\Big)\\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h}\;.\end{aligned}$$
On sait que :
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0 \quad\text{et}\quad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1\;.$$
Donc :
$$\lim_{h\to 0}\tau_a(a+h) = \cos(a)\;.$$

3. Écrivons le taux d'accroissement en a, évalué en $a+h$:

$$\begin{aligned}\tau_a(a+h) &= \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}\\ &= \frac{1}{h}\Big(\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)\Big)\\ &= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(a)\frac{\sin(h)}{h}\;.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(a+h) = -\sin(a)\;.$$

4. Écrivons le taux d'accroissement en a, évalué en $a+h$:

$$\tau_a(a+h) = \frac{\mathrm{e}^{a+h}-\mathrm{e}^a}{h} = \mathrm{e}^a\,\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}\;.$$

On sait que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = 1\;.$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(a+h) = \mathrm{e}^a\;.$$

5. Écrivons le taux d'accroissement en a, évalué en $a+h$:

$$\tau_a(a+h) = \frac{\ln(a+h)-\ln(a)}{h} = \frac{\ln(1+h/a)}{h} = \frac{1}{a}\,\frac{\ln(1+h/a)}{h/a}\;.$$

On sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad\text{donc}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+h/a)}{h/a} = 1\;.$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(a+h) = \frac{1}{a}\;.$$

Exercice 2 :

1. Exprimons $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big)\;.$$

La fonction $y \mapsto \ln|y|$ est définie pour tout $y \neq 0$, donc $f(x)$ est défini pour tout x différent de -1 et de 1.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\;.$$

La fonction $y \mapsto \ln |y|$ est dérivable pour tout $x \neq 0$ et sa dérivée est $y \mapsto 1/y$. Les fonctions $x \mapsto |x-1|$ et $x \mapsto |x+1|$ sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (comme fonctions polynômes). Donc f est dérivable, comme combinaison linéaire de deux fonctions qui sont elles mêmes composées de deux fonctions dérivables. On trouve :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2-1} \;.$$

Pour x dans $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$, $x^2+1>0$, donc $f'(x)>0$, donc f est strictement croissante sur ces intervalles. Pour x dans $]-1,1[$, $x^2-1<0$, donc $f'(x)<0$, donc f est strictement décroissante sur $]-1,1[$.

2. On trouve :

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \;.$$

La dérivée seconde de f est positive pour $x<0$, négative pour $x>0$. Donc f est convexe sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,0]$, concave sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

3. Démontration par récurrence. La formule est vraie pour $n=0$:

$$\varphi_a^{(0)}(x) = \frac{1}{x-a} = \frac{(-1)^0 0!}{(x-a)^1} \;.$$

Supposons-la vraie pour n. Alors :

$$\varphi_a^{(n+1)}(x) = (\varphi_a^{(n)})'(x) = -(n+1)\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-a)^{n+2}} \;.$$

La formule est vraie pour $n+1$, elle est donc vraie pour tout n.

4. Pour $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de f est la dérivée $(n-1)$-ième de f'. Or :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \;.$$

Par linéarité, on en déduit :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}\right) \;.$$

5. On obtient :

$$g'(x) = xf'(x) + f(x) \quad \text{et} \quad g''(x) = xf''(x) + 2f'(x) \;.$$

En utilisant les expressions des questions 1 et 2 :

$$g''(x) = -\frac{2x^2}{(x^2-1)^2} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{-2}{(x^2-1)^2} \;.$$

La dérivée seconde de g est négative en tout point où elle est définie, donc g est concave sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

6. La fonction f est croissante sur $]-\infty,-1[$. Or la limite de f en $-\infty$ est nulle. Donc f est positive sur $]-\infty,-1[$. La fonction f est décroissante sur $]-1,0[$. Or $f(0)=0$. Donc f est positive sur $]-1,1[$. Donc $g(x)=xf(x)$ est négative pour tout x négatif.

   On montre de la même façon que g est négative sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (ou bien en remarquant que pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $g(-x)=g(x)$). Donc :
$$\forall x\in\mathcal{D}_f\;,\quad g(x)\leqslant 0=g(0)\;.$$
   Donc g admet bien un maximum global en 0. On constate que :
$$g'(0)=0f'(0)+f(0)=0\quad\text{et}\quad g''(0)=\frac{-2}{(0-1)^2}=-2\;.$$
   (Ceci entraîne que 0 est un maximum local, mais ne permet pas d'affirmer que c'est un maximum global).

7. En utilisant la formule de Leibniz :
$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!x}{(x-1)^n}-\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!x}{(x+1)^n}\right)\\ &\qquad +\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n-2}n(n-2)!}{(x-1)^{n-1}}-\frac{(-1)^{n-2}n(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}\right)\;. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Par hypothèse, il existe A tel que pour tout $x>A$, $|f'(x)|\leqslant\varepsilon$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x>A$, il existe $c\in]A,x[$ tel que :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)\;.$$
   Puisque $c>A$, on a bien :
$$\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\right|=|f'(c)|\leqslant\varepsilon\;.$$

2. Soit $\varepsilon>0$. Fixons A tel que pour tout $x>A$,
$$\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\;.$$
   Pour $x>A$, écrivons :
$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\frac{x-A}{x}\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}+\frac{f(A)}{x-A}\right|\leqslant\frac{x-A}{x}\left(\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\right|+\left|\frac{f(A)}{x-A}\right|\right)\;.$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(A)}{x-A} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-A}{x} = 1\ .$$

Il existe A_1 tel que pour tout $x > A_1$:

$$\left|\frac{f(A)}{x-A}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

D'autre part, il existe A_2 tel que pour tout $x > A_2$:

$$0 < \frac{x-A}{x} \leqslant 2\ .$$

Pour tout $x > \max\{A, A_1, A_2\}$, on a donc :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon\ .$$

D'où le résultat.

3. Soit g la fonction qui à x associe $f(x) - lx$: elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = f(x) - l$. Donc $g'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-lx}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - l = 0\ .$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l\ .$$

3 Compléments

3.1 Newton et Leibniz

Les problèmes de quadrature (intégration) et de tangente (dérivation) ont passionné de nombreux mathématiciens depuis Archimède. Les premiers à avoir compris le rapport entre les deux sont Isaac Newton (1643-1727) et Gottfried Wilhem von Leibniz (1646-1716). Ils sont maintenant considérés comme co-inventeurs du calcul différentiel.

Pourtant la controverse a longtemps fait rage, du vivant de Newton et Leibniz, et pendant encore de nombreuses années après leur mort. Les uns, à la suite de Newton lui-même, accusaient Leibniz de plagiat, car il aurait eu accès à des manuscrits non publiés de Newton. Les autres prouvaient sans conteste l'antériorité des publications de Leibniz et la supériorité de son système de notation. Il semble bien que Newton avait effectivement développé ses idées avant Leibniz, mais que, même si ce dernier a eu accès à des manuscrits de Newton, il a travaillé de façon indépendante. La controverse, qui paraît de nos jours plutôt futile, eut pour conséquence de couper pendant longtemps les mathématiciens anglais du reste de l'Europe : ce n'est qu'au début du XIX^{e} siècle que les notations de Leibniz furent acceptées en Angleterre.

Voici comment, dans *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), Newton exprime sa vision des dérivées.

> Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut.

La vision de Newton est très proche de notre définition moderne de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement. C'est d'autant plus remarquable que la notion de limite ne sera définie rigoureusement, que presque deux siècles après les premières découvertes de Newton. L'intuition de Newton est puissante, mais lui-même sent bien qu'il n'a pas défini ses quantités infinitésimales de manière suffisamment rigoureuse. D'ailleurs elles resteront longtemps pour beaucoup un « fantôme de quantités disparues ». Peut-être est-ce une des raisons pour lesquelles Newton, dont les premiers travaux sur le sujet datent de 1664, n'achèvera son ouvrage « la méthode des fluxions et des suites infinies » qu'en 1671, et ne le publiera pas de son vivant... contrairement à Leibniz.

Par un clin d'œil de l'histoire, les noms de Newton et Leibniz sont restés attachés à deux formules extrêmement proches.

formule de Newton	formule de Leibniz
$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k\, g^{n-k}$	$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$.

3.2 Le calcul différentiel indien

Le verset 12 des « Harmonies Célestes » [1], écrit en 499 par Āryabhata est une collection de 24 nombres :

$$225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7$$

Il faut comprendre ces nombres comme les différences successives entre les demi-cordes des angles obtenus en divisant en 24 parties égales un quart de cercle de rayon 3428 (la somme des 24 valeurs). En clair : les 24 sommes cumulées, divisées par 3428 sont des valeurs approchées de $\sin(k\pi/48)$, pour k allant de 1 à 24. Faites le calcul : la différence maximale en valeur absolue entre les valeurs d'Āryabhata et les valeurs exactes est de $2\,.\,10^{-4}$: pas si mal pour quelqu'un qui ne travaillait qu'avec des entiers ! Un peu plus loin, Āryabhata montre qu'il avait finement observé la décroissance de ses tables de différences : « Les différences sont diminuées des quotients successifs des sinus par le premier sinus ». En clair, si S_k désigne la k-ième valeur cumulée :

$$S_{k+1} - S_k \simeq S_k - S_{k-1} - \frac{S_k}{225}\;.$$

Ramené aux différences de sinus successifs, Āryabhata n'est pas loin d'exprimer un double taux d'accroissement :

$$\frac{\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} - \frac{\sin(x)-\sin(x-h)}{h}}{h} \simeq \sin''(x) = -\sin(x)\;.$$

Mais parler de dérivée seconde au temps d'Āryabhata serait anachronique, d'autant plus que sa règle ne s'appliquait qu'aux multiples de $\pi/48$. Le premier astronome indien à formuler une règle de calcul approchée générale pour de petites différences de sinus est Mañjula (932) :

$$\sin(x+h) - \sin(x) \simeq h\cos(x)\;.$$

Cette règle empirique sera reprise par Āryabhata II (950) et Bhāskara II (1150). Ce dernier donne une justification géométrique de la formule, et est parfaitement conscient qu'elle est d'autant meilleure que h est petit : il parle à cette occasion d'« immesurablement petit ». Il exprime même les notions de « différence instantanée de sinus » et « mouvement instantané ». Cela suffit-il pour en faire l'inventeur des dérivées ? Peut-être pas car il ne dit jamais explicitement que le cosinus est la dérivée du sinus. Pourtant il est conscient du fait que quand une fonction atteint son maximum, sa « différence instantanée » s'annule. Il observe aussi que quand une planète est à son apogée ou à son périgée, la différence entre sa position observée et sa position prédite pour un mouvement uniforme s'annule *et il en déduit qu'en un certain point intermédiaire l'incrément de cette quantité doit aussi s'annuler* : c'est le théorème de Rolle !

1. B. Datta, A.N. Singh : the use of calculus in Hindu mathematics, *Indian Journal of History of Science 19(2) p. 95–104 (1984)*

Du XIVe au XVIe siècle, à la suite de Madhava (1340–1425) une importante école d'astronomie fleurit dans l'état du Kérala, au Sud de l'Inde. Fidèles à la tradition de leurs ancêtres, ces astronomes développent encore le calcul différentiel. Ainsi le théorème des valeurs intermédiaires sera énoncé explicitement au XVe siècle par Parameshvara (1370–1460) dans « Lilavati Bhasya » qui est un commentaire du Lilavati de Bhāskara.

Certains ont accusé Newton et Leibniz d'avoir, deux siècles plus tard, pillé les résultats des mathématiciens du Kérala. C'est oublier un peu vite que, malgré des algorithmes d'approximations impressionnants, ceux-ci n'ont jamais défini les notions de dérivée et d'intégrale, ni surtout établi leur réciprocité. Il n'existe aucune preuve que les résultats de l'école du Kérala aient été connus en dehors de l'Inde avant le XIXe siècle. Mais peut-être serez-vous tentés de répondre à la question « qui de Newton ou Leibniz a inventé le calcul infinitésimal ? » par : ni l'un ni l'autre !

3.3 Le dernier disciple de Galilée

Pour Vincenzio Viviani [2], tout commence en 1639. Galilée, alors âgé de 75 ans et devenu aveugle, cherche quelqu'un pour l'aider dans ses travaux. À 17 ans, Viviani, issu d'une famille aisée de la noblesse florentine, se signale par son talent précoce pour les mathématiques. Galilée apprécie la tournure d'esprit et le goût pour les études du jeune homme, et en fait son pensionnaire à Arcetri, sur les collines de Florence. Jusqu'à la mort de Galilée trois ans plus tard, Viviani sera le lecteur et le secrétaire du grand homme. Galilée en vint à considérer Viviani comme un fils, et Viviani conçut pour celui qui l'avait ainsi adopté un attachement profond, qu'il manifesta pendant les 60 ans qu'il devait lui survivre, et même au-delà. Après la condamnation de Galilée par l'Inquisition, et l'interdiction faite de l'enterrer en terre consacrée, il faudra longtemps avant que ses restes puissent reposer dans le caveau familial de l'église Santa Croce à Florence. Ce ne fut fait qu'en 1737, 34 ans après la mort de Viviani qui avait laissé par testament des intructions précises pour l'édification du tombeau de Galilée, auprès duquel ses propres restes furent placés.

Les trois ans passés auprès du vieux sage marquèrent définitivement Viviani, qui devint lui-même un savant reconnu, membre de plusieurs académies européennes, dont l'Académie des Sciences de Paris, où Fontenelle prononça son éloge.

> Partout il se nomme le dernier disciple de Galilée [. . .] ; jamais il ne met son nom à un ouvrage sans l'accompagner de cette qualité ; jamais il ne manque une occasion de parler de Galilée et quelquefois même, ce qui fait encore mieux l'éloge de son cœur, il en parle sans beaucoup de nécessité ; jamais il ne nomme le nom de Galilée sans lui rendre un hommage ; et l'on sent bien que ce n'est point pour s'associer en quelque sorte au mérite de ce grand homme et en faire rejaillir une partie sur lui ; le style de la tendresse est bien aisé à reconnaître d'avec celui de la vanité.

2. F. Waquet : *Viviani, le disciple chéri de Galilée. L'Histoire 356, p. 68–73 (2010)*

Quant à l'homme, voici le portrait plutôt flatteur d'un contemporain.

> de mœurs honnêtes et pures ; de manières exquises ; d'aspect agréable ; avec toujours un air de gaieté sur le visage ; modéré dans ses paroles, très apprécié dans sa conversation. Il était plutôt grand de taille, avait la peau claire et les cheveux bruns ; ses yeux d'un léger bleu turquoise étaient toujours vifs et brillants.

Élève d'un des savants les plus novateurs de son époque, Viviani se signale pourtant par sa fidélité à la géométrie des classiques grecs [3]. Il s'était fait connaître pour avoir reconstitué un texte d'Appolonius, que l'on croyait perdu, mais qui fut retrouvé dans une traduction arabe avant que Viviani ait terminé son travail de divination. La proximité entre la traduction de l'original et la reconstitution de Viviani, établit la réputation de ce dernier. Grand connaisseur de Pappus, il sait que l'on trouve dans ses travaux la description d'une courbe, tracée sur une sphère, qui délimite sur cette sphère une surface *quarrable*, c'est-à-dire dont on peut donner l'aire exacte. Cette courbe est l'intersection avec la sphère d'un cylindre dont le diamètre est égal au rayon de la sphère, et dont une directrice passe par le centre de la sphère (figure 7).

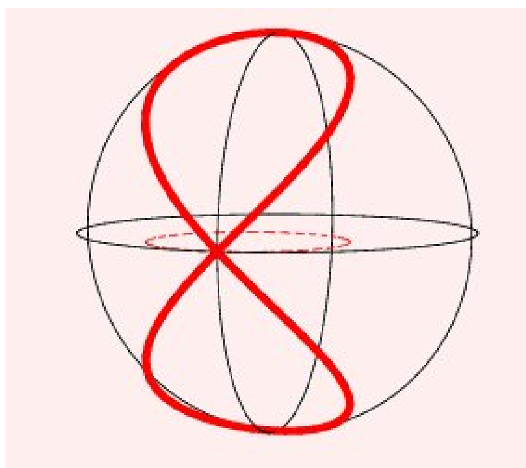

FIGURE 7 – La fenêtre de Viviani

En 1692, connaissant la solution, il pose le problème comme un défi lancé aux tenants de la nouvelle pratique analytique, Leibniz en tête, qui prétendent que le tout nouveau calcul infinitésimal peut résoudre des problèmes sur lesquels la géométrie des Grecs échoue. L'année précédente, les frères Bernoulli et Leibniz avaient corrigé une erreur de Galilée sur la chaînette, ce qui a sans doute contribué à indisposer Viviani.

ENIGME GEOMETRIQUE DE LA MERVEILLEUSE CONSTRUCTION DE LA VOUTE HEMISPHERIQUE QUARRABLE

3. D. Lagnier : Leibniz, la nouvelle analyse et la géométrie ou enquête sur la fenêtre de Viviani *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques 8 p.203–227 (1987)*

> proposée par D. PIO LISCI PUSILLO, géomètre
>
> le 4 avril 1692, dont on espère la résolution par les arts secrets des fameux Analystes de l'âge présent, puisque l'homme versé seulement dans les travaux de la pure Géométrie est incapable, semble-t-il, d'accéder à de tels mystères.
>
> Parmi les vénérables monuments de la savante Grèce antique, se dresse encore, destiné à durer éternellement, un Temple très auguste à plan circulaire, dédié à la FECONDE GEOMETRIE, qui est recouvert d'une coupole parfaitement hémisphérique à l'intérieur ; mais dans cette coupole, quatre fenêtres d'aires égales (disposées autour et sur la base de l'hémisphère même) sont construites de telle configuration, de telle grandeur, avec une telle industrie et une telle intelligence que, celles-ci ôtées, la surface courbe restant de la coupole, ornée d'un travail précieux, peut être quarrée géométriquement.
>
> On demande simplement quelle est cette partie quarrable de la surface hémisphérique tendue comme une voile marine gonflée, par quelle méthode ou par quel art fut-elle obtenue par l'Architecte Géomètre, et à quelle surface plane enfin elle est égale.
>
> La résolution du présent problème (qui permet la contruction aussi bien que la quadrature de cette admirable voûte) a été offerte à son Altesse Sérénissime FERDINAND, Prince de Toscane, amateur et patron généreux des sciences et des arts nobles, par l'auteur même de l'énigme. Celui-ci du même coup ne doute point que le problème ne doive être trouvé aussitôt par chacun des illustres Analystes qui existent aujourd'hui dans le monde des lettres, en partageant en carrés appropriés cette remarquable voûte quarrable découpée sur l'hémisphère, et il attend impatiemment que, les subtiles recherches des mêmes et leurs multiples travaux se ramenant au même et unique [lieu] géométrique, alors ceux qui osent témérairement lancer des injures à la Géométrie apprennent à se taire, ou plutôt s'écrient à haute voix :
>
> Ô unique Science des vérités accessibles, que l'Esprit divin a répandu dans l'esprit humain, afin que celle-ci méprisant les choses inaccessibles, changeantes et trompeuses, vise seulement les choses éternelles, qui sont toujours et pour tous semblables, et n'ait jamais pour son étude d'objet plus innocent.

Le nom d'emprunt sous lequel Viviani pose l'énigme est un anagramme de Postremo Galilaei Discipulo (le dernier disciple de Galilée). Il ne cache pas son ironie à l'égard des « illustres Analystes qui existent aujourd'hui ». Mais ces derniers sont prompts à relever le défi, qui tombe à pic comme banc d'essai pour le calcul infinitésimal. Leibniz le résoud dit-il le jour même où il en prend connaissance, Jean Bernoulli publie 5 solutions différentes, Roberval dit avoir déjà rencontré la courbe, Huygens, le Marquis de l'Hôpital, Wallis et Gregory fournissent aussi des réponses. Voici un extrait de celle de Leibniz, qui profite de son triomphe pour faire un brin de propagande visionnaire.

> Hippocrate de Chio a effectué la quadrature de sa lunule, déjà connue d'Aristote ; mais elle est plane et n'a de courbe que son périmètre. Les lunules sphériques (qu'on peut aussi appeler « voiles »), ne peuvent être projetées qu'à la perpendiculaire, et elles sont pourtant maintenant converties en figures rectilignes. Et la recherche d'Hippocrate n'était pas difficile ; la nôtre est beaucoup plus compliquée, surtout pour qui ignore les méthodes que nous utilisons.
>
> [...] Pour nous le sujet nous a si bien réussi qu'à partir d'une surface sphérique donnée, nous pouvons en détacher des arches d'une grandeur donnée (en-dessous pourtant d'une certaine grandeur), ce qui est résoudre le problème posé d'une infinité de manières.
>
> [...] Je souhaite – et ce souhait si d'autres y travaillent n'est pas irréalisable – voir la Géométrie réduite à l'Analyse absolue (si nous visons au plus haut) de sorte que le genre humain, délivré de cette difficulté, puisse appliquer désormais, pour son plus grand plaisir et son plus grand profit, son étude à la nature même et aux éléments concrets et puisse ainsi y reconnaître l'Étude Divine.
>
> Si l'esprit humain, armé de la véritable méthode, se tourne sérieusement de ce côté, je ne doute point qu'il produira un jour de grandes merveilles pour vaincre les maladies, pour accroître les commodités de l'existence, pour connaître les miracles que Dieu fait dans la nature.

Les « fameux Analystes de l'âge présent », vainqueurs par KO, eurent la magnanimité de baptiser l'objet de l'énigme « fenêtre de Viviani ». Elle s'ouvrait sur un avenir radieux : le Siècle des Lumières qui allait commencer serait bien en mathématiques celui des victoires du calcul différentiel.

3.4 Règle de l'Hôpital et Théorème de Rolle

L'histoire est injuste. Nous vous avons proposé comme exercice facile d'application des définitions, la « Règle de l'Hôpital » : la limite du rapport de deux accroissements de fonctions en un point est le rapport des dérivées des fonctions en ce point ; et au cas où vous poseriez la question, non, il n'est vraiment pas utile de retenir ce résultat par cœur. En revanche, nous avons lourdement insisté sur l'importance du Théorème de Rolle, qui au fond n'est ni plus difficile ni moins intuitif : si une fonction part d'une valeur pour retourner à cette même valeur, sa dérivée doit s'annuler dans l'intervalle.

En 1691, Guillaume François Antoine de L'Hôpital, marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, La Chaise, Le Bréau et autres lieux (1661–1704), avait invité chez lui Jean Bernoulli, pour apprendre de celui-ci la nouvelle théorie de Leibniz. L'ayant bien assimilée, il s'en était fait l'ardent propagandiste, publiant en 1696 son « Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes ». Cet ouvrage fit beaucoup pour la diffusion de la théorie en France, même si celle-ci n'alla pas sans heurts [4]. Voici le début lyrique de la préface de l'« Analyse des Infiniment Petits ».

> L'Analyse qu'on explique dans cet ouvrage, suppose la commune ; mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusque dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connaître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisièmes, quatrièmes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.

Rassurez-vous : beaucoup de lecteurs de l'époque ont ressenti le même vertige que vous devant une telle envolée. Cette nouvelle analyse supposée s'étendre « au-delà de l'infini », sans que l'on ait donné de sens rigoureux à son objet de base, les « différences infiniment petites », ressemblait fort à un château dans les nuages, et beaucoup doutaient en conséquence que l'on puisse en tirer autre chose que du vent. En 1701, Michel Rolle (1652–1719) lit à l'Académie Royale des Sciences un mémoire intitulé « Du nouveau système de l'infini ». Dès les premières lignes, le ton est donné.

> On avait toujours regardé la Géométrie comme une Science exacte, et même comme la source de l'exactitude qui est répandue dans toutes les autres parties des Mathématiques. On ne voyait parmi ses principes que de véritables axiomes : tous les théorèmes et tous les problèmes qu'on y proposait étaient ou solidement démontrés, ou capables d'une solide démonstration ; et s'il s'y glissait quelques propositions ou fausses ou peu certaines, aussitôt on les bannissait de cette science.
>
> Mais il semble que ce caractère d'exactitude ne règne plus dans la Géométrie depuis que l'on y a mêlé le nouveau système des infiniment petits. Pour moi, je ne vois pas qu'il ait rien produit pour la vérité, et il me paraît qu'il couvre souvent l'erreur.

Voici comment Fontenelle, bien des années plus tard, rapporte la controverse dans son éloge de Rolle.

> En ce temps-là, le livre de M. le Marquis de l'Hôpital avait paru, et presque tous les mathématiciens commençaient à se tourner du côté de la nouvelle géométrie de l'infini, jusque-là peu connue. L'universalité surprenante des démontrations, la finesse et la promptitude des solutions les plus difficiles,

4. M. Blay, Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *Revue d'Histoire des Sciences, 39(3), p. 223–253 (1986)*

> une nouveauté singulière et imprévue, tout attirait les esprits, et il se faisait dans le monde géomètre une révolution bien marquée. Elle n'était pourtant pas absolument générale ; dans le pays même des démonstrations on trouve encore le moyen de se diviser. Feu M. L'Abbé Galois, comme nous l'avons dit même dans son éloge, ne goûtait point la nouvelle Géométrie, mais il était bien aise de ne la combattre qu'avec le secours ou à l'abri d'un géomètre de nom, et heureusement il trouva dans M. Rolle les dispositions nécessaires pour s'unir à lui. Il mit dans la société le courage d'entreprendre la guerre, et l'art de la conduire, qui tous deux auraient peut-être manqué à M. Rolle, et celui-ci ne fut obligé que de fournir les raisonnements.
> [...]
> Quand la paix des Infiniment-petits fut faite, ou le silence ordonné, M. Rolle donna son application à d'autres sujets de Géométrie, où l'algèbre dominait toujours ; il ne laissait pas d'y glisser encore adroitement des accusations d'insuffisance ou même de fausseté contre le nouveau calcul, avec lequel il ne s'est jamais bien réconcilié, et les Infinitaires étaient au guet pour ne lui rien passer qui les intéressât trop.

Avant de combattre les « Infinitaires », M. Rolle avait quand même bien produit des mathématiques. Dans un ouvrage de 1691 « Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous degrés », il avait exposé une technique pour localiser les racines d'un polynôme, la « méthode des cascades ». Ce n'est que bien plus tard que l'on s'est rendu compte que la « cascade » d'un polynôme n'était autre que sa dérivée, et que l'observation qu'entre deux racines d'un polynôme on trouvait toujours une racine de sa dérivée, avait une portée beaucoup plus générale.

Non, le Théorème de Rolle n'est pas vraiment dû à Michel Rolle ; mais que cela ne vous empêche pas de le retenir !

3.5 Cette plaie lamentable

Dans une lettre à Thomas Stieltjes datant de 1893, Charles Hermite écrivait « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui sont sans dérivée ».

Jusqu'au XIXe siècle, tout le monde pensait que toute courbe continue devait admettre des tangentes, sauf peut-être en quelques points isolés, comme la fonction valeur absolue. Dans un mémoire de 1806, Ampère avait même tenté de le démontrer. Aussi beaucoup furent-ils choqués quand Weierstrass donna un exemple de fonction continue, mais dérivable en aucun point. La fonction de Weierstrass s'exprime sous forme de série trigonométrique.

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x) .$$

Pour $|a| < 1$, la série est absolument convergente, et les théorèmes généraux sur les séries de fonctions entraînent que W est continue. Si b est assez grand, on démontre que

W n'est dérivable en aucun point. On admet facilement que la courbe de la figure 8 n'a pas de tangente. Un an après Weierstrass, Darboux proposa une fonction analogue :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sin((k+1)!x) \ .$$

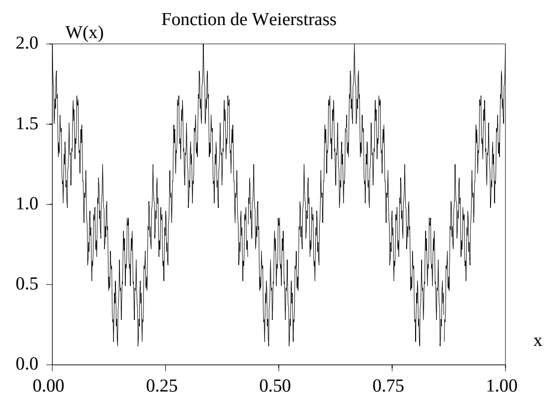

FIGURE 8 – Fonction de Weierstrass, pour $a = 0.5$ et $b = 6$.

Une autre manière de construire des fonctions continues nulle part dérivables, consiste à ajouter à une fonction affine, des dents de scie de plus en plus fines. Le premier exemple est dû à Bolzano en 1830, mais comme beaucoup des travaux de Bolzano, il ne fut pas publié, et resta longtemps ignoré. L'exemple de la figure 9 fait partie de cette famille de fonctions. On l'obtient en itérant une transformation consistant à remplacer chaque segment de droite par trois autres segments.

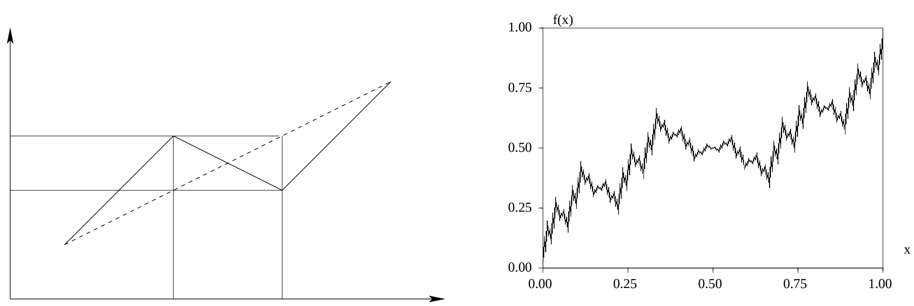

FIGURE 9 – Fonction continue nulle part dérivable.

Sans doute Poincaré pensait-il à ces exemples quand il disait, en 1899 : « Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela ». Sur la dernière partie de sa phrase, il se trompait lourdement...

L'agitation désordonnée de particules dans un fluide avait été observée par le biologiste anglais Brown au début du XIXe siècle, mais il fallut assez longtemps pour que les physiciens établissent le rapport entre le mouvement des particules et la diffusion de la chaleur. Dans un de ses articles de 1905, Albert Einstein proposa une modélisation cinétique de ce mouvement, dont découlait l'équation de la chaleur, établie par Fourier en 1808. Le travail, poursuivi par Perrin en 1909, conduisit à une étude théorique du mouvement brownien, comme objet mathématique, par Wiener en 1923. Dès ses premiers mots sur le mouvement brownien, Wiener cite un article de Perrin, qui évoque les courbes sans tangente des mathématiciens. Et de fait, Wiener bâtit un modèle dans lequel les trajectoires sont continues, avec une vitesse infinie en tout point.

Quel est ce modèle ? Pour s'en faire une idée, le plus simple est de partir du jeu de pile ou face. Si la pièce est équilibrée, le joueur a une chance sur deux de gagner un euro, et une chance sur deux de perdre un euro. Le gain ou la perte au fil des parties est la somme cumulée des gains ou pertes de chaque partie. Partant d'une fortune nulle, la fortune X_n du joueur à la n-ième partie est aléatoire. La figure 10 représente 3 trajectoires de X_n en fonction de n, sur 1000 parties jouées. Ces courbes donnent une bonne idée de ce que sont les trajectoires du mouvement brownien. Pour le définir, on accélère l'échelle de temps d'un facteur N, et on raccourcit l'échelle des fortunes d'un facteur $\sqrt{N}$. On peut définir le mouvement brownien à l'instant t comme la limite suivante.

$$B(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} X_{\lfloor Nt \rfloor} \;.$$

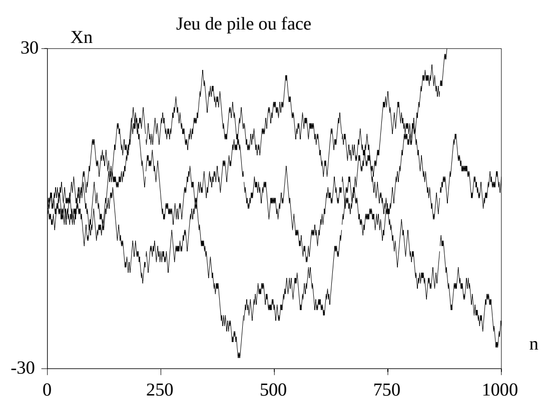

FIGURE 10 – Jeu de pile ou face équitable : évolutions sur 1000 parties.

En 1900, dans sa thèse (dirigée par Poincaré), Louis Bachelier utilise l'analogie des jeux de hasard et de l'agitation moléculaire pour poser les bases d'une théorie des spéculations financières. Son travail, longtemps ignoré, fait aujourd'hui figure de précurseur.

Le calcul sur le mouvement brownien, dit calcul stochastique, est désormais l'outil principal des mathématiques financières. Les formules qu'on en déduit permettent de fixer le prix des options, et elles sont implémentées dans les logiciels utilisés quotidiennement sur toutes les places financières.

3.6 Une construction de l'exponentielle et du logarithme

Le logarithme népérien vous a sans doute été présenté comme la primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1, et l'exponentielle comme sa fonction réciproque. On en déduit alors les propriétés de ces deux fonctions. Nous allons voir une autre définition.

Le but de ce qui suit est de construire les fonctions exponentielle et logarithme, et d'en démontrer les principales propriétés, à partir de la propriété fondamentale de l'exponentielle, qui est de transformer les sommes en produit.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;, \quad f(x+y) = f(x)f(y) \;. \tag{3}$$

Cette construction illustrera l'utilisation des outils de base de l'analyse : limites, continuité, dérivabilité, convexité.

Dans un premier temps, nous raisonnerons par condition nécessaire, en supposant l'existence d'une fonction f vérifiant (3), pour en déduire ses propriétés.

Proposition 10. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant* (3)*. Alors :*

1. *Si f s'annule en un point, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si f ne s'annule pas, alors $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$f(nx) = (f(x))^n \;.$$

Démonstration : Si $f(x) = 0$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x)f(x) = 0 \;.$$

Donc, soit f est identiquement nulle, soit elle ne s'annule jamais. Comme $f(x + 0) = f(x)f(0)$, si $f(x) \neq 0$, alors $f(0) = 1$. Ensuite, $f(0) = f(x - x) = f(x)f(-x)$, d'où le point *2*. Le point *3* se vérifie aussi facilement, par récurrence sur n. □

Proposition 11. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, non nulle,* continue en 0*, et vérifiant* (3)*. Alors f est :*

1. *strictement positive,*
2. *continue sur* $\mathbb{R}$*,*
3. *convexe sur* $\mathbb{R}$*,*
4. *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*
$$\forall x \in \mathbb{R}\;, \quad f'(x) = f(x)f'(0)\;.$$

Démonstration : D'après la proposition 10, si f est non nulle, alors $f(0) = 1$. Comme f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta, \eta[\,$, $f(x) > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque ; il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y/n \in]-\eta, \eta[\,$. D'après le point *3* de la proposition 10, $f(y) = (f(y/n))^n > 0$.

Montrons maintenant la continuité en un point x quelconque de $\mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} f(x)f(h) = f(x)\lim_{h\to 0} f(h) = f(x)\;,$$

car f est continue en 0 et $f(0) = 1$.

La démonstration de la convexité est plus difficile. Nous souhaitons montrer que pour tout $x < y$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\;. \tag{4}$$

Nous allons d'abord montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\;, \quad f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\;. \tag{5}$$

D'après (3) et le point *3* de la proposition 10,

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\;, \quad f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\right)^{1/n}$$

On pourrait en déduire (5), en utilisant… la concavité du logarithme, que nous sommes précisément en train de construire. Ce ne serait pas de jeu !

Nous allons démontrer (5) par récurrence sur n. Observons d'abord que (5) est trivialement vraie pour $n = 1$. Vérifions qu'elle est vraie pour $n = 2$. D'après (3) et puisque f est strictement positive, on a :

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}\;.$$

Il est facile de vérifier que si a et b sont deux réels positifs, alors $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, d'où (5) pour $n = 2$. Nous en déduisons ensuite que si (5) est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour $2n$. En effet :

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n}\right)\\
&\qquad = f\left(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2}\right)\\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)\right)\\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}+\frac{f(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2n})}{n}\right)\\
&\qquad = \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2n})}{2n}\;.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si (5) est vraie pour un entier $m \geqslant 2$, alors elle est vraie pour $m-1$.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right) &= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}}{m}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{m}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_{m-1})+f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right)\right)\;.
\end{aligned}$$

Soit en regroupant les termes :

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right) \leqslant \frac{1}{m}\Big(f(x_1)+\cdots+f(x_{m-1})\Big)\;,$$

d'où le résultat pour $m-1$. Maintenant, si (5) est vraie pour un entier n, elle est vraie pour $2n$, et d'après ce qui précède, aussi pour $2n-1$, $2n-2$, $\ldots$, $n+1$. Elle est donc vraie pour tout n.

Soient p et q deux entiers positifs tels que $p < q$, et x, y deux réels tels que $x < y$. Appliquons (5) pour $n = q$, $x_1 = \cdots = x_p = x$, et $x_{p+1} = \cdots = x_q = y$. On obtient :

$$f\left(\frac{p}{q}x+(1-\frac{p}{q})y\right) \leqslant \frac{p}{q}f(x)+(1-\frac{p}{q})f(y)\;,$$

soit (4) pour $\lambda = \frac{p}{q}$. Donc (4) est vraie pour tout λ *rationnel*. Mais tout réel étant limite d'une suite de rationnels, et la fonction f étant continue, (4) est aussi vraie pour tout λ *réel*, donc f est convexe.

La dérivabilité se déduit de la convexité, en utilisant la propriété (3). Commençons par montrer que f est dérivable en 0. Considérons la fonction φ, qui à $h \in \mathbb{R}^*$ associe l'accroissement :

$$\varphi(h) = \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{f(h)-1}{h}\;.$$

La fonction f étant convexe, ses accroissements sont croissants, donc la fonction φ admet une limite à gauche et une limite à droite en 0. La fonction f est donc dérivable à gauche et à droite en 0. Nous devons montrer que les deux dérivées sont égales. Pour cela, calculons $\varphi(-h)$, en utilisant le point *2* de la proposition 10.

$$\varphi(-h) = \frac{f(-h)-1}{-h} = \frac{\frac{1}{f(h)}-1}{-h} = \frac{1}{f(h)}\varphi(h) \; .$$

Or quand h tend vers 0, $\frac{1}{f(h)}$ tend vers 1, par continuité de f en 0. Donc la limite à gauche de φ en 0 est égale à sa limite à droite, ce qui entraîne que f est dérivable en 0. Pour en déduire la dérivabilité en un point x quelconque de $\mathbb{R}$, il suffit d'appliquer une fois de plus la propriété (3) :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = f(x)f'(0) \; .$$

Puisque f est strictement positive, $f'(x) = f(x)f'(0)$ est de signe constant. La fonction f est :

- strictement croissante si $f'(0) > 0$,
- constante (et égale à 1) si $f'(0) = 0$,
- strictement décroissante si $f'(0) < 0$.

□

Jusqu'ici nous n'avons raisonné que par condition nécessaire : rien ne prouve encore qu'il existe des fonctions f vérifiant les hypothèses des deux propositions précédentes.

Proposition 12. *Pour tout $a > 0$, il existe une unique fonction f, continue en* 0*, vérifiant* (3)*, et telle que $f(1) = a$.*

Démonstration : La fonction qui répond à la question est évidemment celle qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f_a(x) = a^x$. Encore faut-il préciser sa définition, et montrer qu'elle est la seule.

Si n est un entier positif, a^n est le produit de n facteurs égaux à a, et $a^{-n} = 1/a^n$. La fonction qui à a associe a^n est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Donc sa réciproque est aussi strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Si a est un réel positif, le réel b tel que $b^n = a$ est donc défini de façon unique, et on convient de le noter $a^{\frac{1}{n}}$, de sorte que $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$. Si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel, nous savons donc définir $a^x = (a^{\frac{1}{q}})^p$. Cette définition, et les propriétés des puissances entières, entraînent que la propriété (3) est vérifiée pour tout couple (x, y) de *rationnels* : $a^{x+y} = a^x a^y$.

Nous souhaitons étendre la définition de a^x à tous les réels, par continuité. Observons d'abord que nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que $a > 1$ et $x > 0$, grâce à la propriété $a^{-x} = (a^x)^{-1} = (1/a)^x$. Si x et x' sont deux rationnels tels que $0 < x < x'$, alors $a^x < a^{x'}$. Une des propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{R}$ est que tout réel est la borne supérieure de l'ensemble des rationnels qui lui sont inférieurs. Si x est un réel *quelconque* et $a > 1$, nous pouvons donc définir a^x comme :

$$a^x = \sup\{a^y \, , \; y \in \mathbb{Q} \text{ et } y < x\} \; .$$

Il reste à vérifier que la fonction ainsi définie est bien continue, et qu'on a donc aussi :

$$a^x = \inf\{a^y\ ,\ y \in \mathbb{Q} \text{ et } y > x\}\ .$$

Pour cela, commençons par montrer que si (x_n) est une suite de *rationnels positifs*, tendant vers 0, alors (a^{x_n}) converge vers 1. Fixons ε tel que $0 < \varepsilon < 1$. Considérons les deux suites $((1-\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$ et $((1+\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$. Si la suite (x_n) tend vers 0, la suite $(\frac{1}{x_n})$ tend vers $+\infty$. Si ρ est un réel positif, alors quand $m \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, ρ^m tend vers 0 si $\rho < 1$, vers $+\infty$ si $\rho > 1$. On en déduit que $((1-\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$ converge vers 0, alors que $((1+\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}})$ converge vers $+\infty$. Donc il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$a \in [(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}}\,,\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{x_n}}],$$

soit $a^{x_n} \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Si les x_n sont des rationnels *négatifs*, la conclusion est la même car $a^{x_n} = (a^{-x_n})^{-1}$. Donc la conclusion reste vraie pour une suite de rationnels x_n de signe quelconque. On en déduit donc que la fonction que nous avons définie est bien continue en 0.

Pour $a > 0$, la fonction qui à x associe a^x est donc continue en 0, elle est non nulle, et elle vérifie (3) pour tout x, y rationnels, donc pour tout x, y réels, en passant à la limite. D'après le point *2* de la proposition 11, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour l'unicité, il suffit d'observer que si une fonction f vérifie (3) et est telle que $f(1) = a > 0$, alors par la proposition 10, elle est telle que $f(x) = a^x$, pour tout x rationnel. Deux fonctions continues qui coïncident sur les rationnels, sont nécessairement égales (tout réel est limite d'une suite de rationnels). Donc $f(x) = a^x$, pour tout x *réel.*
□

Pour $a > 0$, notons f_a l'unique fonction continue en 0, vérifiant (3), et telle que $f_a(1) = a$, à savoir la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe a^x.

$$\begin{array}{cccc} f_a & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ & x & \longmapsto & a^x\ . \end{array}$$

Puisque $f(1) = a > 0$, la fonction f est non nulle et on peut lui appliquer la proposition 11 : f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Définition 8. *On appelle* logarithme*, et on note* ln *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$*, qui à* $a > 0$ *associe* $\ln(a) = f_a'(0)$*.*

Proposition 13.

1. *Pour tout* $a, b > 0$*, on a :*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\ .$$

2. *Pour tout* $a > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\ln(a^x) = x\ln(a)\ .$$

3. *La fonction* ln *est strictement croissante, et :*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\ .$$

Démonstration : Pour le premier point, soient a et b deux réels strictement positifs, et considérons la fonction f_{ab}. On a :

$$f_{ab}(x) = (ab)^x = a^x b^x = f_a(x) f_b(x)\ .$$

On calcule donc la dérivée de f_{ab} en 0, en dérivant le produit $f_a f_b$:

$$\ln(ab) = f'_{ab}(0) = f'_a(0) f_b(0) + f_a(0) f'_b(0) = \ln(a) + \ln(b)\ .$$

Pour le point *2*, soit $a > 0$ et x, y deux réels.

$$f_a(xy) = a^{xy} = (a^x)^y = f_{a^x}(y)\ .$$

Fixons x, dérivons par rapport à y et prenons la dérivée en 0. On obtient :

$$x f'_a(0) = f'_{a^x}(0)\ ,$$

d'où le résultat.

Passons au point *3*. Fixons $a > 1$. La fonction f_a est alors strictement croissante, elle admet donc une limite en $+\infty$. Or la suite (a^n) tend vers $+\infty$, donc la limite de f_a en $+\infty$ est $+\infty$. La relation $a^{-x} = 1/a^x$ montre que la limite de f_a en $-\infty$ est 0. La fonction f_a est donc bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. La relation $\ln(a^x) = x\ln(a)$ montre que la fonction réciproque de a^x est la fonction qui à $y \in \mathbb{R}^{+*}$ associe $\ln(y)/\ln(a)$. Cette fonction est donc strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. □

Il nous reste à définir la fonction exponentielle, qui est la réciproque du logarithme. D'après le point *3* de la proposition 13, il existe un réel unique, strictement positif, dont le logarithme vaut 1. On le note e.

Définition 9. *On appelle* exponentielle*, et on note* exp*, la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe* e^x*, où* e *est l'unique réel tel que* $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Proposition 14. *L'exponentielle est la réciproque du logarithme. Les deux fonctions sont strictement croissantes et dérivables.*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \exp'(x) = \exp(x) \quad et \quad \forall y \in \mathbb{R}^{+*}\,,\ \ln'(y) = \frac{1}{y}\ .$$

Puisque $\ln(1) = 1$, on a $\ln(\exp(x)) = x$, par le point *2* de la proposition 13. La dérivée de l'exponentielle est donnée par le point *4* de la proposition 11. On dérive le logarithme comme une fonction réciproque :

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}\ .$$