

Topologie des ensembles nodaux aléatoires

AGM - Université de Cergy (mai 2022)



Damien Gayet (Institut Fourier, Grenoble)

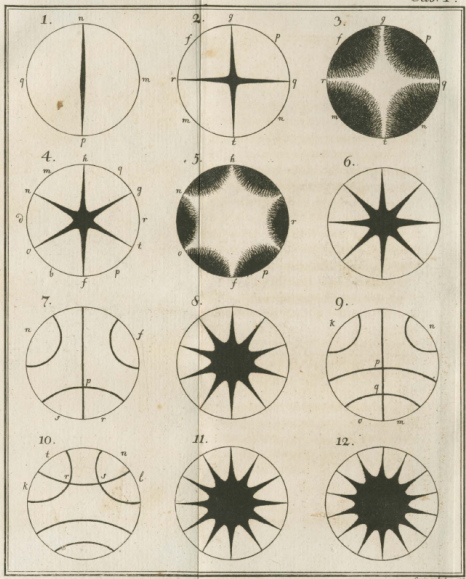
Introduction

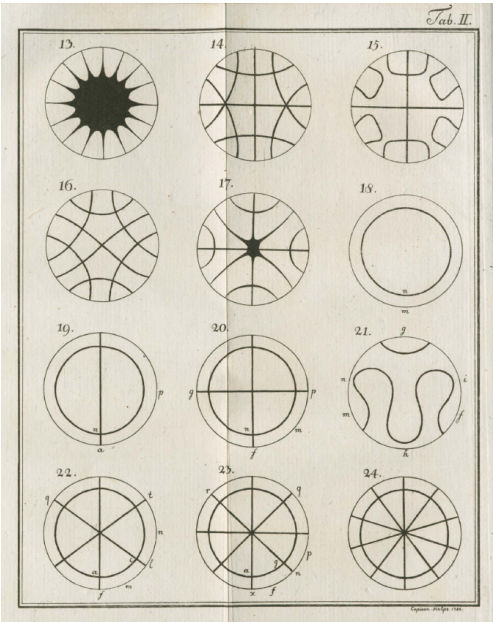
Des vibrations à la percolation

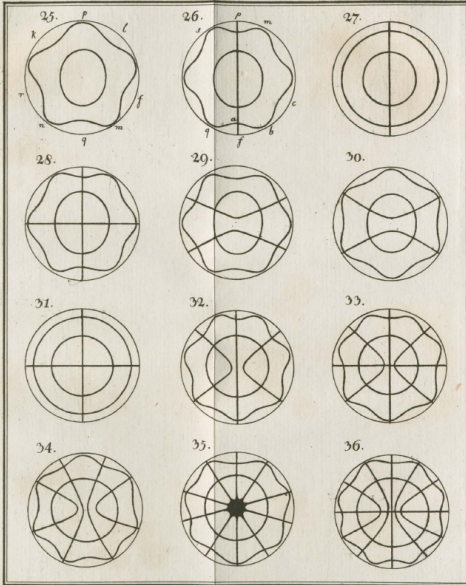


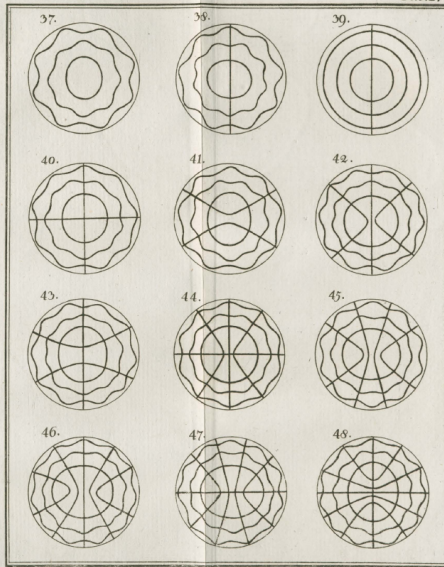
Ernst Florens Friedrich Chladni (1757-1827)



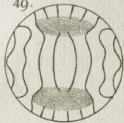




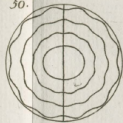




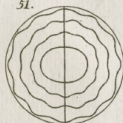
49.



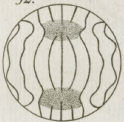
50.



51.



52.



53.



54.



55.



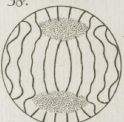
56.



57.



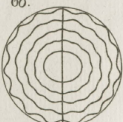
58.

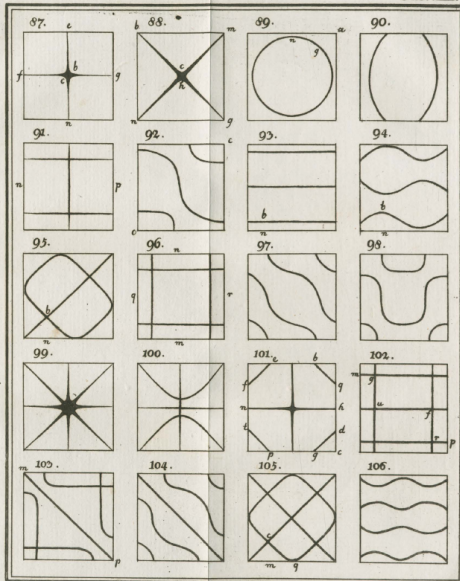


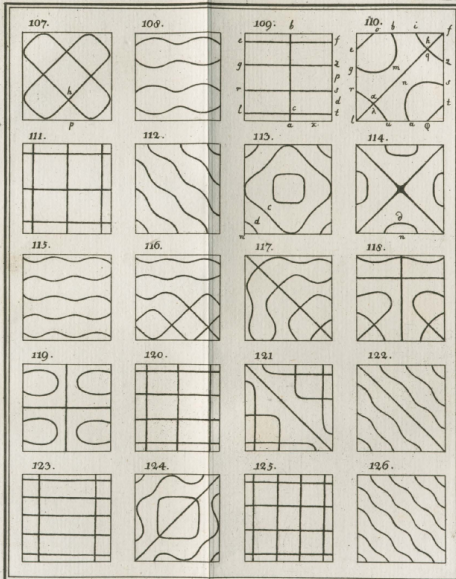
59.

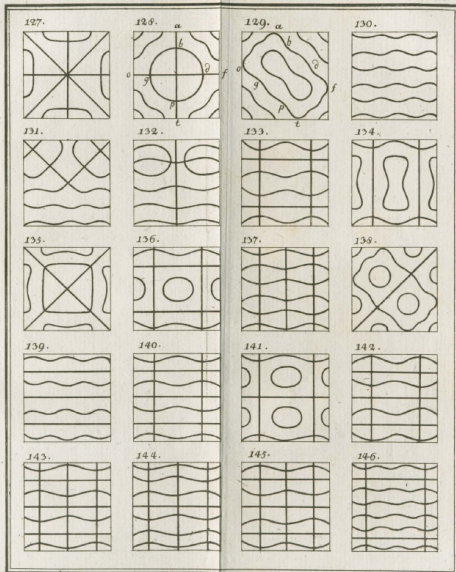


60.









Dans les cas de vibrations compris dans cette intégrale, les lignes d'extrémités courbes et les lignes d'extrémités droites sont les unes et les autres physiquement libres, cependant elles sont dans un état analytiquement différent.

En effet, les lignes d'extrémités courbes satisfont aux conditions

$$\begin{aligned}
 & -SN^2 \left(\frac{d^2 r}{dx^{u_2}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \delta \left(\frac{dr}{dx^u} \right) ds + SN^2 d \left(\frac{\frac{d^2 r}{dx^{u_2}} + \frac{d^2 r}{ds^2}}{dx^u} \right) \delta r ds \left. \vphantom{\frac{d^2 r}{dx^{u_2}}} \right\} = 0; \\
 & \quad + S \frac{N^2}{a^2} \left(\frac{d^2 r}{dx^{u_2}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \left(\frac{dr}{dx^u} \right) \delta r ds \\
 & -SN^2 \left(\frac{d^2 r}{dx^{u_2}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \delta \left(\frac{dr}{ds} \right) dx + SN^2 d \left(\frac{\frac{d^2 r}{dx^{u_2}} + \frac{d^2 r}{ds^2}}{ds} \right) \delta r dx \left. \vphantom{\frac{d^2 r}{dx^{u_2}}} \right\} = 0; \\
 & \quad + S \frac{N^2}{a^2} \left(\frac{d^2 r}{dx^{u_2}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \left(\frac{dr}{ds} \right) \delta r dx
 \end{aligned}$$

en vertu des équations $dx = 0$, $\left(\frac{dr}{dx^u} \right) = 0$, et $d \left(\frac{\frac{d^2 r}{dx^{u_2}} + \frac{d^2 r}{ds^2}}{dx^u} \right) = 0$;
 tandis que pour les lignes d'extrémités droites, ce sont les équations

Ungeachtet der Bestätigungen, welche die Theorie von *Sophie Germain* durch Versuche erfahren hat, ist sie nicht richtig; denn man kann Folgerungen aus ihr ziehen, welche in offenbarem Widerspruche mit der Wirklichkeit stehen. selben Richtung durch den Punct (x, y) gezogen ist. Setzt man dann

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = u,$$

so liefert jene Gleichgewichtsbedingung für u die partielle Differentialgleichung

$$N^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = Z$$

und die Grenzbedingungen

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0;$$

wo n die Normale der Contour der Mittelfläche bezeichnet. Nun ist aber die

Kirchoff 1850

Kirchoff 1850 l'équation des membranes est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f + \Delta^2 f = 0.$$

Kirchoff 1850 l'équation des membranes est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f + \Delta^2 f = 0.$$

Donc si f est fonction propre de Δ de valeur propre $\lambda > 0$, alors

$$f_t := e^{i\lambda t} f$$

vérifie l'équation.

Kirchoff 1850 l'équation des membranes est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f + \Delta^2 f = 0.$$

Donc si f est fonction propre de Δ de valeur propre $\lambda > 0$, alors

$$f_t := e^{i\lambda t} f$$

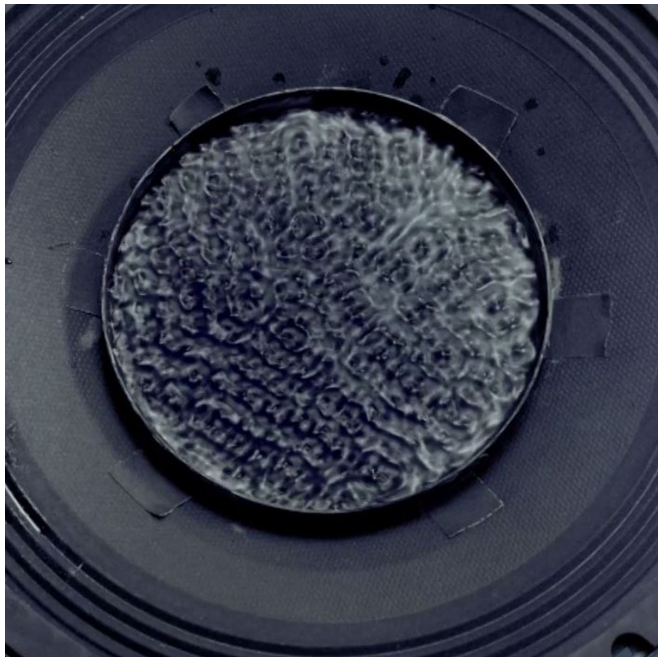
vérifie l'équation. En particulier l'*ensemble nodal*

$$Z(f_t) = Z(f) = \{f = 0\}$$

est constant (et souvent une hypersurface lisse).

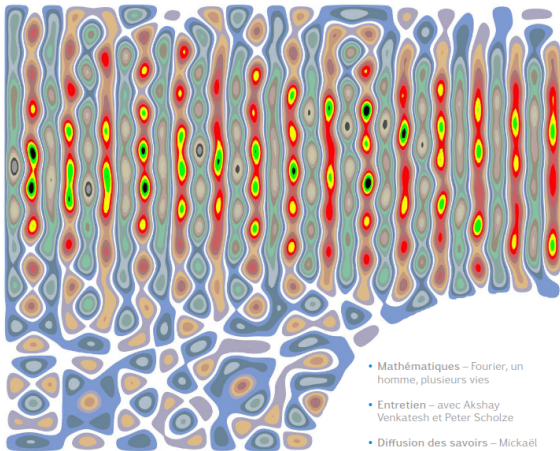




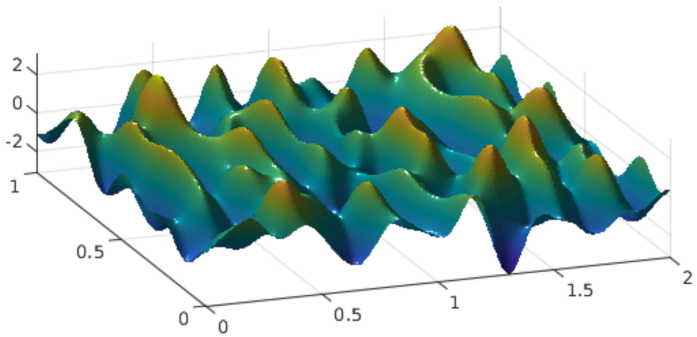


la Gazette

des Mathématiciens



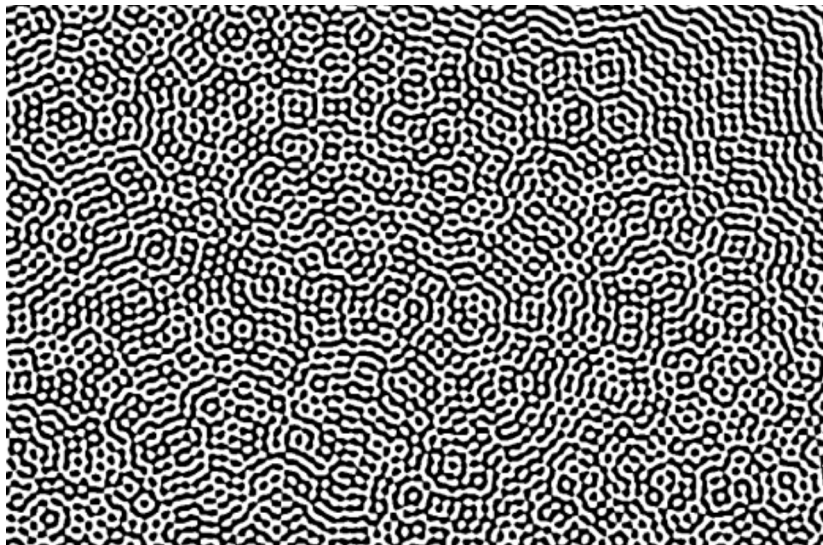
- Mathématiques – Fourier, un homme, plusieurs vies
- Entretien – avec Akshay Venkatesh et Peter Scholze
- Diffusion des savoirs – Mickaël Launay, montreur de



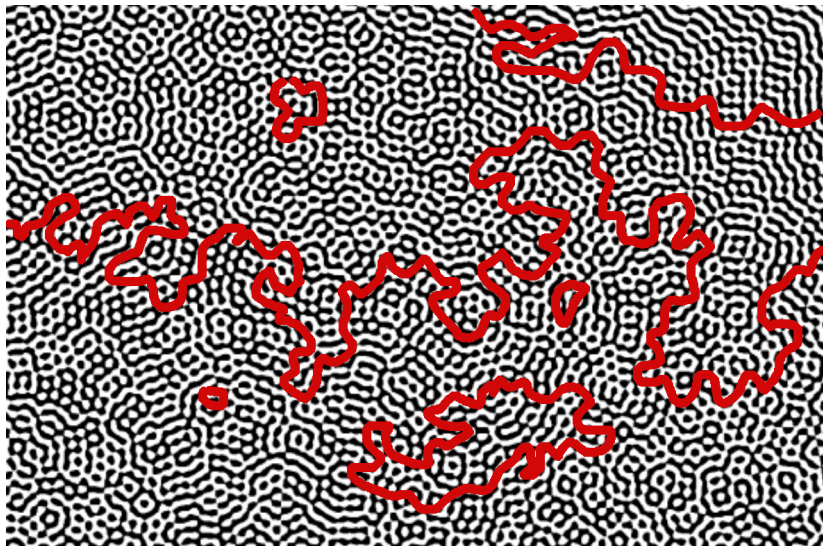




Figures de Chladni



Quelle est la forme de ces lignes nodale ?



Regular and irregular semiclassical wavefunctions

M V Berry

H H Wills Physics Laboratory, Bristol University, Tyndall Avenue, Bristol BS8 1TL, UK

Received 19 July 1977, in final form 11 August 1977

Abstract. The form of the wavefunction ψ for a semiclassical regular quantum state (associated with classical motion on an N -dimensional torus in the $2N$ -dimensional phase space) is very different from the form of ψ for an irregular state (associated with stochastic classical motion on all or part of the $(2N - 1)$ -dimensional energy surface in phase space). For regular states the local average probability density $\bar{\Pi}$ rises to large values on caustics at the boundaries of the classically allowed region in coordinate space, and ψ exhibits strong anisotropic interference oscillations. For irregular states $\bar{\Pi}$ falls to zero (or in two dimensions stays constant) on 'anticaustics' at the boundary of the classically allowed region, and ψ appears to be a Gaussian random function exhibiting more moderate interference oscillations which for ergodic classical motion are statistically isotropic with the autocorrelation of ψ given by a Bessel function.

Regular and irregular semiclassical wavefunctions

M V Berry

H H Wills Physics Laboratory, Bristol University, Tyndall Avenue, Bristol BS8 1TL, UK

Received 19 July 1977, in final form 11 August 1977

Abstract. The form of the wavefunction ψ for a semiclassical regular quantum state (associated with classical motion on an N -dimensional torus in the $2N$ -dimensional phase space) is very different from the form of ψ for an irregular state (associated with stochastic classical motion on all or part of the $(2N - 1)$ -dimensional energy surface in phase space). For regular states the local average probability density $\bar{\Pi}$ rises to large values on caustics at the boundaries of the classically allowed region in coordinate space, and ψ exhibits strong anisotropic interference oscillations. For irregular states $\bar{\Pi}$ falls to zero (or in two dimensions stays constant) on 'anticaustics' at the boundary of the classically allowed region, and ψ appears to be a Gaussian random function exhibiting more moderate interference oscillations which for ergodic classical motion are statistically isotropic with the autocorrelation of ψ given by a Bessel function.



Un soupçon d'aléatoire

Soit M^n une variété lisse de dimension n et

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction lisse aléatoire. Quelle est la statistique de la topologie de $\{f = 0\} = Z(f)$?

Soit M^n une variété lisse de dimension n et

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction lisse aléatoire. Quelle est la statistique de la topologie de $\{f = 0\} = Z(f)$?

- ▶ Nombre b_0 des composantes connexes ?

Soit M^n une variété lisse de dimension n et

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction lisse aléatoire. Quelle est la statistique de la topologie de $\{f = 0\} = Z(f)$?

- ▶ Nombre b_0 des composantes connexes ?
- ▶ Autres nombres de Betti (par exemple le genre des composantes connexes si $n = 3$) ?

Soit M^n une variété lisse de dimension n et

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction lisse aléatoire. Quelle est la statistique de la topologie de $\{f = 0\} = Z(f)$?

- ▶ Nombre b_0 des composantes connexes ?
- ▶ Autres nombres de Betti (par exemple le genre des composantes connexes si $n = 3$) ?
- ▶ Type d'homéomorphisme ?

Soit M^n une variété lisse de dimension n et

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction lisse aléatoire. Quelle est la statistique de la topologie de $\{f = 0\} = Z(f)$?

- ▶ Nombre b_0 des composantes connexes ?
- ▶ Autres nombres de Betti (par exemple le genre des composantes connexes si $n = 3$) ?
- ▶ Type d'homéomorphisme ?
- ▶ Existence de grandes composantes connexes (percolation) ?

Partie 1

Fonctions aléatoires & laplacien



Soit (M, g) une variété compacte riemannienne orientée lisse (y compris g), et Δ le Laplacien associé :

$$\Delta = d^*d,$$

avec $d^* = - * d *$ et

$$*e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = e_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n},$$

où $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{i_{p+1}}, \cdots, e_{i_n})$ est une BON directe de $T_x M$.

Soit (M, g) une variété compacte riemannienne orientée lisse (y compris g), et Δ le Laplacien associé :

$$\Delta = d^*d,$$

avec $d^* = - * d *$ et

$$*e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = e_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n},$$

où $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{i_{p+1}}, \dots, e_{i_n})$ est une BON directe de $T_x M$.
Concrètement, en coordonnées,

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} f),$$

où $g = \det(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $(g^{ij})_{i,j} = (g_{ij})_{i,j}^{-1}$.

Produit scalaire sur $L^2(M, \mathbb{R})$:

$$\forall f, g \in L^2(M, \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_M fg(x) d\text{vol}.$$

Produit scalaire sur $L^2(M, \mathbb{R})$:

$$\forall f, g \in L^2(M, \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_M fg(x) d\text{vol}.$$

Faits :

- ▶ Δ est auto-adjoint :

$$\langle \Delta f, g \rangle = \langle f, \Delta g \rangle.$$

- ▶ Le spectre du Laplacien est discret, positif et tend vers l'infini :

$$\text{Spectre}(\Delta) = \{0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \dots\}.$$

- ▶ $\forall f \in \ker(\Delta - \lambda_k)$, f est lisse.

Exemples

Le tore plat (\mathbb{T}^n, g_0) . Le laplacien vaut

$$\Delta = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Exemples

Le tore plat (\mathbb{T}^n, g_0) . Le laplacien vaut

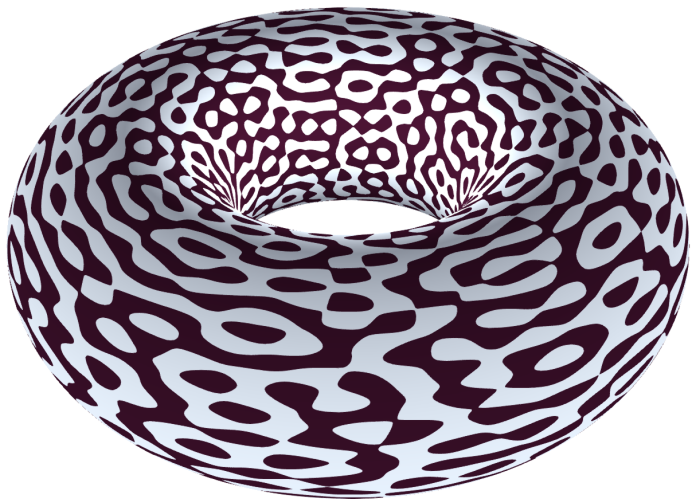
$$\Delta = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

et ses valeurs propres sont les

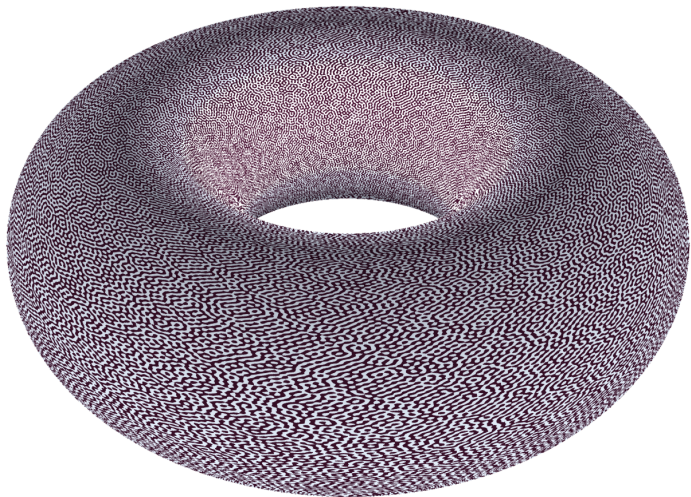
$$\forall (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n, \lambda = 4\pi^2 \sum_{i=1}^n m_i^2$$

et les fonctions propres associées :

$$\forall (p_1, \dots, p_n), 4\pi^2 \sum_{i=1}^n p_i^2 = \lambda, \varphi = \prod_{i=1}^n \exp(2i\pi n_i x_i),$$



. Image : Simon Coste



Exemples

La sphère ronde (\mathbb{S}^n, g_0) , $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = k(k + n - 1) \in \text{Sp}(\Delta)$$

et les fonctions propres associées sont :

$$E_{\lambda_k} = \left\{ p = P|_{\mathbb{S}^n} \mid P \in \mathbb{R}_{hom}^k[X_0, \dots, X_n], \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0 \right\}.$$

Exemples

La sphère ronde (\mathbb{S}^n, g_0) , $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = k(k + n - 1) \in \text{Sp}(\Delta)$$

et les fonctions propres associées sont :

$$E_{\lambda_k} = \left\{ p = P|_{\mathbb{S}^n} \mid P \in \mathbb{R}_{hom}^k[X_0, \dots, X_n], \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0 \right\}.$$

$$\dim E_{\lambda_k} = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k-2}{n}.$$

Exemples

La sphère ronde (\mathbb{S}^n, g_0) , $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = k(k + n - 1) \in \text{Sp}(\Delta)$$

et les fonctions propres associées sont :

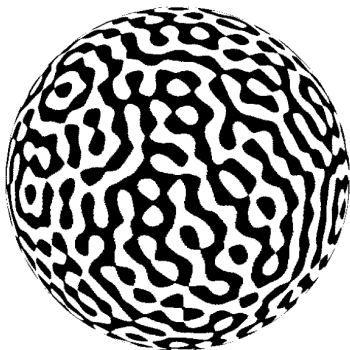
$$E_{\lambda_k} = \left\{ p = P|_{\mathbb{S}^n} \mid P \in \mathbb{R}_{hom}^k[X_0, \dots, X_n], \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0 \right\}.$$

$$\dim E_{\lambda_k} = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k-2}{n}.$$

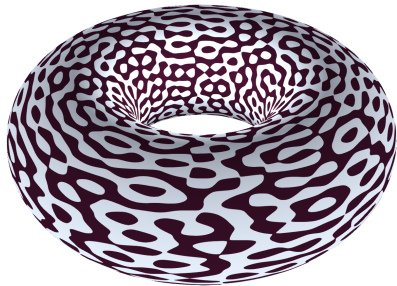
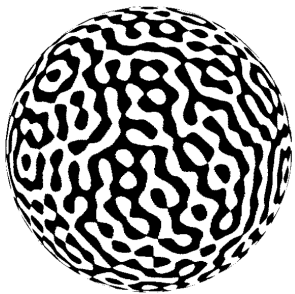
Le cercle Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{4\pi^2 n^2} = \langle \cos(2\pi n x), \sin(2\pi n x) \rangle.$$

On retrouve $\dim E_{\lambda_k} = 2$.



Domaines nodaux d'une harmonique sphérique de grand degré.
Image : A. Barnett



Deux théorèmes généraux

Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne.

Théorème (Weyl 1911)

$$\#\{\lambda_i, \lambda_i \leq L\} \underset{L \rightarrow \infty}{\sim}$$

Deux théorèmes généraux

Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne.

Théorème (Weyl 1911)

$$\#\{\lambda_i, \lambda_i \leq L\} \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^n} \text{vol}(M) \text{vol}(\mathbb{B}^n) L^{n/2}.$$

Deux théorèmes généraux

Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne.

Théorème (Weyl 1911)

$$\#\{\lambda_i, \lambda_i \leq L\} \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^n} \text{vol}(M) \text{vol}(\mathbb{B}^n) L^{n/2}.$$

Remarque. Pour un autre opérateur elliptique P d'ordre 2, il faut remplacer $\text{vol}(M) \text{vol}(\mathbb{B}^n)$ par

$$\text{vol}\{\xi \in T^*M, \sigma(P)(\xi) \leq 1\},$$

avec $\sigma(P)$ le symbole de P en x .

Exemple. $M = S^1$, $\text{Sp}(\Delta) = 4\pi^2\mathbb{N}^2$, avec multiplicité 2, donc

$$\#\{\lambda_i, \lambda_i \leq L\} \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} 2 \frac{\sqrt{L}}{2\pi}.$$

Théorème (Courant 1923) Soit f une fonction propre du laplacien de valeur propre λ_k . Alors

$$\#b_0(Z(f)) \leq$$

Théorème (Courant 1923) Soit f une fonction propre du laplacien de valeur propre λ_k . Alors

$$\#b_0(Z(f)) \leq k.$$

Notons que si $L \sim \lambda_k$, alors

$$k \sim \frac{1}{(2\pi)^n} \text{vol}(M) \text{vol}(\mathbb{B}^n) L^{n/2}.$$

Fonctions aléatoires

Pour tout $L > 0$, soit

$$E_L = \bigoplus_{\lambda_k \leq L} \ker(\Delta - \lambda_k \text{Id}).$$

Remarque :

$$E_\infty = L^2(M, \mathbb{R}).$$

Soit $(\varphi_k)_k$ une base de fonctions propres orthornormée, φ_k associée à λ_k . Fonction aléatoire dans E_L :

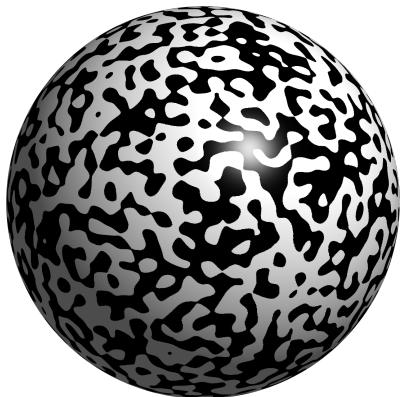
Full Band Random Wave (FBRW)

$$f = \sum_{\lambda_k \leq L} a_k \varphi_k,$$

où $a_k \sim N(0, 1)$, indépendants, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(a_k \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Autre façon de voir : on prend la mesure invariante sur $(\mathbb{S}E_L, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ et on prend f au hasard sur cette sphère. Si $Z(f)$ est en jeu, on a les mêmes résultats.



Les domaines nodaux d'un élément de E_L (A. Barnett)

Soit $a(L) \in [0, 1[$ et $\frac{1}{\sqrt{L}} = o(1 - a(L))$,

Random Wave (RW)

$$f = \sum_{\lambda_k \in [a(L)L, L]} a_k \varphi_k,$$

où $a_k \sim N(0, 1)$.

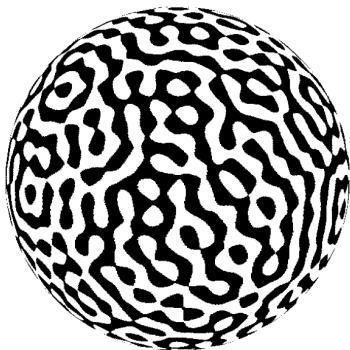
Soit $a(L) \in [0, 1[$ et $\frac{1}{\sqrt{L}} = o(1 - a(L))$,

Random Wave (RW)

$$f = \sum_{\lambda_k \in [a(L)L, L]} a_k \varphi_k,$$

où $a_k \sim N(0, 1)$.

Cas spécial de (\mathbb{S}^n, g_0) . On peut prendre $a(L) = 1$.



Domaines nodaux d'une harmonique sphérique de grand degré.

Image : A. Barnett



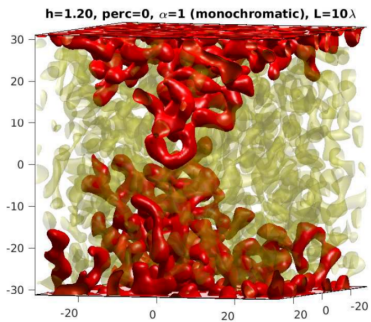
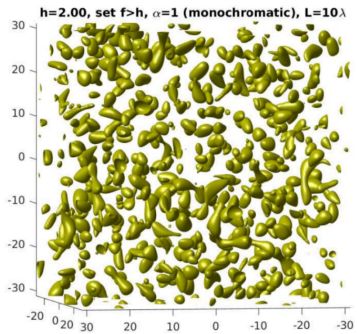
Kostlan ($d = 300$), RW ($d = 80$), FBRW ($d = 80$)



FBRW (Alex Barnett)



RW



Images : Alex Barnett

Soit le projecteur orthogonal :

$$\pi_{E_L} : L^2(M^n, g) \rightarrow E_L = \bigoplus_{\lambda \leq L} \ker(\Delta - \lambda \text{Id}).$$

Ce projecteur est à noyau, donc il existe $k_L \in C(M^2, \mathbb{R})$, tel que

$$\forall x \in M, \pi_L(f)(x) = \int_M k_L(x, y) f(y) dy.$$

Soit le projecteur orthogonal :

$$\pi_{E_L} : L^2(M^n, g) \rightarrow E_L = \bigoplus_{\lambda \leq L} \ker(\Delta - \lambda \text{Id}).$$

Ce projecteur est à noyau, donc il existe $k_L \in C(M^2, \mathbb{R})$, tel que

$$\forall x \in M, \pi_L(f)(x) = \int_M k_L(x, y) f(y) dy.$$

Si $(\varphi_{\lambda_k})_k$ est une L^2 -BON de fonctions propres de Δ , si

$$f_L = \sum_{\lambda \leq L} a_\lambda \varphi_\lambda,$$

$(a_\lambda)_\lambda$ i.i.d $\sim N(0, 1)$, et si

$$e_L(x, y) := \mathbb{E}(f(x)f(y)),$$

Soit le projecteur orthogonal :

$$\pi_{E_L} : L^2(M^n, g) \rightarrow E_L = \bigoplus_{\lambda \leq L} \ker(\Delta - \lambda \text{Id}).$$

Ce projecteur est à noyau, donc il existe $k_L \in C(M^2, \mathbb{R})$, tel que

$$\forall x \in M, \pi_L(f)(x) = \int_M k_L(x, y) f(y) dy.$$

Si $(\varphi_{\lambda_k})_k$ est une L^2 -BON de fonctions propres de Δ , si

$$f_L = \sum_{\lambda \leq L} a_\lambda \varphi_\lambda,$$

$(a_\lambda)_\lambda$ i.i.d $\sim N(0, 1)$, et si

$$e_L(x, y) := \mathbb{E}(f(x)f(y)),$$

alors

$$e_L = k_L.$$

En effet,

$$\begin{aligned} e_L(x, y) &= \sum_{k, \ell} \mathbb{E}(a_k a_\ell) \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_\ell}(y) \\ &= \sum_k \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_k}(y) = k_L(x, y). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} e_L(x, y) &= \sum_{k, \ell} \mathbb{E}(a_k a_\ell) \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_\ell}(y) \\ &= \sum_k \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_k}(y) = k_L(x, y). \end{aligned}$$

Importance de e_L

- ▶ Caractérise un champ gaussien

En effet,

$$\begin{aligned}e_L(x, y) &= \sum_{k, \ell} \mathbb{E}(a_k a_\ell) \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_\ell}(y) \\ &= \sum_k \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_k}(y) = k_L(x, y).\end{aligned}$$

Importance de e_L

- ▶ Caractérise un champ gaussien
- ▶ $e_L(x, x)$ est la variance de $f(x)$

En effet,

$$\begin{aligned} e_L(x, y) &= \sum_{k, \ell} \mathbb{E}(a_k a_\ell) \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_\ell}(y) \\ &= \sum_k \varphi_{\lambda_k}(x) \varphi_{\lambda_k}(y) = k_L(x, y). \end{aligned}$$

Importance de e_L

- ▶ Caractérise un champ gaussien
- ▶ $e_L(x, x)$ est la variance de $f(x)$
- ▶ $f(x)$ est très peu dépendant de $f(y)$ ssi $e_L(x, y)$ est proche de 0.

Noyau semi classique universel

Théorème (Carleman, Gårding, Hörmander) Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $x_0 \in M$ et x des coordonnées normales en x_0 . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right)$$

Noyau semi classique universel

Théorème (Carleman, Gårding, Hörmander) Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $x_0 \in M$ et x des coordonnées normales en x_0 . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

- ▶ l'erreur est en $O(\frac{1}{\sqrt{L}})$.

Noyau semi classique universel

Théorème (Carleman, Gårding, Hörmander) Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $x_0 \in M$ et x des coordonnées normales en x_0 . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

- ▶ l'erreur est en $O(\frac{1}{\sqrt{L}})$.
- ▶ C'est valable pour les dérivées de e_L

Noyau semi classique universel

Théorème (Carleman, Gårding, Hörmander) Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $x_0 \in M$ et x des coordonnées normales en x_0 . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

- ▶ l'erreur est en $O(\frac{1}{\sqrt{L}})$.
- ▶ C'est valable pour les dérivées de e_L
- ▶ $e_{FBRW}(x, y) := \mathcal{F}\mathbf{1}_{\mathbb{B}^n} = \frac{J_{n/2}(\|x-y\|)}{\|x-y\|^{n/2}}$.

Noyau semi classique universel

Théorème (Carleman, Gårding, Hörmander) Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $x_0 \in M$ et x des coordonnées normales en x_0 . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

- ▶ l'erreur est en $O(\frac{1}{\sqrt{L}})$.
- ▶ C'est valable pour les dérivées de e_L
- ▶ $e_{FBRW}(x, y) := \mathcal{F}\mathbf{1}_{\mathbb{B}^n} = \frac{J_{n/2}(\|x-y\|)}{\|x-y\|^{n/2}}$.
- ▶ On retrouve Weyl car $\dim E_L = \sum_i \|\varphi_i\|_{L^2}^2$ qui est égal à

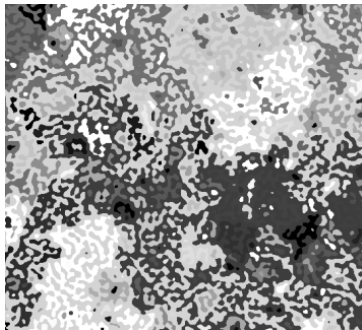
Noyau semi classique universel

Théorème (Carleman, Gårding, Hörmander) Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $x_0 \in M$ et x des coordonnées normales en x_0 . Alors

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

- ▶ l'erreur est en $O(\frac{1}{\sqrt{L}})$.
- ▶ C'est valable pour les dérivées de e_L
- ▶ $e_{FBRW}(x, y) := \mathcal{F} \mathbf{1}_{\mathbb{B}^n} = \frac{J_{n/2}(\|x-y\|)}{\|x-y\|^{n/2}}$.
- ▶ On retrouve Weyl car $\dim E_L = \sum_i \|\varphi_i\|_{L^2}^2$ qui est égal à

$$\int_M e_L(x, x) d\text{vol}(x) \sim \frac{1}{(2\pi)^n} L^{n/2} \text{vol}(M) \text{vol}(\mathbb{B}).$$



Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $a(L) \in [0, 1]$ et $e_{a,L}$ le noyau du projecteur L^2 sur

$$\bigoplus_{L-a(L)L \leq \lambda \leq L} E_\lambda.$$

Corollaire (Carleman, Gårding, Hörmander)

► Si $a(L) \rightarrow a < 1$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_{a,L} \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B} \setminus \sqrt{a}\mathbb{B}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $a(L) \in [0, 1]$ et $e_{a,L}$ le noyau du projecteur L^2 sur

$$\bigoplus_{a(L)L \leq \lambda \leq L} E_\lambda.$$

Corollaire (Carleman, Gårding, Hörmander)

- Si $a(L) \rightarrow 1$ mais $\frac{1}{\sqrt{L}} = o(1 - a(L))$, alors on note $e_{RW,L} = e_{a,L}$ et

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_{RW,L} \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right)$$

Soit (M, g) une variété compacte lisse riemannienne, $a(L) \in [0, 1]$ et $e_{a,L}$ le noyau du projecteur L^2 sur

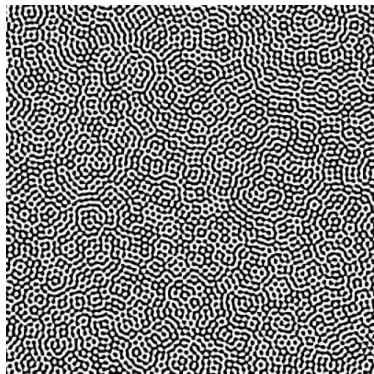
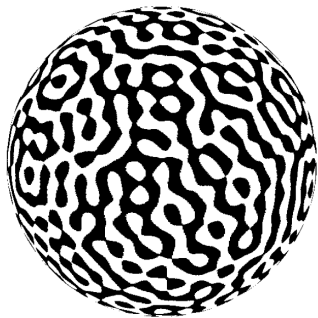
$$\bigoplus_{a(L)L \leq \lambda \leq L} E_\lambda.$$

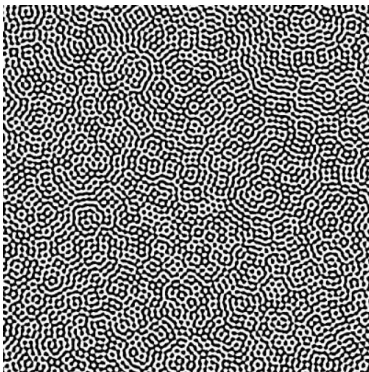
Corollaire (Carleman, Gårding, Hörmander)

- Si $a(L) \rightarrow 1$ mais $\frac{1}{\sqrt{L}} = o(1 - a(L))$, alors on note $e_{RW,L} = e_{a,L}$ et

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_{RW,L} \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

On a $e_{RW}(x, y) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{d\xi}{(2\pi)^n} = \frac{J_{(n-2)/2}(\|x-y\|)}{\|x-y\|^{(n-2)/2}}.$

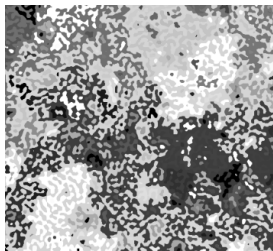
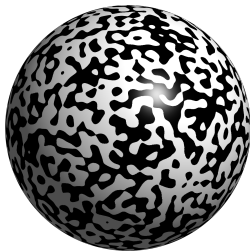




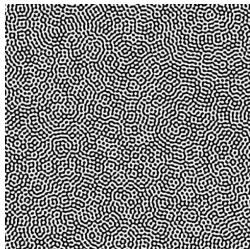
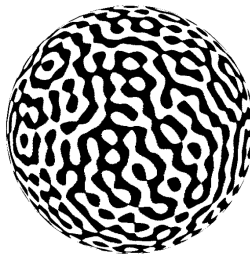
Le modèle planaire des ondes aléatoires :

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m|}(r) e^{im\theta},$$

où les $(a_m)_m$ sont des i.i.d. et suivent $N(0, 1)$.

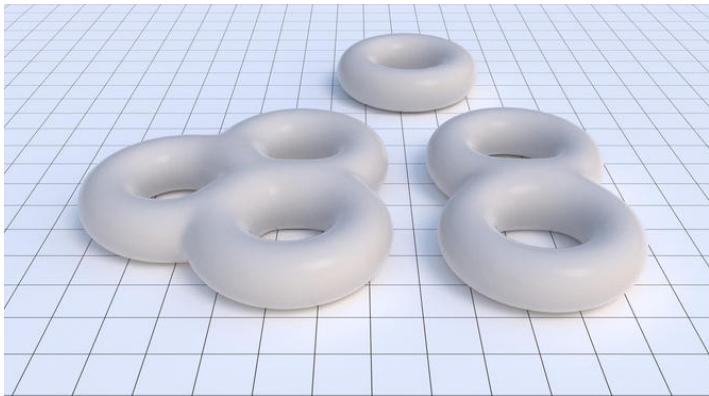


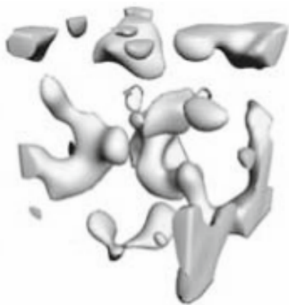
$e_{FBRW,L}$ et e_{FBRW}



$e_{RW,L}$ et e_{RW}

Partie 2 - Composantes universelles





$Z(f)$ contient environ 20 sphères. Contient-elle d'autres topologies ?

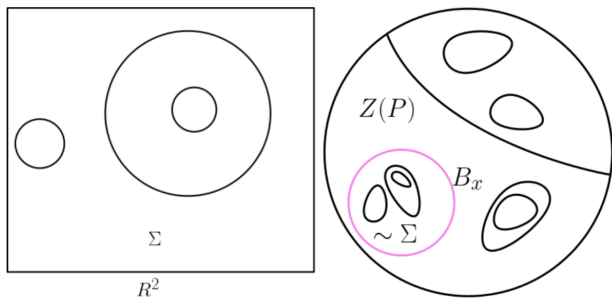
Dans la suite, $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est une hypersurface compacte lisse affine.

Théorème (G. & J.-Y. Welschinger 2016) Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte lisse,

$$f = \sum_{\lambda_k \leq L} a_k \varphi_{\lambda_k} \in E_L$$

une fonction aléatoire FBRW. Alors il existe $c_\Sigma > 0$ (explicite), telle que pour tout $x \in M$,

$$\mathbb{P} \left(Z(f) \cap B(x, \frac{1}{\sqrt{L}}) \sim_{diff} \Sigma \right) > c_\Sigma.$$



Corollaire

$$\liminf \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E} (\#c.c \text{ de } Z(f) \text{ difféomorphes à } \Sigma) > 0.$$

Corollaire

$$\liminf \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E}(\#c.c \text{ de } Z(f) \text{ difféomorphes à } \Sigma) > 0.$$

Exemple.

$$\liminf_L \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E}(\#c.c \text{ de } Z(f) \text{ diff à } S^i \times S^{n-1-i}) \geq e^{-e^{257n^{3/2}}} \text{vol}M.$$

Remarque On verra que

$$\limsup_L \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E}b_0(Z(f)) \leq e^{-Dn^2} \text{vol}M.$$

Theorem (Sarnak-Wigman 2019, Canzani-Sarnak 2019)

Pour FBRW et RW, pour tout $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, il existe c_Σ ,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E}(\#c.c \text{ de } Z(f) \text{ diff à } \Sigma) \rightarrow c_\Sigma \text{vol}M.$$

Démonstration du Corollaire. On recouvre M par un nombre maximal des boules disjointes $(B_i)_i$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{L}}$.

Démonstration du Corollaire. On recouvre M par un nombre maximal des boules disjointes $(B_i)_i$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{L}}$. Il y en a au moins $c\text{vol}(M)\sqrt{L}^n$ car chaque boule a un volume d'environ $1/\sqrt{L}^n$.

Démonstration du Corollaire. On recouvre M par un nombre maximal des boules disjointes $(B_i)_i$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{L}}$. Il y en a au moins $c\text{vol}(M)\sqrt{L}^n$ car chaque boule a un volume d'environ $1/\sqrt{L}^n$. Dans chacune de ces boules, il y a une probabilité c_Σ de contenir une composante de type Σ . Maintenant

$$\mathbb{E}(\# \text{ c.c diff à } \Sigma) \geq \sum_{B_i} \mathbb{E}(\# \text{ c.c dans } B_i \text{ diff à } \Sigma)$$

Démonstration du Corollaire. On recouvre M par un nombre maximal des boules disjointes $(B_i)_i$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{L}}$. Il y en a au moins $c\text{vol}(M)\sqrt{L}^n$ car chaque boule a un volume d'environ $1/\sqrt{L}^n$. Dans chacune de ces boules, il y a une probabilité c_Σ de contenir une composante de type Σ . Maintenant

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\# \text{ c.c diff à } \Sigma) &\geq \sum_{B_i} \mathbb{E}(\# \text{ c.c dans } B_i \text{ diff à } \Sigma) \\ &\geq \sum_{B_i} \mathbb{P}(\exists \text{ c.c dans } B_i \text{ diff à } \Sigma) \end{aligned}$$

Démonstration du Corollaire. On recouvre M par un nombre maximal des boules disjointes $(B_i)_i$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{L}}$. Il y en a au moins $c\text{vol}(M)\sqrt{L}^n$ car chaque boule a un volume d'environ $1/\sqrt{L}^n$. Dans chacune de ces boules, il y a une probabilité c_Σ de contenir une composante de type Σ . Maintenant

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\# \text{ c.c diff à } \Sigma) &\geq \sum_{B_i} \mathbb{E}(\# \text{ c.c dans } B_i \text{ diff à } \Sigma) \\ &\geq \sum_{B_i} \mathbb{P}(\exists \text{ c.c dans } B_i \text{ diff à } \Sigma) \\ &> c\text{vol}(M)\sqrt{L}^n c_\Sigma.\end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème

Théorème (Seifert 1936, Nash 1952) Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface compacte lisse. Alors il existe un polynôme $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $p^{-1}(0)$ est isotope à Σ parmi les hypersurfaces lisses, et aussi proche de Σ qu'on veut.

Démonstration du théorème

Théorème (Seifert 1936, Nash 1952) Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface compacte lisse. Alors il existe un polynôme $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $p^{-1}(0)$ est isotope à Σ parmi les hypersurfaces lisses, et aussi proche de Σ qu'on veut.

Lemme 1 Soit Σ comme ci-dessus. Alors il existe une fonction $f_\Sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, lisse, dans la classe de Schwartz, telle que

- ▶ $f_\Sigma^{-1}(0)$ est difféomorphe à Σ ;
- ▶ $\text{supp}(\mathcal{F}f_\Sigma) \subset \mathbb{B}$.

Pourquoi désirer que $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$?

Pourquoi désire-t-on que $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$?

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}, \frac{y}{\sqrt{L}}\right) \rightarrow e_{FBRW} = \int_{\mathbb{B}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} d\xi.$$

Pourquoi désirer que $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$?

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}, \frac{y}{\sqrt{L}}\right) \rightarrow e_{FBRW} = \int_{\mathbb{B}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} d\xi.$$

De plus le projecteur $\pi : L^2 \rightarrow L^2$ défini par

$$\pi_{FBRW} f = \int_{\mathbb{R}^n} e_{FBRW}(\cdot, y) f(y) dy$$

satisfait

$$\pi_{FBRW} f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\mathbb{B}} e^{i\langle \cdot, \xi \rangle} \mathcal{F}f(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbb{B}} \mathcal{F}f).$$

Pourquoi désirer que $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$?

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}, \frac{y}{\sqrt{L}}\right) \rightarrow e_{FBRW} = \int_{\mathbb{B}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} d\xi.$$

De plus le projecteur $\pi : L^2 \rightarrow L^2$ défini par

$$\pi_{FBRW} f = \int_{\mathbb{R}^n} e_{FBRW}(\cdot, y) f(y) dy$$

satisfait

$$\pi_{FBRW} f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\mathbb{B}} e^{i\langle \cdot, \xi \rangle} \mathcal{F}f(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbb{B}} \mathcal{F}f).$$

Donc si $\text{Supp}(\mathcal{F}f_{\Sigma}) \subset \mathbb{B}$, alors

$$\pi_{FBRW} f_{\Sigma} = f_{\Sigma}.$$

f_{Σ} va nous servir à construire une suite $(f_L)_L$ d'éléments de E_L proche de f_{Σ} à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{L}}$ dans $B(x_0, \frac{1}{\sqrt{L}})$.

Démonstration du Lemme 1

- ▶ Soit p un polynôme s'annulant transversalement sur Σ , donné par le théorème de Seifert-Nash. Alors $\tilde{p} = pe^{-|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et s'annule toujours sur Σ .

Démonstration du Lemme 1

- ▶ Soit p un polynôme s'annulant transversalement sur Σ , donné par le théorème de Seifert-Nash. Alors $\tilde{p} = pe^{-|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et s'annule toujours sur Σ .
- ▶ Soit $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow 1$ une fonction cut-off : $\chi = 1$ sur $\frac{1}{2}\mathbb{B}$, et $\chi = 0$ au-delà de \mathbb{B} . Pour tout $R > 0$, soit

$$\pi_R = \chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\mathcal{F}\tilde{p}.$$

Alors $\pi_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}\tilde{p}$, donc $\mathcal{F}^{-1}\pi_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \tilde{p}$, et $\text{Supp } \pi_R \subset R\mathbb{B}$.

Démonstration du Lemme 1

- ▶ Soit p un polynôme s'annulant transversalement sur Σ , donné par le théorème de Seifert-Nash. Alors $\tilde{p} = pe^{-|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et s'annule toujours sur Σ .
- ▶ Soit $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow 1$ une fonction cut-off : $\chi = 1$ sur $\frac{1}{2}\mathbb{B}$, et $\chi = 0$ au-delà de \mathbb{B} . Pour tout $R > 0$, soit

$$\pi_R = \chi\left(\frac{\cdot}{R}\right)\mathcal{F}\tilde{p}.$$

Alors $\pi_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}\tilde{p}$, donc $\mathcal{F}^{-1}\pi_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \tilde{p}$, et $\text{Supp } \pi_R \subset R\mathbb{B}$.

- ▶ On fixe $R > 0$ assez grand, de sorte que $\mathcal{F}^{-1}\pi_R$ s'annule selon une isotopie de Σ . Alors $\mathcal{F}^{-1}(\pi_R(R \cdot))$ a une transformée de Fourier de support dans \mathbb{B} et s'annule sur une isotopie de Σ .

Lemme 2. Soit $x_0 \in M$. Il existe une suite de fonctions $(s_L)_L \in E_L^{\mathbb{N}}$ telle que

- ▶ pour tout $L > 0$ assez grand, s_L s'annule transversalement près de x_0 sur $\Sigma' \sim \frac{1}{\sqrt{L}}\Sigma$,
- ▶ et il existe $\epsilon > 0$, tel que

$$\forall L \gg 1, \forall y \in \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbb{B}, |s_L(y)| < \epsilon \Rightarrow |ds_L(y)| > \epsilon\sqrt{L}.$$

Démonstration du Lemme 2. Sur une carte de coordonnées normales en $x_0 \in M$, soit χ une fonction cut-off lisse à support dans cette carte. Soit f_Σ du Lemme 1 (i.e. f s'annule sur $\sim_{diff} \Sigma$ et $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$). Alors

$$f_L(y) := \chi(y) f_\Sigma(y\sqrt{L})$$

Démonstration du Lemme 2. Sur une carte de coordonnées normales en $x_0 \in M$, soit χ une fonction cut-off lisse à support dans cette carte. Soit f_Σ du Lemme 1 (i.e. f s'annule sur $\sim_{diff} \Sigma$ et $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$). Alors

$$f_L(y) := \chi(y) f_\Sigma(y\sqrt{L})$$

- ▶ s'annule transversalement sur $\frac{1}{\sqrt{L}}\Sigma$

Démonstration du Lemme 2. Sur une carte de coordonnées normales en $x_0 \in M$, soit χ une fonction cut-off lisse à support dans cette carte. Soit f_Σ du Lemme 1 (i.e. f s'annule sur $\sim_{diff} \Sigma$ et $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$). Alors

$$f_L(y) := \chi(y) f_\Sigma(y\sqrt{L})$$

- ▶ s'annule transversalement sur $\frac{1}{\sqrt{L}}\Sigma$
- ▶ est proche d'un élément de E_L .

Démonstration du Lemme 2. Sur une carte de coordonnées normales en $x_0 \in M$, soit χ une fonction cut-off lisse à support dans cette carte. Soit f_Σ du Lemme 1 (i.e. f s'annule sur $\sim_{diff} \Sigma$ et $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subset \mathbb{B}$). Alors

$$f_L(y) := \chi(y) f_\Sigma(y\sqrt{L})$$

- ▶ s'annule transversalement sur $\frac{1}{\sqrt{L}}\Sigma$
- ▶ est proche d'un élément de E_L .

En effet, soit

$$s_L := \int_M e_L(\cdot, y) f_L(y) dy \in E_L.$$

Alors en posant $y\sqrt{L} = y'$, on a

$$s_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right) = \frac{1}{\sqrt{L}^n} \int_{\sqrt{L}\text{Supp } \chi} e_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}, \frac{y'}{\sqrt{L}}\right) \chi\left(\frac{y'}{\sqrt{L}}\right) f_{\Sigma}(y') dy'.$$

Alors en posant $y\sqrt{L} = y'$, on a

$$s_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right) = \frac{1}{\sqrt{L}^n} \int_{\sqrt{L}\text{Supp } \chi} e_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}, \frac{y'}{\sqrt{L}}\right) \chi\left(\frac{y'}{\sqrt{L}}\right) f_\Sigma(y') dy'.$$

Par Carleman & Co, on a donc

$$s_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right) \rightarrow_L \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{B}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} f_\Sigma(y) dy d\xi = f_\Sigma(x)$$

car $\text{Supp } \mathcal{F}f \subset \mathbb{B}$.

Alors en posant $y\sqrt{L} = y'$, on a

$$s_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right) = \frac{1}{\sqrt{L}^n} \int_{\sqrt{L}\text{Supp } \chi} e_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}, \frac{y'}{\sqrt{L}}\right) \chi\left(\frac{y'}{\sqrt{L}}\right) f_\Sigma(y') dy'.$$

Par Carleman & Co, on a donc

$$s_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right) \rightarrow_L \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{B}} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} f_\Sigma(y) dy d\xi = f_\Sigma(x)$$

car $\text{Supp } \mathcal{F}f \subset \mathbb{B}$. Comme la convergence est aussi C^1 , pour L assez grand $s_L \in E_L$ s'annule transversalement sur $\Sigma' \sim \frac{1}{\sqrt{L}}\Sigma$, et on a la transversalité quantitative également. \square

Démonstration du Théorème. On prend des coordonnées normales en x , et on écrit

$$f = a \frac{s_L}{\|s_L\|_{L^2}} + g,$$

avec $a \sim N(0, 1)$, $g \in (s_L)^\perp \subset E_L$ aléatoire indépendante de a .

Démonstration du Théorème. On prend des coordonnées normales en x , et on écrit

$$f = a \frac{s_L}{\|s_L\|_{L^2}} + g,$$

avec $a \sim N(0, 1)$, $g \in (s_L)^\perp \subset E_L$ aléatoire indépendante de a .
Il existe $\epsilon > 0$, tel que

$$\forall x \in \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbb{B}, |s_L(x)| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{L}}|ds_L(x)| > \epsilon.$$

Démonstration du Théorème. On prend des coordonnées normales en x , et on écrit

$$f = a \frac{s_L}{\|s_L\|_{L^2}} + g,$$

avec $a \sim N(0, 1)$, $g \in (s_L)^\perp \subset E_L$ aléatoire indépendante de a .
Il existe $\epsilon > 0$, tel que

$$\forall x \in \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbb{B}, |s_L(x)| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{L}}|ds_L(x)| > \epsilon.$$

Fait 1 (Ehresmann) Pour tout $M > 0$,

$$|a| \geq M \text{ et } (\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|dg\|)_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} < \frac{M\epsilon}{2\|s_L\|_{L^2}} \Rightarrow \\ Z(f) \cap B(x, \frac{1}{\sqrt{L}}) \sim \Sigma.$$

Fait 2. $\|s_L\|_{L^2} \sim_L c\sqrt{L}^{-n/2}$.

Fait 2. $\|s_L\|_{L^2} \sim_L c\sqrt{L}^{-n/2}$. En effet,

$$s_L\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right) \rightarrow_L f_\Sigma(x)$$

donc

$$\int |s_L|^2 dy = L^{-n/2} \int |f_\Sigma|^2 dy.$$

Synthèse : $\mathbb{P}(Z(as_L + g) \cap \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbb{B} \sim \Sigma)$ est plus grand que

$$\mathbb{P}(|a| > M) \mathbb{P}\left(\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|dg\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \leq \frac{M\epsilon}{2\|s_L\|_{L^2}}\right).$$

Synthèse : $\mathbb{P}(Z(as_L + g) \cap \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbb{B} \sim \Sigma)$ est plus grand que

$$\mathbb{P}(|a| > M) \mathbb{P}\left(\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|dg\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \leq \frac{M\epsilon}{2\|s_L\|_{L^2}}\right).$$

Lemme 3. Il existe C , telle que pour tout $x \in M$, pour tout $L \gg 1$,

$$\mathbb{E}\left(\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|dg\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})}\right) \leq C\sqrt{L}^{n/2}.$$

Admettons un instant ce Lemme 3.

Rappelons que pour toute variable aléatoire $X \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}(X \geq M) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{M}.$$

Rappelons que pour toute variable aléatoire $X \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}(X \geq M) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{M}.$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|dg\| \leq \frac{M\epsilon}{2\|s_L\|_{L^2}}\right) \geq 1 - \frac{2cC}{M\epsilon}.$$

Rappelons que pour toute variable aléatoire $X \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}(X \geq M) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{M}.$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|dg\| \leq \frac{M\epsilon}{2\|s_L\|_{L^2}}\right) \geq 1 - \frac{2cC}{M\epsilon}.$$

On choisit $M = \frac{4C}{\epsilon}$ et on obtient au final le résultat :

$$\mathbb{P}\left(Z(f) \cap \frac{1}{\sqrt{L}}\mathbb{B} \sim \Sigma\right) \gtrsim \frac{1}{2}e^{-M^2}\square.$$

Démonstration du Lemme 3

Lemme 3. Il existe C , telle que pour tout $x \in M$, pour tout $L \gg 1$,

$$\mathbb{E} \left(\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}} \|dg\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \right) \leq C\sqrt{L}^{n/2}.$$

Démonstration du Lemme 3

Lemme 3. Il existe C , telle que pour tout $x \in M$, pour tout $L \gg 1$,

$$\mathbb{E} \left(\|g\| + \frac{1}{\sqrt{L}} \|dg\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \right) \leq C\sqrt{L}^{n/2}.$$

Inégalité de Sobolev : Pour tout $k > n/2$, et $z \in B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})$,

$$|g(z)| \leq \frac{2k}{(\text{vol}(x, \frac{1}{\sqrt{L}}))^{1/2}} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{L}^i} \left(\frac{1}{i!} \int_{B(x, \frac{2}{\sqrt{L}})} \|d^i g(y)\|_2^2 dy \right)^{1/2}.$$

Donc en utilisant Cauchy-Schwartz,

$$\mathbb{E}\|g\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \leq \frac{C}{(\text{vol}(x, \frac{1}{\sqrt{L}}))^{1/2}} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{L}^i} \left(\int_{B(x, \frac{2}{\sqrt{L}})} \mathbb{E}\|d^i g(y)\|_2^2 dy \right)^{1/2}.$$

Donc en utilisant Cauchy-Schwartz,

$$\mathbb{E}\|g\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \leq \frac{C}{(\text{vol}(x, \frac{1}{\sqrt{L}}))^{1/2}} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{L}^i} \left(\int_{B(x, \frac{2}{\sqrt{L}})} \mathbb{E}\|d^i g(y)\|_2^2 dy \right)^{1/2}.$$

Comme

$$\mathbb{E}\|d^i g(y)\|_2^2 = \sum_{|I|=i} \mathbb{E}\left(\frac{\partial^{|I|}}{\partial x_I} g\right)^2$$

Donc en utilisant Cauchy-Schwartz,

$$\mathbb{E}\|g\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \leq \frac{C}{(\text{vol}(x, \frac{1}{\sqrt{L}}))^{1/2}} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{L}^i} \left(\int_{B(x, \frac{2}{\sqrt{L}})} \mathbb{E}\|d^i g(y)\|_2^2 dy \right)^{1/2}.$$

Comme

$$\mathbb{E}\|d^i g(y)\|_2^2 = \sum_{|I|=i} \mathbb{E}\left(\frac{\partial^{|I|}}{\partial x_I} g\right)^2$$

c'est égal à

$$\sum_{|I|=i} \frac{\partial^{|I|, |I|}}{\partial x_I \partial y_I} e_{L|x=y}.$$

En effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\partial_{x_I} g)^2 &= \mathbb{E}(\partial_{x_I} g(x) \partial_{y_I} g(y)|_{x=y}) \\ &= \partial_{x_I, y_I} \mathbb{E}(g(x)g(y))|_{x=y} \\ &= \partial_{x_I, y_I} e_{L|x=y}.\end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\partial_{x_I} g)^2 &= \mathbb{E}(\partial_{x_I} g(x) \partial_{y_I} g(y)|_{x=y}) \\ &= \partial_{x_I, y_I} \mathbb{E}(g(x)g(y))|_{x=y} \\ &= \partial_{x_I, y_I} e_L|_{x=y}.\end{aligned}$$

En utilisant Carleman & Co pour les dérivées,

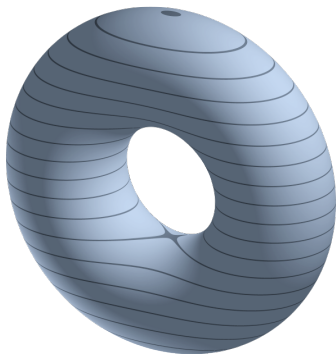
$$\mathbb{E}\|d^i g(y)\|_2^2 \leq \sqrt{L}^{n+2i} \int_{\mathbb{B}} \|\xi\|^{2I} d\xi.$$

On obtient

$$\mathbb{E}\|g\|_{B(x, \frac{1}{\sqrt{L}})} \leq C\sqrt{L}^{n/2}.$$

La majoration pour dg est similaire. \square

Partie 3 - Nombres de Betti



Théorème (G. & J.-Y. Welschinger 2017) Soit (M^n, g) une variété compacte lisse riemannienne, $f \in E_L$ une somme aléatoire FBRW. Alors

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E} b_i(Z(f)) \leq c_i \text{vol}(M),$$

où

$$c_i = \frac{\int_{\text{Sym}(n-1-i, i)} |\det Y| d\mu(Y)}{\sqrt{\pi}^{n+1} \sqrt{(n+2)(n+4)}^{n-1}}$$

et $d\mu(Y)$ est la mesure gaussienne associée au produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(AB) + \frac{1}{6} \text{Tr} A \text{Tr} B.$$

Pour les RW,

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E} b_i(Z(f)) \leq c_i \text{vol}(M),$$

où

$$c_i = \frac{\int_{\text{Sym}(n-1-i, i)} |\det Y| d\mu(Y)}{\sqrt{\pi}^{n+1} \sqrt{n(n+2)^{n-1}}}$$

et $d\mu(Y)$ est la mesure gaussienne associée au produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(AB) + \frac{1}{2} \text{Tr} A \text{Tr} B.$$

► Pour $n = 1$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbb{E}b_0(Z(f)) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \text{vol}(M).$$

► Pour $n = 2$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \mathbb{E}b_0(Z(f)) \leq \frac{1}{8\pi^2} \text{vol}(M).$$

- Pour $n = 1$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbb{E} b_0(Z(f)) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \text{vol}(M).$$

- Pour $n = 2$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \mathbb{E} b_0(Z(f)) \leq \frac{1}{8\pi^2} \text{vol}(M).$$

- Par la théorie de Morse,

$$\lim_L \frac{1}{\sqrt{L}^n} \mathbb{E} \chi(Z(f)) = \frac{\int_{Sym(n-1)} \det Y d\mu(Y)}{\sqrt{\pi}^{n+1} \sqrt{(n+2)(n+4)}^{n-1}} \text{vol}(M)$$

(T. Letendre 2016).

Inégalités faibles de Morse

Soit Z une variété compacte lisse et $p : Z \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse dont les points critiques sont non dégénérés. Soit

$$\text{Crit}_i = \{x \in Z, dp(x) = 0, \#\{\lambda \in \text{Sp}(d^2p(x)) \cap \mathbb{R}^-\} = i\}.$$

Inégalités faibles de Morse

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, b_i(Z) \leq \#\text{Crit}_i(p).$$

Soit $p : M \rightarrow \mathbb{R}$ et f aléatoire :

$$\mathbb{E}b_i(Z(f)) \leq \mathbb{E}\#\text{Crit}_i(p|_{Z(f)}).$$

Calculer $\mathbb{E}\#\text{Crit}_i(p|Z(f))$

Situation (beaucoup) plus simple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aléatoire, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Calculons $\mathbb{E}(\#Z(f) \cap I)$ (son nombre de zéros moyen). Alors

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}(\#Z(f)) = \int_I \mathbb{E}(|f'(x)| \mid f(x) = 0) \varphi_{f(x)}(0) dx,$$

où $\varphi_{f(x)}(0)$ désigne la densité de $f(x)$ en 0. Si f a pour covariance $e(x, y)$, alors

$$\varphi_{f(x)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e(x, x)}}.$$

"Démonstration".

- ▶ Si f s'annule transversalement sur I ,

$$\#Z(f) \cap I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_I |f'(x)| \mathbf{1}_{|f| \leq \epsilon} dx,$$

"Démonstration".

- ▶ Si f s'annule transversalement sur I ,

$$\#Z(f) \cap I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_I |f'(x)| \mathbf{1}_{|f| \leq \epsilon} dx,$$

- ▶ de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\#Z(f) \cap I) &= \int_I \mathbb{E}\left(|f'(x)| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{1}_{|f| \leq \epsilon}\right) dx \\ &= \int_I \mathbb{E}(|f'(x)| \mid f(x) = 0) \varphi_{f(x)}(0) dx. \end{aligned}$$

□

Jouet calcul : $\mathbb{E} \# \text{Crit}_i(f)$ (ça n'est pas $\text{Crit}_i(p|_{Z(f)})$). C'est égal à

$$\int_M \mathbb{E} (|\det d^2 f(x)| \mathbf{1}_{\text{Ind}(d^2 f(x))=i} | df(x) = 0) \varphi_{df(x)}(0) d\text{vol}(x).$$

Jouet calcul : $\mathbb{E} \# \text{Crit}_i(f)$ (ça n'est pas $\text{Crit}_i(p|_{Z(f)})$). C'est égal à

$$\int_M \mathbb{E} (|\det d^2 f(x)| \mathbf{1}_{\text{Ind}(d^2 f(x))=i} | df(x) = 0) \varphi_{df(x)}(0) d\text{vol}(x).$$

Quelle est la loi de $(d^2 f(x) | df(x) = 0)$?

Interlude : vecteurs gaussiens

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur gaussien, i.e toute combinaison linéaire de ses coefficients est gaussien. En particulier chacune de ses coordonnées suit une loi gaussienne. On suppose que $\mathbb{E}X = 0$. Soit

$$\Sigma = (\mathbb{E}(X_i X_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Alors pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}x, x \rangle} \frac{dx}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}.$$

Faits.

- ▶ Deux vecteurs gaussiens centrés $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^m$ sont indépendants ssi pour tout $i, j \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}(X_i Y_j) = 0$.

Retour à

$$\mathbb{E}(|\det d^2 f(x)| \mathbf{1}_{\text{Ind}(d^2 f(x))=i} | df(x) = 0) \varphi_{df(x)}(0)$$

et à la loi de $(d^2 f(x) | df(x))$. Que valent les covariances de ces vecteurs gaussiens ?

Retour à

$$\mathbb{E}(|\det d^2 f(x)| \mathbf{1}_{\text{Ind}(d^2 f(x))=i} | df(x) = 0) \varphi_{df(x)}(0)$$

et à la loi de $(d^2 f(x) | df(x))$. Que valent les covariances de ces vecteurs gaussiens ?

Rappelons que par Garding

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}} e^{i \langle x-y, \xi \rangle} d\xi.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{L}^{n+4}} \mathbb{E} \left(\partial_{ij}^2 f(x) \partial_{kl}^2 f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{L}^{n+4}} \partial_{x_i x_j, y_k y_l}^{2,2} e_{L|x=y}$$

qui tend vers

$$\int_{\mathbb{B}} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l d\xi := \Sigma_{(ij)(kl)}.$$

Retour à

$$\mathbb{E}(|\det d^2 f(x)| \mathbf{1}_{\text{Ind}(d^2 f(x))=i} | df(x) = 0) \varphi_{df(x)}(0)$$

et à la loi de $(d^2 f(x) | df(x))$. Que valent les covariances de ces vecteurs gaussiens ?

Rappelons que par Garding

$$\frac{1}{\sqrt{L}^n} e_L \left(x_0 + \frac{x}{\sqrt{L}}, x_0 + \frac{y}{\sqrt{L}} \right) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}} e^{i \langle x-y, \xi \rangle} d\xi.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{L}^{n+4}} \mathbb{E} (\partial_{ij}^2 f(x) \partial_{kl}^2 f(x)) = \frac{1}{\sqrt{L}^{n+4}} \partial_{x_i x_j, y_k y_l}^{2,2} e_{L|x=y}$$

qui tend vers

$$\int_{\mathbb{B}} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l d\xi := \Sigma_{(ij)(kl)}.$$

Donc $Y = \text{Hess}f(x) \sqrt{L}^{-\frac{n+4}{2}} \sim_L N(0, \Sigma)$.

On a

$$\mathbb{E}(\partial_{ij}^2 f(x) \partial_k f) = \partial_{x_i x_j, y_k}^{2,1} e_L \sim_L \sqrt{L}^{n+3} \int_{\mathbb{B}} \xi_i \xi_j \xi_k d\xi = 0.$$

Donc $d^2 f(x)$ et $f(x)$ sont asymptotiquement indépendants,

On a

$$\mathbb{E}(\partial_{ij}^2 f(x) \partial_k f) = \partial_{x_i x_j, y_k}^{2,1} e_L \sim_L \sqrt{L}^{n+3} \int_{\mathbb{B}} \xi_i \xi_j \xi_k d\xi = 0.$$

Donc $d^2 f(x)$ et $f(x)$ sont asymptotiquement indépendants, et donc

$$\mathbb{E} \# \text{Crit}_i(f) \sim_L L^{\frac{n(n+4)}{2}} \int_M \mathbb{E}_{\Sigma}(|\det Y| \mathbf{1}_{\text{Ind} Y=i}) \varphi_{df(x)}(0) d\text{vol}(x).$$

On a

$$\mathbb{E}(\partial_{ij}^2 f(x) \partial_k f) = \partial_{x_i x_j, y_k}^{2,1} e_L \sim_L \sqrt{L}^{n+3} \int_{\mathbb{B}} \xi_i \xi_j \xi_k d\xi = 0.$$

Donc $d^2 f(x)$ et $f(x)$ sont asymptotiquement indépendants, et donc

$$\mathbb{E} \# \text{Crit}_i(f) \sim_L L^{\frac{n(n+4)}{2}} \int_M \mathbb{E}_{\Sigma}(|\det Y| \mathbf{1}_{\text{Ind} Y=i}) \varphi_{df(x)}(0) d\text{vol}(x).$$

De façon similaire et plus simple

$$df(x) \sim \sqrt{L}^{n+2} N(0, I_n),$$

donc

$$\varphi_{df(x)}(0) \sim_L \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} L^{-\frac{n(n+2)}{4}}$$

On a

$$\mathbb{E}(\partial_{ij}^2 f(x) \partial_k f) = \partial_{x_i x_j, y_k}^{2,1} e_L \sim_L \sqrt{L}^{n+3} \int_{\mathbb{B}} \xi_i \xi_j \xi_k d\xi = 0.$$

Donc $d^2 f(x)$ et $f(x)$ sont asymptotiquement indépendants, et donc

$$\mathbb{E} \# \text{Crit}_i(f) \sim_L L^{\frac{n(n+4)}{2}} \int_M \mathbb{E}_{\Sigma}(|\det Y| \mathbf{1}_{\text{Ind} Y=i}) \varphi_{df(x)}(0) d\text{vol}(x).$$

De façon similaire et plus simple

$$df(x) \sim \sqrt{L}^{n+2} N(0, I_n),$$

donc

$$\varphi_{df(x)}(0) \sim_L \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} L^{-\frac{n(n+2)}{4}}$$

et au total la moyenne est en $c_i L^{\frac{n}{2}} \text{vol}(M)$. \square

Pour $\mathbb{E}\#\text{Crit}_i(p|_Z(f))$. Localement on peut supposer que $p = x_n$, donc x est un point critique de $p|_Z(f)$ ssi

$$(f(x), \partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_{n-1}} f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Le calcul est similaire. \square

Autres résultats

Theorem (Nazarov-Sodin 2010). Let f_L be a RW sur (\mathbb{S}^2, g_0) with energy L . Then, $\exists c > 0$,

$$\mathbb{E}b_0Z_0(f_L) \sim_{L \rightarrow \infty} cL.$$

Autres résultats

Theorem (Nazarov-Sodin 2010). Let f_L be a RW sur (\mathbb{S}^2, g_0) with energy L . Then, $\exists c > 0$,

$$\mathbb{E}b_0 Z_0(f_L) \sim_{L \rightarrow \infty} cL.$$

Theorem (Nazarov-Sodin 2016) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une RW. Alors $\exists c > 0$,

$$\frac{\mathbb{E}b_0(Z(f) \cap B_R)}{\text{vol}(B_R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} c.$$

Autres résultats

Theorem (Nazarov-Sodin 2010). Let f_L be a RW sur (\mathbb{S}^2, g_0) with energy L . Then, $\exists c > 0$,

$$\mathbb{E}b_0 Z_0(f_L) \sim_{L \rightarrow \infty} cL.$$

Theorem (Nazarov-Sodin 2016) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une RW.
Alors $\exists c > 0$,

$$\frac{\mathbb{E}b_0(Z(f) \cap B_R)}{\text{vol}(B_R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} c.$$

Question ouverte : Quelle est la valeur de c ?

Autres résultats

Theorem (Nazarov-Sodin 2010). Let f_L be a RW sur (\mathbb{S}^2, g_0) with energy L . Then, $\exists c > 0$,

$$\mathbb{E}b_0 Z_0(f_L) \sim_{L \rightarrow \infty} cL.$$

Theorem (Nazarov-Sodin 2016) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une RW. Alors $\exists c > 0$,

$$\frac{\mathbb{E}b_0(Z(f) \cap B_R)}{\text{vol}(B_R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} c.$$

Question ouverte : Quelle est la valeur de c ?

Même question pour $Z(f - u)$, avec constante $c(u)$.

Theorem (G. 2020) Pour les RW,

$$c(u) = \frac{1}{n^{n/2} \sqrt{2\pi}^{n+1}} H_{n-1}(u) e^{-\frac{1}{2}u^2} (1 + O(e^{-cu^2})).$$

Partie 4 - Percolation



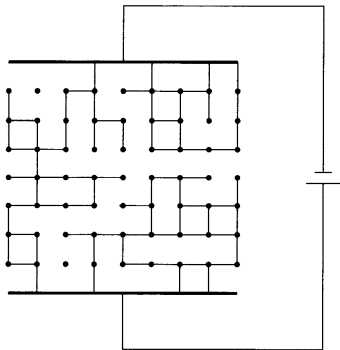
Percolation Model for Nodal Domains of Chaotic Wave Functions

E. Bogomolny and C. Schmit

Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, Université de Paris-Sud, Bâtiment 100, 91405 Orsay Cedex, France*

(Received 9 October 2001; published 1 March 2002)

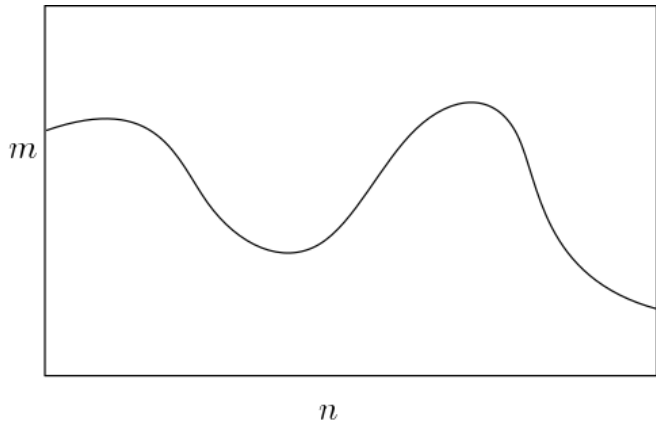
Nodal domains are regions where a function has definite sign. In [1] it is conjectured that the distribution of nodal domains for quantum eigenfunctions of chaotic systems is universal. We propose a percolationlike model for description of these nodal domains which permits us to calculate all interesting quantities analytically, agrees well with numerical simulations, and due to the relation to percolation theory opens the way to deeper understanding of the structure of chaotic wave functions.



Percolation par arêtes sur le réseau carré

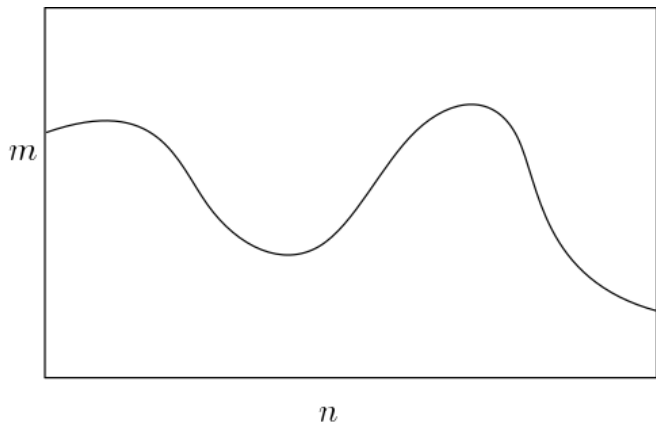
Question générale

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{-, +\}$ aléatoire, de mesure invariante par translations



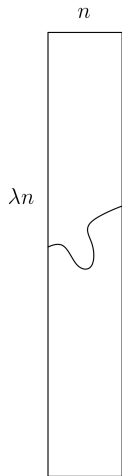
Question générale

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{-, +\}$ aléatoire, de mesure invariante par translations



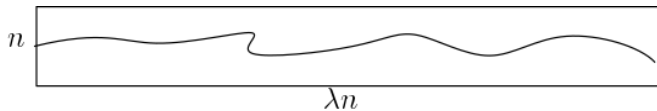
$\limsup_{n,m \rightarrow \infty} \text{Prob}(\text{positive continuous crossing}) > 0?$

Trop facile



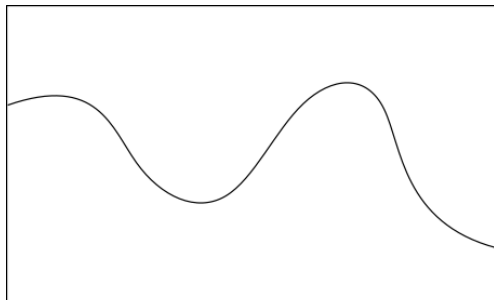
Prob $\xrightarrow{n, \lambda \rightarrow \infty}$ 1

Trop difficile



Prob $\xrightarrow[n, \lambda \rightarrow \infty]{} 0$

La bonne question



nR

R est un rectangle fixe.

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\text{traversée positive continue de } nR) > 0 ?$

Squares

$$\text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Black wavy line} \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Red wavy line} \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

The image shows a mathematical equation involving two square boxes. The first box contains a black wavy line that starts at the bottom-left corner, rises to a peak, dips to a valley, and then rises to a higher peak before ending at the top-right corner. The second box contains a red wavy line that starts at the top-right corner, dips to a valley, rises to a peak, dips to a valley, and rises to a peak before ending at the bottom-left corner. The two lines are complementary, together covering the entire square area. The equation states that the probability of the first box plus the probability of the second box equals 1.

Squares

$$\text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Black wavy line} \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Red wavy line} \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

If the measure of f is invariant by :

- ▶ symmetry $+$ and $-$
- ▶ symmetry x_1 and x_2

Squares

$$\text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Black wavy line} \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Red wavy line} \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

If the measure of f is invariant by :

- ▶ symmetry + and -
- ▶ symmetry x_1 and x_2

then the two probabilities are equal

Squares

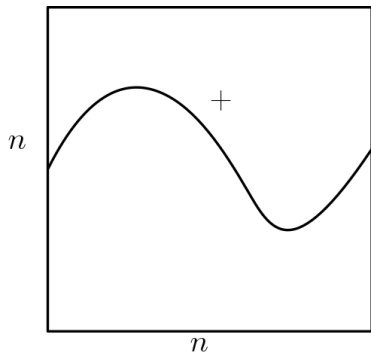
$$\text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Black curve} \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Red curve} \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

If the measure of f is invariant by :

- ▶ symmetry $+$ and $-$
- ▶ symmetry x_1 and x_2

then the two probabilities are equal , hence equal to $1/2$.

A good start

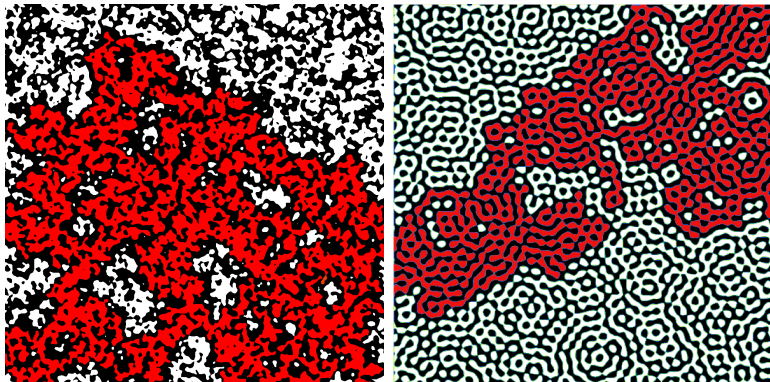


$$\forall n, \text{Prob (positive crossing)} = \frac{1}{2}.$$



Theorem (Russo, Seymour-Welsh 1978) Let $R \subset \mathbb{R}^2$ be a fixed rectangle. Then

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(\text{positive crossing of } nR) > 0.$$



Question : Let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth random fonction, with measure invariant under translations, under change of sign and rotation by 90° . Let $R \subset \mathbb{R}^2$. Do we have

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\{f > 0\} \text{ crosses } nR) > 0 ?$$

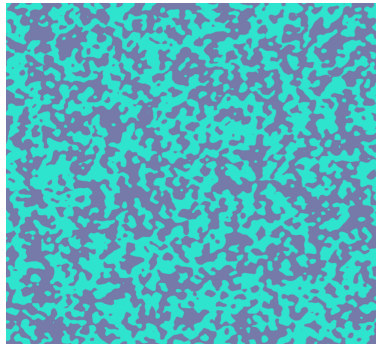
Trivial example

$$f = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{with probability } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Trivial example

$$f = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{with probability } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\{f > 0\} \text{ crosses } nR) = \frac{1}{2} > 0.$$

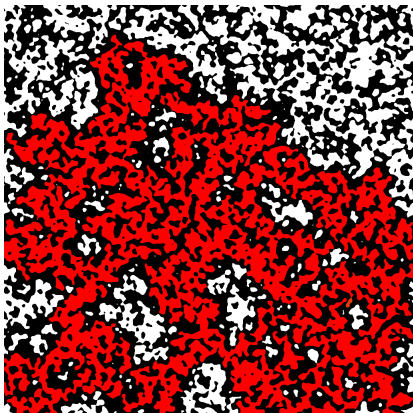


The Bargmann-Fock model :

$$f = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2},$$

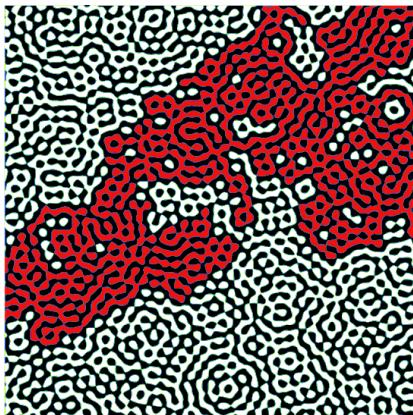
Origins : Complex (!) algebraic geometry

Image : Nastasescu, Beffara

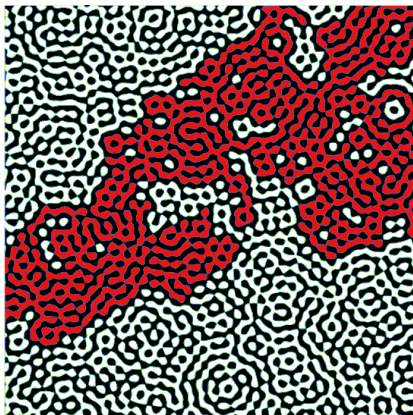


Theorem (Beffara-G 2017) The Bargmann-Fock model satisfies Russo-Seymour-Welsh : for any rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$,

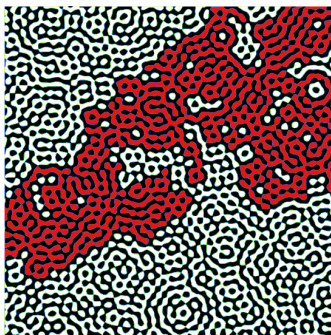
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\{f > 0\} \text{ crosses } nR) > 0.$$



Open question : Prove RSW for RW.



Open question : Prove RSW for RW. Easier (?) : prove that almost surely there is no infinite nodal component.



Theorem (Muirhead, Rivera, Vanneuville 2020-2021)

For RW in \mathbb{R}^2 :

1. There is no infinite nodal line of the planar random wave in the half plane and touching its boundary.
2. for $u < 0$, almost surely $\{f > u\}$ has an infinite connected component and $\{f < u\}$ has not.

Démonstration de RSW pour BF

Natural idea : Find common features with Bernoulli percolation :

Démonstration de RSW pour BF

Natural idea : Find common features with Bernoulli percolation :

- ▶ Symmetries

Démonstration de RSW pour BF

Natural idea : Find common features with Bernoulli percolation :

- ▶ Symmetries
- ▶ Uniform crossing of squares

Démonstration de RSW pour BF

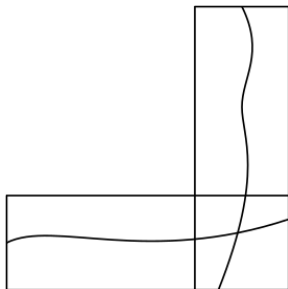
Natural idea : Find common features with Bernoulli percolation :

- ▶ Symmetries
- ▶ Uniform crossing of squares
- ▶ (Asymptotic) independence

Démonstration de RSW pour BF

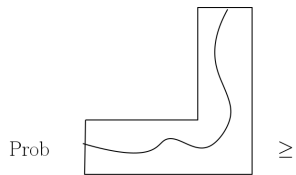
Natural idea : Find common features with Bernoulli percolation :

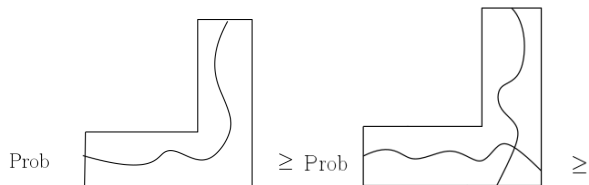
- ▶ Symmetries
- ▶ Uniform crossing of squares
- ▶ (Asymptotic) independence
- ▶ Positive correlation of positive crossings (FKG)



FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre) implies

$$\mathbb{P}(\text{crossing of } R \text{ and crossing of } S) \geq \mathbb{P}(\text{crossing of } R) \mathbb{P}(\text{crossing of } S).$$





$$\begin{aligned}
 & \text{Prob} \left[\text{Diagram 1} \right] \geq \text{Prob} \left[\text{Diagram 2} \right] \geq \\
 & \text{Prob} \left[\text{Diagram 3} \right] \times \text{Prob} \left[\text{Diagram 4} \right] \\
 & = \text{Prob} (\text{crossing the rectangle})^2
 \end{aligned}$$

The diagram illustrates a sequence of inequalities for the probability of a curve crossing an L-shaped region.

 - **Diagram 1:** An L-shaped region with a wavy curve starting from the left side of the horizontal bar and ending at the top of the vertical bar.

 - **Diagram 2:** The same L-shaped region, but the curve is more wiggly and crosses the vertical bar's boundary.

 - **Diagram 3:** A horizontal rectangle containing a wavy curve that crosses the top boundary.

 - **Diagram 4:** A vertical rectangle containing a wavy curve that crosses the right boundary.

- ▶ Symmetries
- ▶ Uniform crossing of squares
- ▶ Asymptotic independence
- ▶ Positive correlation of positive crossings (FKG)

- ▶ Symmetries
- ▶ Uniform crossing of squares
- ▶ Asymptotic independence
- ▶ Positive correlation of positive crossings (FKG)

Theorem (Tassion 2016) If $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{-1, 1\}$ is random and satisfies these conditions, then it satisfies RSW.

Symmetries for Bargmann-Fock ?

- ▶ f centered \Rightarrow symmetry between ± 1 .

Symmetries for Bargmann-Fock ?

- ▶ f centered \Rightarrow symmetry between ± 1 .
- ▶ $e(x, y) = k(\|x - y\|^2) \Rightarrow$ symmetries by
 1. $\pi/2$ -rotation,
 2. translation
 3. and symmetry by horizontal axis.

Symmetries for Bargmann-Fock ?

- ▶ f centered \Rightarrow symmetry between ± 1 .
- ▶ $e(x, y) = k(\|x - y\|^2) \Rightarrow$ symmetries by
 1. $\pi/2$ -rotation,
 2. translation
 3. and symmetry by horizontal axis.

These are the symmetries needed by Tassion.

- ▶ Symmetries ✓
- ▶ Uniform crossing of squares
- ▶ Asymptotic independence
- ▶ Positive correlation of positive crossings (FKG)

- ▶ Symmetries ✓
- ▶ Uniform crossing of squares ✓
- ▶ Asymptotic independence
- ▶ Positive correlation of positive crossings (FKG)

Independence

Correlation function for Bargmann-Fock :

$$e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2)$$

Independence

Correlation function for Bargmann-Fock :

$$e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2)$$

seems very decorrelating!

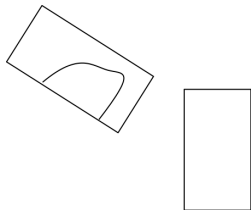
Independence

Correlation function for Bargmann-Fock :

$$e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2)$$

seems very decorrelating!

However...



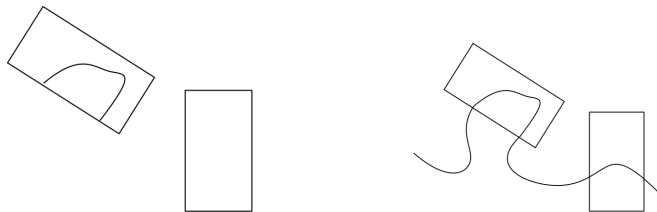
Independence

Correlation function for Bargmann-Fock :

$$e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2)$$

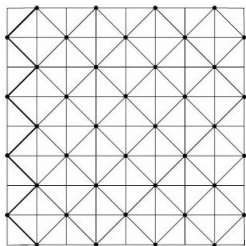
seems very decorrelating!

However...



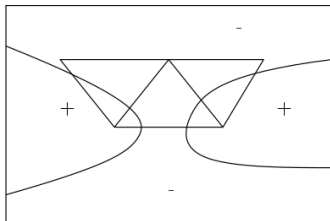
... because of the **analytic continuation phenomenon**.

Solution : blurring by discretization

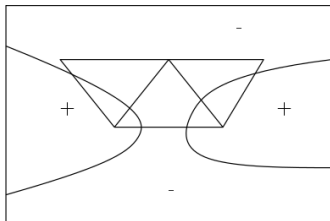


- ▶ \mathcal{T} = Union Jack lattice
- ▶ \mathcal{V} = its vertices,
- ▶ $\text{sign } f|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \{\pm 1\}$.
- ▶ Site percolation : the edge is positive iff its extremities are.

Is the discretization trustful?

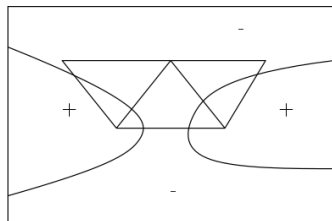


Is the discretization trustful?

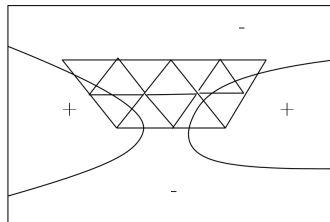


1. If \mathcal{T} is too coarse, then no.

Is the discretization trustful?

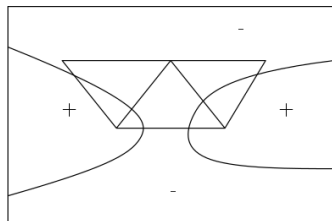


1. If \mathcal{T} is too coarse, then no.

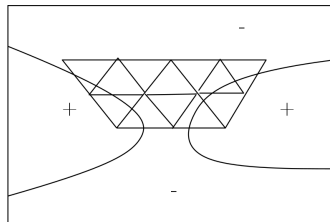


2. If \mathcal{T} is very thin, then yes, but...

Is the discretization trustful?



1. If \mathcal{T} is too coarse, then no.



2. If \mathcal{T} is very thin, then yes, but... dependence comes back.

Quantitative blurring

Hypotheses : $f, \mathcal{T}, \mathcal{V}, e, k$ is C^1 , $k'(0) \neq 0$, $B_n := [-n, n]^2$.

Theorem (Beffara-G 2016) There exists $C > 0$ such that for any $n > 1$,

$$\mathbb{P}\left(\forall R \subset B_n, f \text{ crosses } R \text{ iff } f|_{\frac{1}{n^3}\mathcal{V}} \text{ crosses } R\right) \geq 1 - \frac{C}{n}.$$

Quantitative blurring

Hypotheses : $f, \mathcal{T}, \mathcal{V}, e, k$ is C^1 , $k'(0) \neq 0$, $B_n := [-n, n]^2$.

Theorem (Beffara-G 2016) There exists $C > 0$ such that for any $n > 1$,

$$\mathbb{P}\left(\forall R \subset B_n, f \text{ crosses } R \text{ iff } f|_{\frac{1}{n^3}\mathcal{V}} \text{ crosses } R\right) \geq 1 - \frac{C}{n}.$$

Fear : This gives

$$\#(R \cap \frac{1}{n^3}\mathcal{V}) \sim_n n^8 \text{ points!}$$

This gives a lot of information. Is'nt it too much for the independence ? Is it counterbalanced by the decorrelation ?

Quantitative dependence

Theorem (Beffara-G 2016) $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
centered symmetric Gaussian over \mathcal{V} a lattice. Then, there exists
 $C > 0$, such that for any R, S two disjoint open sets in \mathbb{R}^2 ,

dependence(R, S) :=

$$\max_{\substack{A \text{ crossing in } R \\ B \text{ crossing in } S}} |\mathbb{P}(A \text{ and } B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$$

Quantitative dependence

Theorem (Beffara-G 2016) Let $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ be a centered symmetric Gaussian over \mathcal{V} a lattice. Then, there exists $C > 0$, such that for any R, S two disjoint open sets in \mathbb{R}^2 ,

dependence(R, S) :=

$$\max_{\substack{A \text{ crossing in } R \\ B \text{ crossing in } S}} |\mathbb{P}(A \text{ and } B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$$

\leq

$$C(\# \text{ vertices in } R \text{ and } S)^2 \max_{\substack{x \in R \\ y \in S}} \frac{|e(x, y)|}{\sqrt{1 - e(x, y)^2}}.$$

Quantitative dependence

Theorem (Beffara-G 2016) Let $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ be a centered symmetric Gaussian over \mathcal{V} a lattice. Then, there exists $C > 0$, such that for any R, S two disjoint open sets in \mathbb{R}^2 ,

dependence(R, S) :=

$$\max_{\substack{A \text{ crossing in } R \\ B \text{ crossing in } S}} |\mathbb{P}(A \text{ and } B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$$

\leq

$$C(\# \text{ vertices in } R \text{ and } S)^2 \max_{\substack{x \in R \\ y \in S}} \frac{|e(x, y)|}{\sqrt{1 - e(x, y)^2}}.$$

The Fight : Information versus Oblivion

Quantitative dependence

Theorem (Beffara-G 2016 - Piterbarg 1982) $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ centered symmetric Gaussian over \mathcal{V} a lattice. Then, there exists $C > 0$, such that for any R, S two disjoint open sets in \mathbb{R}^2 ,

dependence(R, S) :=

$$\max_{\substack{A \text{ crossing in } R \\ B \text{ crossing in } S}} |\mathbb{P}(A \text{ and } B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|$$

\leq

$$C(\# \text{ vertices in } R \text{ and } S)^2 \max_{\substack{x \in R \\ y \in S}} \frac{|e(x, y)|}{\sqrt{1 - e(x, y)^2}}.$$

The Fight : Information versus Oblivion

Tassion's condition :

$$\text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

where $A(n, n') = B_{n'} \setminus B_n$.

Tassion's condition :

$$\text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

where $A(n, n') = B_{n'} \setminus B_n$.

For Bargmann-Fock :

1. Discretize in $B_{n \log n}$ over $\frac{1}{(n \log n)^3} \mathcal{T}$.

Tassion's condition :

$$\text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

where $A(n, n') = B_{n'} \setminus B_n$.

For Bargmann-Fock :

1. Discretize in $B_{n \log n}$ over $\frac{1}{(n \log n)^3} \mathcal{T}$.
2. For this discretization,

$$\begin{aligned} \text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) &\leq \\ &C(n \log n)^4 (n \log n)^{12} \frac{\exp(-n^2)}{\sqrt{1 - e^{-2n^2}}} \end{aligned}$$

Tassion's condition :

$$\text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

where $A(n, n') = B_{n'} \setminus B_n$.

For Bargmann-Fock :

1. Discretize in $B_{n \log n}$ over $\frac{1}{(n \log n)^3} \mathcal{T}$.
2. For this discretization,

$$\begin{aligned} \text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) &\leq \\ C(n \log n)^4 (n \log n)^{12} \frac{\exp(-n^2)}{\sqrt{1 - e^{-2n^2}}} &\rightarrow_n 0 \quad ; \end{aligned}$$

3. The same holds for the continuous field with a further cost due to the discretization : $\frac{C}{n \log n} \rightarrow_n 0$.

Tassion's condition :

$$\text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

where $A(n, n') = B_{n'} \setminus B_n$.

For Bargmann-Fock :

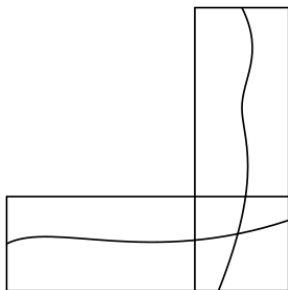
1. Discretize in $B_{n \log n}$ over $\frac{1}{(n \log n)^3} \mathcal{T}$.
2. For this discretization,

$$\begin{aligned} \text{dependence}(A(n, 2n), A(3n, n \log n)) &\leq \\ C(n \log n)^4 (n \log n)^{12} \frac{\exp(-n^2)}{\sqrt{1 - e^{-2n^2}}} &\xrightarrow{n} 0 \quad ; \end{aligned}$$

3. The same holds for the continuous field with a further cost due to the discretization : $\frac{C}{n \log n} \xrightarrow{n} 0$.

Oblivion wins the Independence fight!

- ▶ Symmetries ✓
- ▶ Uniform crossing of squares ✓
- ▶ Asymptotic independence ✓
- ▶ Positive correlation of positive crossings (FKG)



FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre) implies

$$\mathbb{P}(\text{positive crossing of } R \text{ and positive crossing of } S) \geq \mathbb{P}(\text{positive crossing of } R) \cdot \mathbb{P}(\text{positive crossing of } S).$$

Theorem (Loren Pitt 1982) For a centered Gaussian field,

$FKG \Leftrightarrow$ positive correlation function.

Theorem (Loren Pitt 1982) For a centered Gaussian field,

$FKG \Leftrightarrow$ positive correlation function.

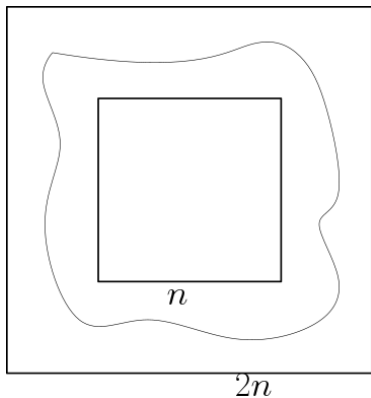
Here : $e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2)$.

Theorem (Loren Pitt 1982) For a centered Gaussian field,

$FKG \Leftrightarrow$ positive correlation function.

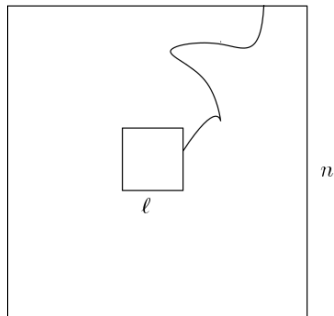
Here : $e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2)$.

- ▶ Symmetries ✓
- ▶ Uniform crossing of squares ✓
- ▶ Asymptotic independence ✓
- ▶ Positive correlation of positive crossings (FKG) ✓

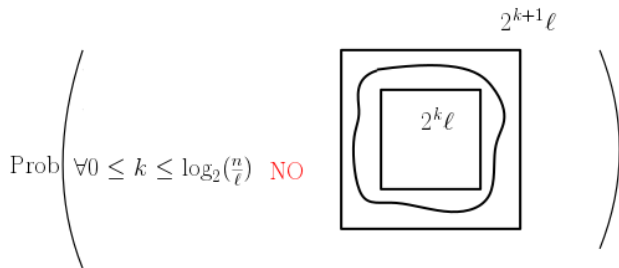
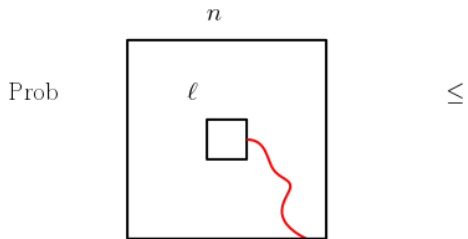


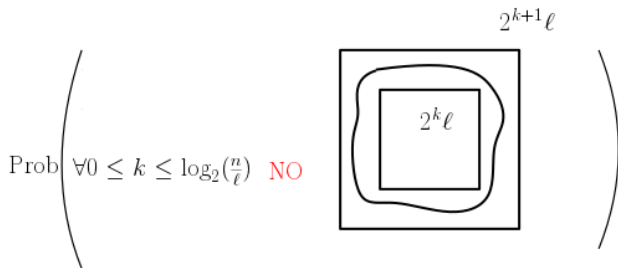
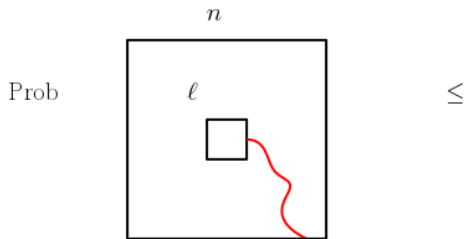
$$\mathbb{P}(\text{circuit in the annulus}) \geq \mathbb{P}(\text{crossing the rectangle})^4$$

RSW+FKG+weak dependence



$$\mathbb{P} < \left(\frac{l}{n}\right)^\alpha.$$





$$\simeq (1 - c)^{\log_2\left(\frac{n}{l}\right)} = \left(\frac{l}{n}\right)^{-\log_2(1-c)}.$$

Why Bargmann-Fock and not Random Waves ?

	RW	BF
Kernel	$J_0(\ x - y\)$	$\exp(-\ x - y\ ^2)$
Sign	oscillating	positive
Decay	weak	very strong
FKG	no	yes
Correlations	strong	very weak
Bernoulli proximity	no	yes

Non-percolation dans un quart de plan

Démonstration

Non-percolation dans un quart de plan

Démonstration

- ▶ D'abord, il n'y a pas de percolation dans une bande verticale (de la forme $[a, b] \times \mathbb{R}$).

Non-percolation dans un quart de plan

Démonstration

- ▶ D'abord, il n'y a pas de percolation dans une bande verticale (de la forme $[a, b] \times \mathbb{R}$. En effet, pour tout carré il y a une probabilité $1/2$ de traversée négative.

Non-percolation dans un quart de plan

Démonstration

- ▶ D'abord, il n'y a pas de percolation dans une bande verticale (de la forme $[a, b] \times \mathbb{R}$. En effet, pour tout carré il y a une probabilité $1/2$ de traversée négative. Donc par ergodicité, avec probabilité 1 il existe une traversée négative horizontale dans l'un des carrés de la forme $[a, b] \times [n + a, n + b]$, $n \in \mathbb{N}$,

Non-percolation dans un quart de plan

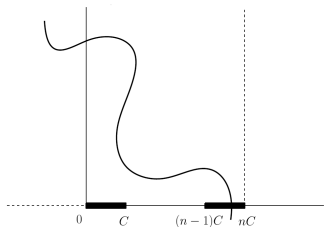
Démonstration

- ▶ D'abord, il n'y a pas de percolation dans une bande verticale (de la forme $[a, b] \times \mathbb{R}$. En effet, pour tout carré il y a une probabilité $1/2$ de traversée négative. Donc par ergodicité, avec probabilité 1 il existe une traversée négative horizontale dans l'un des carrés de la forme $[a, b] \times [n + a, n + b]$, $n \in \mathbb{N}$, donc presque sûrement il n'y a pas de ligne verticale dans cette bande.

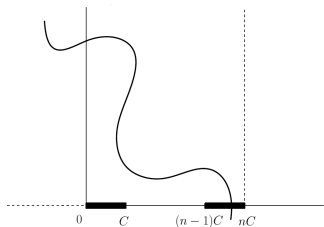
Non-percolation dans un quart de plan

Démonstration

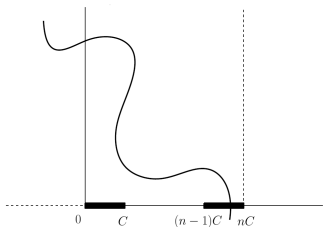
- ▶ D'abord, il n'y a pas de percolation dans une bande verticale (de la forme $[a, b] \times \mathbb{R}$. En effet, pour tout carré il y a une probabilité $1/2$ de traversée négative. Donc par ergodicité, avec probabilité 1 il existe une traversée négative horizontale dans l'un des carrés de la forme $[a, b] \times [n + a, n + b]$, $n \in \mathbb{N}$, donc presque sûrement il n'y a pas de ligne verticale dans cette bande.
- ▶ Ensuite, s'il y avait une probabilité strictement positive pour qu'il existe une composante infinie dans le quart de plan supérieur droit Q et touchant son bord, alors...



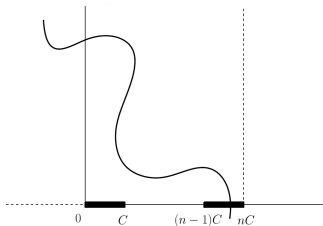
- Il existerait $C > 0$, tel que $f > 0$ percole dans Q à partir de $[0, C] \times \{0\}$ avec probabilité $c > 0$.



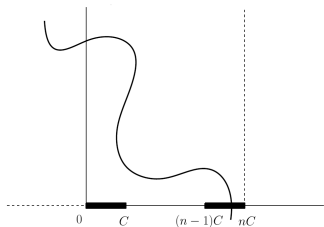
- ▶ Il existerait $C > 0$, tel que $f > 0$ percole dans Q à partir de $[0, C] \times \{0\}$ avec probabilité $c > 0$.
- ▶ Par invariance par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) , c'est vrai aussi pour le quart supérieur gauche,



- ▶ Il existerait $C > 0$, tel que $f > 0$ percole dans Q à partir de $[0, C] \times \{0\}$ avec probabilité $c > 0$.
- ▶ Par invariance par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) , c'est vrai aussi pour le quart supérieur gauche,
- ▶ et donc par invariance par translation, pour le même translaté de $(nC, 0)$.



- ▶ Il existerait $C > 0$, tel que $f > 0$ percole dans Q à partir de $[0, C] \times \{0\}$ avec probabilité $c > 0$.
- ▶ Par invariance par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) , c'est vrai aussi pour le quart supérieur gauche,
- ▶ et donc par invariance par translation, pour le même translaté de $(nC, 0)$.
- ▶ Par ergodicité, presque sûrement il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\{f < 0\}$ percole dans le quart de plan gauche et partant de $[(n-1)C, nC] \times \{0\}$.



- ▶ Il existerait $C > 0$, tel que $f > 0$ percole dans Q à partir de $[0, C] \times \{0\}$ avec probabilité $c > 0$.
- ▶ Par invariance par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) , c'est vrai aussi pour le quart supérieur gauche,
- ▶ et donc par invariance par translation, pour le même translaté de $(nC, 0)$.
- ▶ Par ergodicité, presque sûrement il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\{f < 0\}$ percole dans le quart de plan gauche et partant de $[(n-1)C, nC] \times \{0\}$.
- ▶ Cette composante négative empêche presque sûrement A_C , contradiction.