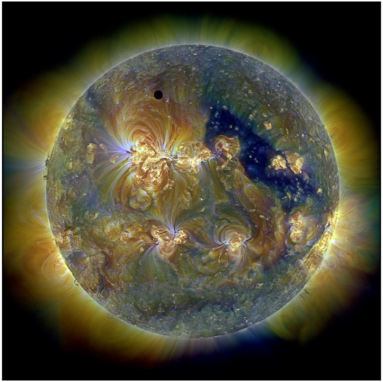
Chapitre 4
Théorème de Stokes



Formes différentielles

Définition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$ un entier. Une k-forme linéaire alternée α est une application multilinéaire

$$\alpha : E^k \to \mathbb{R}$$

alternée, c'est-à-dire que pour toute permutation σ de $[1, \cdots, k]$,

$$\forall (v_1, \cdots, v_k) \in E^k,\ \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^{\sigma} \alpha(v_1, \cdots, v_k).$$

1. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des k-formes alternées est noté $\Lambda^k E^*$.
2. Il est pratique de définir $\Lambda^0 E^* := \mathbb{R}$.

Exemples.

1. Une forme linéaire est une $1-$forme linéaire.
2. Si f est une $n-$forme alternée et $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors

$$f(v_1, \cdots, v_n) = \det(v_{ij})_{i,j} f(e_1, \cdots, e_n),$$

où v_{ij} la j-éme coordonnée de v_i.

Produit extérieur. Soit

$$\wedge : (\oplus_{k=0}^{n} \Lambda^k E^*)^2 \to \oplus_{k=0}^{n} \Lambda^k E^*$$

défini par linéarité,

$$\wedge : \Lambda^k E^* \times \Lambda^j E^* \to \Lambda^{k+j} E^*$$

par $\forall \alpha \in \Lambda^k E^*$ et tout $\beta \in \Lambda^j E^*$, $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+j} E^*$ et

$$\forall v_1, \cdots v_{k+j} \in E,\ \alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_{k+j}) \quad := \frac{1}{j!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{j+k}} (-1)^\sigma \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots v_{\sigma(j)}) \beta(v_{\sigma(j+1)}, \cdots v_{\sigma(j+k)}).$$

Exemple. Si $\alpha, \beta \in E^*$, alors

$$\forall v, w \in E,\ \alpha \wedge \beta(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v).$$

Remarques.

1. $\wedge$ est associative.
2. $\forall \alpha \in \Lambda^k E^{n*}, \beta \in \Lambda^j E^{n*}$,

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{kj} \alpha \wedge \beta.$$

3. Si $(e_i)_i$ est une base de E, on a une base canonique de $\Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$ formée par les

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

4. En particulier, $\dim \Lambda^k E^* = \binom{k}{n}$.
5. En particulier, $\Lambda^n E^*$ est engendré par

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

6. $\Lambda^k E^* = 0$ pour $k \geq n+1$.

Définition. Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$. Un élément $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^k \mathbb{R}^{n*})$ est appelé *k-forme différentielle* lisse. On note $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ cet espace (ou $\Omega^k(U)$ si on se restreint à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$).

Remarques.

1. Une 0-forme est une fonction lisse !
2. Toute k-forme différentielle α s'écrit de façon unique

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1, \cdots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

avec

$$f_{i_1, \cdots, i_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Exemples.

1. Si $k = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha(x) = \sum_{i=1}^n f_j(x) dx_j$.
2. Si $k = n$, $\alpha(x) = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.
3. Si $g \in C^\infty(U)$,

$$dg = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \in \Omega^1(U).$$

Intégration de formes

Définition. Soit $\alpha = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$. L'intégrale de α sur U est

$$\int_U \alpha = \int_U f(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Exemple Si $\int_U dx_1 \cdots \wedge dx_n = Vol(U)$.
Définition. Soit $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ lisse, et $\alpha \in \Omega^k(V)$. Le *tiré en arrière* de α par ϕ est la forme $\phi^*\alpha \in \Omega^k(U)$ définie par

$$\forall v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n, \forall x \in U,$$
$$\phi^*\alpha(x)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha(\phi(x))\big(d\phi(x)v_1, \cdots, d\phi(x)v_k\big).$$

Exemple Si $\alpha = f \in \Omega^0(U)$, $\phi^*\alpha = \alpha \circ \phi$.

Proposition :

1. $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$.
2. $(f \circ g)^*\alpha = g^*(f^*\alpha)$.
3. $\phi^* dx_i(x) = d\phi_i(x)$
4. Si $\alpha = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n$,

$$\phi^*\alpha(x) = \det d\phi(x) f(\phi(x)) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Démonstration.

1. Exercice.
2. Utilise $d(f \circ g) = df \circ dg$.
3. On a

$$\begin{aligned}
\forall v \in \mathbb{R}^n, \phi^* dx_i(x)(v) &= dx_i(d\phi(x)v) \\
&= dx_i(\sum_j \partial_j \phi v_j) \\
&= \sum_j \partial \phi_i v_j = d\phi_i(v).
\end{aligned}$$

4. Exercice.

Exemples.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Omega^k$ et $\phi(x) = ax$,

$$\phi^*\alpha(x) = a^k\alpha(ax).$$

2. Si $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors

$$\begin{aligned} \phi^*dx &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ \phi^*dy &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta. \end{aligned}$$

Donc si $\alpha = dx \wedge dy$, alors

$$\phi^*\alpha = \phi^*dx \wedge \phi^*dy = rdr \wedge d\theta.$$

3. Si $\alpha = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$,

$$\phi^*\alpha = \frac{1}{2}(x(r,\theta)\phi^*dy - y(r,\theta)\phi^*dx) = \frac{1}{2}r^2d\theta.$$

Théorème Soit U un ouvert connexe, $\phi : U \to V$ un homéomorphisme lisse et $\alpha \in \Omega^n(V)$. Alors

$$\int_U \phi^*\alpha = \text{signe}(\det d\phi) \int_V \alpha.$$

(Notons que $x \mapsto \det d\phi(x)$ ne s'annule pas sur U, donc est de signe constant.)

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\int_U \phi^*\alpha &= \int_U f \circ \phi \det d\phi dx_1 \cdots dx_n \\
&= \text{signe}(\det d\phi) \int_U f \circ \phi |\det d\phi| dx_1 \cdots dx_n \\
&= \text{signe}(\det d\phi) \int_V f dx_1 \cdots dx_n.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Il existe une unique application linéaire : $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$, telle que

1. $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ pour tout k.
2. $d \circ d = 0$
3. $d : \Omega^0(U)$ est la différentielle.
4. Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega(U)$,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

On appelle *différentielle extérieure* cette application.
Propriété

$$d(f^*\alpha) = f^* d\alpha.$$

Exemples.

- Pour $f \in \Omega^0(U)$ et $i \in \{1, \cdots n\}$,

$$d(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n) = \\ (-1)^{i+1} \partial_i f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

- Soit

$$div(f_1, \cdots, f_n) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i$$

et

$$\alpha = \sum (-1)^{i+1} f_i \hat{dx_i} \in \Omega^{n-1},$$

alors

$$d\alpha = div(f_1, \cdots, f_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Exemples.

- Soit
$$\vec{rot}(f_1, f_2, f_3) := \vec{\nabla} f \wedge f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$
et $\beta = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$, alors
$$\begin{aligned} d\beta &= (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) dx_1 \wedge dx_2 + \\ & (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) dx_2 \wedge dx_3 + \\ & (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) dx_3 \wedge dx_1 . \end{aligned}$$

Formes sur les variétés

Soit M une variété lisse de dimension $n \geq 1$ et $(U_i)_i$ un atlas de la variété.

Définition. L'ensemble (qui est un *fibré vectoriel*)

$$T^*M = \cup_{x \in M} (T_x M)^*$$

est appelé *l'espace cotangent* de M.
On peut alors définir pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'espace $\Lambda^k T_x^* M$ et $\Lambda T_x^* M$.

Proposition et définition Soit $(U, \phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n))$ une carte locale C^∞ de M lisse de dimension n, et $x \in U$.

- Alors l'algèbre extérieure $\Lambda T_x^* M$ est engendrée par les 1-formes $(d\phi_i(x))_{i=1^n} \in T_x M^*$.
- Une $p-$forme homogène C^∞ sur U est une application $\alpha : U \to \Lambda T^* M$, telle que $\forall x \in U, \alpha_x \in \Lambda_x T^* M$, et

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k}(x) d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k}$$

  avec $\alpha_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.
- Il existe une unique différentielle : $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ satisfaisant les axiomes ci-dessus.

Intégration sur les variétés

On aimerait bien définir sur une carte (U, ϕ), pour $\alpha \in \Omega^n(U)$,

$$\int_U \alpha = \int_{\phi(U)} \phi^{(-1)*}\alpha.$$

Mais si ψ est une autre carte, la définition donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(U)} \psi^{(-1)*}\alpha &= \operatorname{sgn}\det \phi \circ \psi^{-1} \int_{\phi\circ\psi^{-1}\circ\psi(U)} (\phi \circ \psi^{-1})^{-1*}(\psi^{(-1)*}\alpha) \\
&= \operatorname{sgn}\det \phi \circ \psi^{-1} \int_{\phi(U)} \phi^{(-1)*}\alpha.
\end{aligned}$$

Définition. Une variété différentielle est dite *orientable* si l'on peut trouver un atlas tel que les changements de cartes préservent l'orientation. Une *orientation* est un tel choix de cartes.

Proposition. Si M est une variété à bord (à définir) orientée, son bord hérite d'un orientation.

On peut alors définir

$$\int_U \alpha = \int_{\phi(U)} \phi^{(-1)*}\alpha.$$

Théorème de Stokes. Soit M une variété orientée de dimension n, α une $n-1$-forme lisse sur M, D un domaine régulier de M de bord ∂D (qui peut être vide). Alors

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha,$$

où ∂D est orientée selon l'orientation de D.

Exemples

- Soit $I = [a, b]$, $\alpha = f(x)$, $d\alpha = f'(x)dx$, I orienté de gauche à droite, donc

$$f(b) - f(a) = \int_{\{a,b\}} f = \int_{[a,b]} f'(x)dx.$$

- Soit $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$\alpha = P(x, y)dy - Q(x, y)dx.$$

On a

$$d\alpha = (\partial_x P + \partial_y Q)dx \wedge dy,$$

donc (Théorème de Green)

$$\int_D (\partial_x P + \partial_y Q)dx \wedge dy = \int_{\partial D} P(x, y)dy - Q(x, y)dx.$$

- **Sous-exemple** $\alpha = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ donne l'aire de D.
- **Sous-sous-exemple** : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Avec $\phi(r, \theta) = (x, y)$, on a $\phi^*\alpha = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ donc

$$\int_{RS^1} \alpha = \frac{1}{2}R^2 2\pi = \int_{D(0,R)} daire.$$