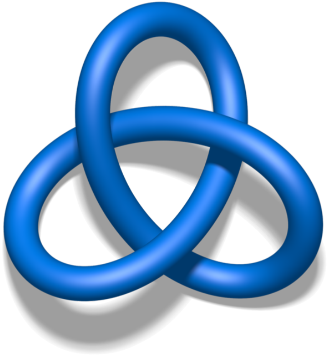
Chapitre 3
Variétés

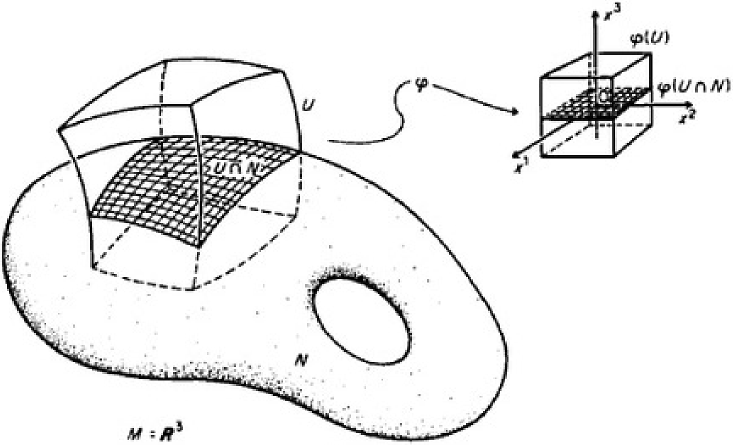


Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition. Soit $n \geq 1$, $k \geq 1$ et $p \in \{0, \cdots, n\}$. Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une C^k-*sous-variété* de dimension p si pour tout point $m \in M$, il existe

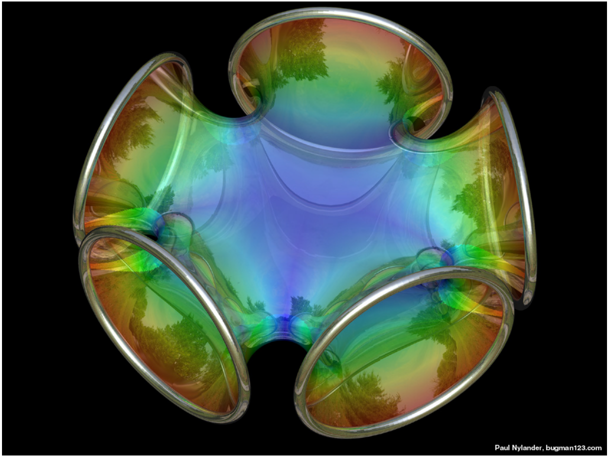
- U un voisinage ouvert de m dans $\mathbb{R}^n$,
- V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$,
- et
$$f : U \to V$$
un C^k- difféomorphisme tel que
$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

Contre-exemple. L'union de deux plans de $\mathbb{R}^3$ se croisant suivant une droite est une surface paramétrée, mais n'est pas une sous-variété (pourquoi ?).

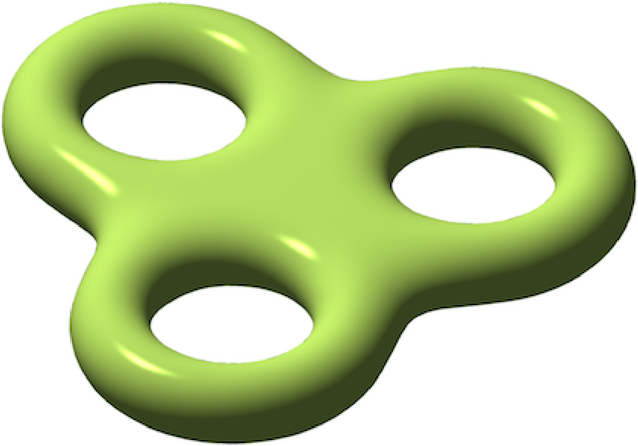


x^3
$\varphi(U)$
$\varphi(U \cap N)$
φ
U
x^2
x^1
$U \cap N$
N
$M = R^3$

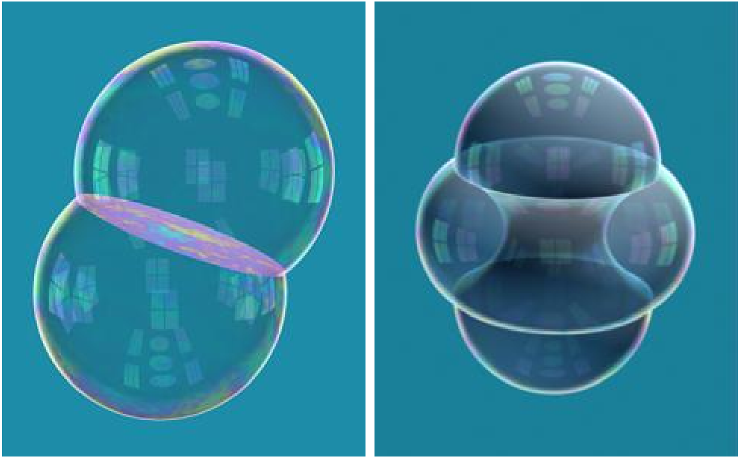
Une sous-variété (minimale) avec bord



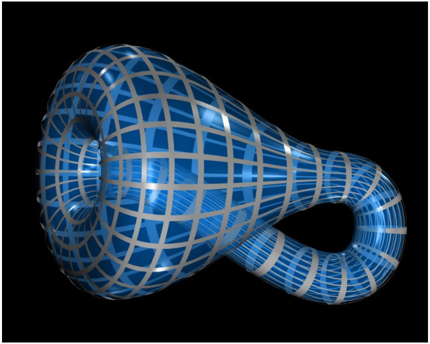
Une bulle



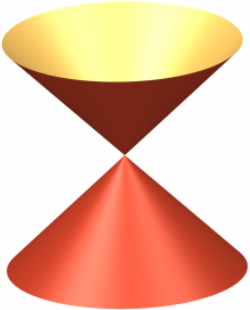
Une surface de genre 3



Ceci ne sont pas des sous-variétés



Ce ne sont pas des sous-variétés



Toujours pas !

Exemple. La sphère unité $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété. En effet, soit $x_0 \in S^n$. On choisit les axes de sorte que $x_{0n+1} > 0$. Donc si $x' = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de x_0, tel que

$$(x', x_{n+1}) \in U \cap S^n \Leftrightarrow x_{n+1} = \sqrt{1 - \|x'\|^2}.$$

Soit $f(x) = (x', x_{n+1} - \sqrt{1 - \|x'\|^2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors (exercice) f vérifie les conditions de la définition sur U.

Proposition. Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert, et $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ C^k. Alors le graphe de φ est une C^k sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. Réciproquement, une sous-variété est localement un graphe.

Démonstration. Si $x' = (x_1 \cdots, x_p)$ et $x'' = (x_{p+1}, \cdots, x_n)$,

et

$$\begin{array}{rcl} f : U \times \mathbb{R}^{n-p} & \to & \mathbb{R}^n \\ f(x', x'') & = & (x', x'' - \phi(x')), \end{array}$$

alors le graphe de φ et f vérifient la définition (où $U \times \mathbb{R}^{n-p}$ est un ouvert) (exercice : vérifier les détails). Réciproque plus tard. $\square$

Proposition. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. Alors M est une C^k- sous-variété de dimension p ssi pour tout $m \in M$, il existe un voisinage U de m dans $\mathbb{R}^n$, et une fonction F C^k

$$F : U \to \mathbb{R}^{n-p}$$

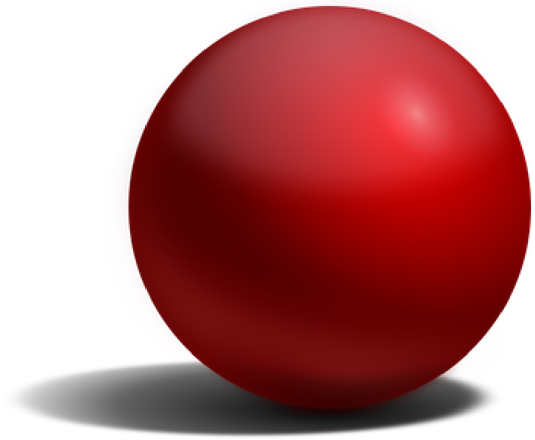
tels que

- F est une submersion, *id est*

  $$\forall q \in U, dF(q) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$$

  est surjective,
- et
  $$F^{-1}(0) = M \cap U.$$

Une sous-variété est donc localement définie implicitement.



Exemple. La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ est une sous-variété lisse de dimension $n-1$.

En effet, soit

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$$

$(p = n - 1)$. On a $\forall q \in S$,

$$dF(q) = \ 2 \sum_{i=1}^{n} x_i dx_i$$

qui est non nulle donc de rang maximal 1 en tout point non nul, donc en tout point de S.

Démonstration. Si M est une ss-variété, soit $m \in M$, U, V et f des ouverts et fonction de la définition. Soit $F : U \to \mathbb{R}^{n-p}$,

$$F := \ (f_{p+1}, \cdots, f_n).$$

On a bien

$$\forall q \in U, \ F(q) = 0 \Leftrightarrow q \in M.$$

De plus $df(q)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$, donc les $n - p$ derniers vecteurs lignes de sa matrice sont de rang maximal, et c'est la matrice de $dF(q)$ qui est donc surjective.

Réciproquement, soit $x \in M$. $dF(x)$ est de rang $n-p$, donc il existe $n-p$ vecteurs colonnes de sa matrice dans les bases canoniques qui sont de rang $n-p$. On suppose que ce sont les $n-p$ derniers. On a donc

$$dF(x)_{|\{0\}\times\mathbb{R}^{n-p}} : \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^{n-p}$$

bijective.

Notons $x = (x', x'')$ avec

$$x' := (x_1, \cdots, x_p)$$

et

$$x'' := (x_{p+1}, \cdots, x_n).$$

Le TFI nous dit qu'il existe $\tilde{U}$ un voisinage de x' dans $\mathbb{R}^p$ et un voisinage $\tilde{V}$ de x'' dans $\mathbb{R}^{n-p}$, ainsi qu'une fonction

$$\phi : \tilde{U} \to \tilde{V},$$

tels que

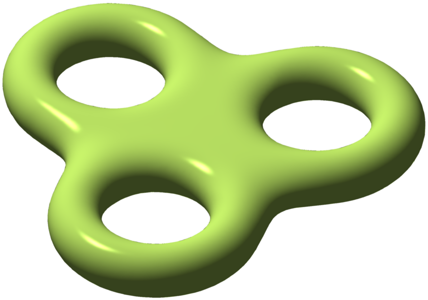
$$(x', x'') \in \tilde{U} \times \tilde{V},\ F(x', x'') = 0 \Leftrightarrow x'' = \phi(x').$$

Donc $F^{-1}(0)$ est une sous-variété.

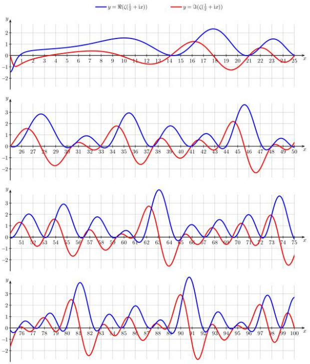
Le plus grand des mathématiciens ?

Bernhard Riemann
(Breselenz 1826 - Selasca 1866)

- 1826 : Fils d'un pasteur luthérien
- 1846 : théologie à Göttingen
- 1847 : mathématiques à Berlin : *Il chante déjà comme un canari* (Stern)



- Grande influence de Dirichlet
- 1851 : Doctorat : surfaces de Riemann (Gauss directeur)
- 1854 : Habilitation : *Sur les fondements de la géométrie*
- 1859 : Enfin un poste fixe à Göttingen !
- 1859 : Académie des sciences



1859 : Conjecture éponyme : *Les zéros non triviaux de*

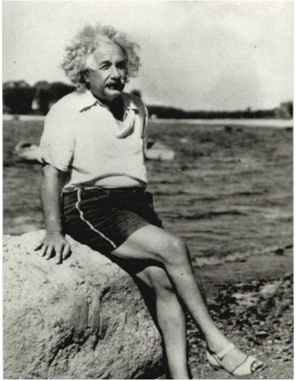
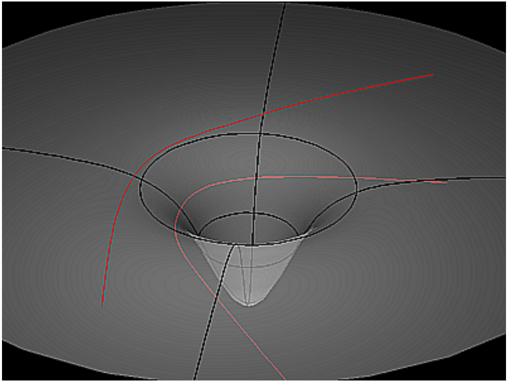
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \ premier} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

sont sur l'axe $\Re s = 1/2$.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

- 1862 : contracte une pneumonie
- 1866 : décède de cette pneumonie sur les bords du Lac Majeur

La relativité générale & Einstein,
deux enfants de Riemann

Le GPS, un petit-fils de Riemann

Proposition. Pour $k \geq 1$, M est une C^k sous-variété de dimension p *ssi* en tout point m de M, il existe un voisinage U de m dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^p$, et une application $g : V \to U$ C^k telle que

- g est une *immersion*, c'est-à-dire

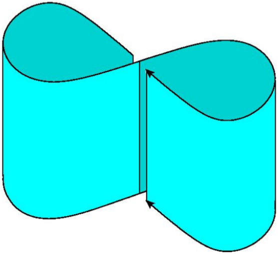
  $$\forall z \in V, \, dg(z) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$

  est injective.
- $g : V \to U \cap M$ est un homéomorphisme.

Exemples.

- Les immersions de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ sont les surfaces paramétrées (f, U) régulières.
- Une surface paramétrée (f, U) avec f injective est *localement* (à la source) une sous-variété

Remarque. La seconde condition évite les croisements réels ou limites :



Une surface paramétrée régulière et injective
mais qui n'est pas une sous-variété (volée à V. Borrelli)

Plaisir des yeux !

- **Exercice.** Le graphe

$$\Gamma_f \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$$

d'une fonction C^k $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ est une immersion vérifiant la seconde condition de la Proposition, donc est une C^k sous-variété de dimension p.

Démonstration de la Proposition. Supposons que M est une sous-variété de dimension p dans $\mathbb{R}^n$. On a vu que M est localement le graphe d'une fonction $\psi : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p}$. Alors $\tilde{\psi} = (Id, \psi)$ est une immersion vérifiant la seconde condition.

Réciproquement, soit $g : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une immersion, $w \in U$, $m = g(w)$. On aimerait étendre

$$g^{(-1)} : g(U) \subset \mathbb{R}^n \to U$$

en un difféomorphisme local

$$f : V \to \mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}^p \oplus 0$$

avec voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$ de m. Soit

$$P = dg(w)(\mathbb{R}^p) \subset \mathbb{R}^n$$

le p-plan vectoriel tangent en m et Q un $(n-p)$-plan vectoriel transverse à P paramétré par un isomorphisme

$$\phi : \mathbb{R}^{n-p} \to Q.$$

Définissons

$$\begin{array}{rcl} F : U \times \mathbb{R}^{n-p} & \to & \mathbb{R}^n = m + P \oplus Q \\ (x,y) & \mapsto & g(x) + \phi(y) \end{array}$$

Notons que

$$F(U \times \{0\}) = g(U).$$

Par construction et par hypothèse sur $df(w)$,

$$\ker dF(w,0) = \{(0,0)\}$$

(le vérifier), donc $dF(w,0)$ est un isomorphisme. Par le théorème d'inversion local, il existe un voisinage ouvert

$$\tilde{U} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

de $(w,0)$ et $V \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de m tels que $F_{|\tilde{U}}$ soit un C^k-difféomorphisme de $\tilde{U}$ dans V.

Soit alors

$$f = (F_{|\tilde{U}})^{-1} : V \subset \mathbb{R}^n \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}.$$

C'est un difféomorphisme, et puisque par la seconde condition

$$F(\tilde{U} \times \{0\}) = \ g(\tilde{U}) \cap V,$$

on a

$$f(g(\tilde{U}) \cap V) = \ \tilde{U} \times \{0\},$$

donc $g(\tilde{U}) \cap V$ est une p-sous-variété. De plus, par la seconde hypothèse, quitte à restreindre les ouverts, $M \cap V = g(\tilde{U}) \cap V$ donc donc M est une sous-variété. $\square$

Proposition et Définition. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une p-sous-variété, et $m \in M$. Puisque localement M est l'image d'une immersion $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, telle que $f(w) = m$, on définit *l'espace tangent* à M en m

$$T_m M := \text{ Im } df(w).$$

Cette définition ne dépend pas de f. De plus, si M est localement le lieu d'annulation d'une submersion

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$$

et si $F(m) = 0$, alors

$$T_m M = \ker dF(m).$$

Remarque. On peut aussi définir l'espace tangent affine $m + T_m M$.

Exemple. La sphère ! On a pour
$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$,

$$T_x\mathbb{S}^{n-1} = \ker \sum_{i=1}^{n} x_i dx_i.$$

En particulier, $T_{(1,0,\cdots,0)}\mathbb{S} = \ker dx_1 = \{x_1 = 0\}$.

Extrema liés

Théorème. Soit $1 \leq p \leq n$ et $F = (F_1, \cdots, F_p) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ C^1 telle que $dF(x)$ soit de rang p pour tout $x \in U$, et

$$f : U \to \mathbb{R}$$

une application C^1. Soit $a \in F^{-1}(0)$ un extremum local de $f_{|F^{-1}(0)}$. Alors

$$\ker dF(a) \subset \ker df(a),$$

ce qui est équivalent à $\exists! \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{R}$,

$$df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dF_i(a).$$

Remarques.

- Par la Proposition précédente, $M = F^{-1}(0)$ est une sous-variété C^1 dans U.
- On appelle les λ_i (uniques) *les multiplicateurs de Lagrange.*
- Si $df(a) \neq 0$, $f^{-1}(f(a))$ est localement une sous-variété de dimension $n-1$, donc une hypersurface de niveau, et $\ker df(a)$ est son espace tangent. La condition est donc

$$T_a M \subset T_a f^{-1}(f(a)).$$

- La condition s'écrit

$$\nabla f(a) = \sum_i^p \lambda_i \nabla F_i(a).$$

- Exemple : $\{F = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ compact et $f(x, y) = x$.

Démonstration. Par le théorème précédent, il existe deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^{n-p}$ et $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, et une immersion locale $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ qui est un difféomorphisme sur son image telle que $M \cap V = \phi(U)$.
L'application

$$\tilde{f} = \ f \circ \phi$$

admet un extremum local en $b = \phi^{-1}(a)$, donc b est un point critique de $\tilde{f}$, soit

$$df(a) \circ d\phi(b) = 0,$$

soit

$$\mathrm{Im}\ \ d\phi(b) \subset \ker df(a).$$

Mais on a vu aussi que

$$\mathrm{Im}\ d\phi(b) = \ \ker dF(a) = T_a M.$$

Par dualité,

$$(\ker dF(a))^{\perp} \supset (\ker df(a))^{\perp}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
(\ker dF(a))^{\perp} &= (\cap_{i=1}^{p} \ker dF_i(a))^{\perp} \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\ker dF_i(a))^{\perp} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \text{Vect} \quad dF_i(a)
\end{aligned}$$

donc $df(a) \in \sum_i^p$ Vect $dF_i(a)$ ce qui est le résultat.

Exemples.

- Soit $f(x,y,z) = z^2 - y^2$ et $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. On a $df/2 = \ zdz - ydy$ et $dF/2 = \ xdx + ydy + zdz$. Un point critique $a = (x,y,z)$ de $f_{|M}$ vérifie

$$df(a) \in \langle dF(a) \rangle$$

soit $(0,-y,z) \in \langle (x,y,z) \rangle$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $0 = \lambda x$, $-y = \lambda y$ et $z = \lambda z$.

1. Si $\lambda = 0$, on a $y = z = 0$ donc $x = \pm 1$. $(\pm 1, 0, 0)$ est bien critique. Notons que $df(x,0,0) = 0$ (l'hypersurface de niveau est dégénérée (en une réunion de deux plans)).
2. Si $\lambda \neq 0$, $x = 0$. Si $y \neq 0$, $\lambda = -1$ et $z = 0$, donc $a = (0, \pm 1, 0)$. Si $y = 0$, $a = (0, 0, \pm 1)$. (dessin)

- Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété, et a un extremum de la distance sur M à un point $P \in \mathbb{R}^n$. Alors $\vec{aP} \perp T_a M$.

En effet, soit $f(x) = \|\vec{xP}\|^2$. C'est une fonction lisse, et

$$df(a) = 2\langle aP, \cdot\rangle.$$

On a $\ker df(a) \supset T_a M$, donc $T_a M \perp aP$.

Joseph Louis Lagrange
Giuseppe Lodovico de Lagrangia
(1736 Turin -1813 Paris)

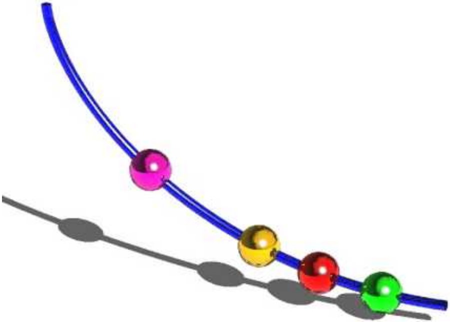
- Parents d'origine française, père Trésorier de l'Office des travaux publics et des fortifications de Turin

Joseph Louis Lagrange
Giuseppe Lodovico de Lagrangia
(1736 Turin -1813 Paris)

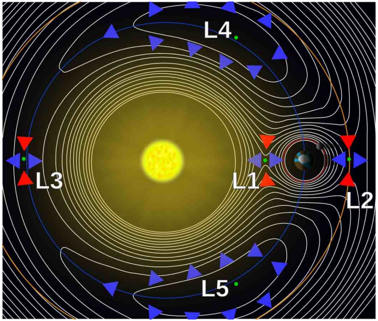
- Parents d'origine française, père Trésorier de l'Office des travaux publics et des fortifications de Turin

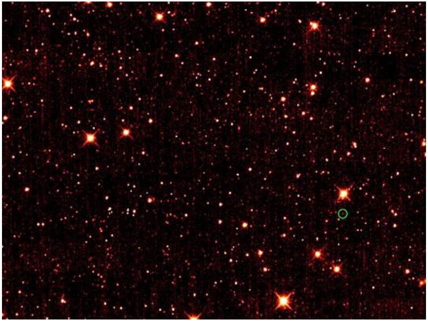
Joseph Louis Lagrange
Giuseppe Lodovico de Lagrangia
(1736 Turin -1813 Paris)

- Parents d'origine française, père Trésorier de l'Office des travaux publics et des fortifications de Turin



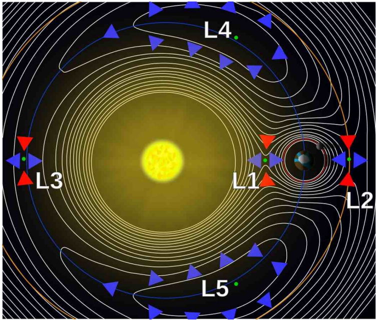
- Se met aux mathématiquess tard... à 17 ans.
- Famille ruinée : *Si j'avais été riche, je n'aurais pas fait mon état des mathématiques.*
- 1755 : *Sostituto del Maestro di Matematica* à l'Académie royale militaire de la théorie et de la Pratique de l'Artillerie
- 1754 : Tautochrone (animation)

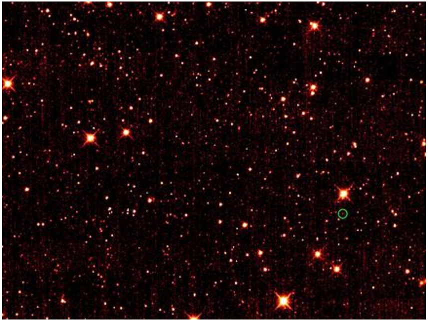




À droite, l'astéroïde 2010TK7

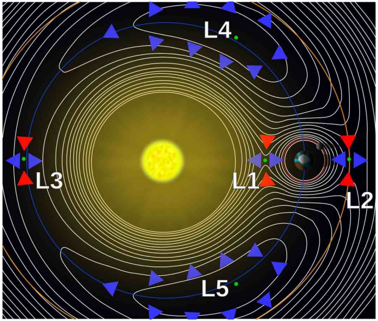
- 1754 : Calcul des variations (équations d'Euler-Lagrange)
- 1766 : Berlin, directeur de la classe mathématique de l'Académie de Berlin

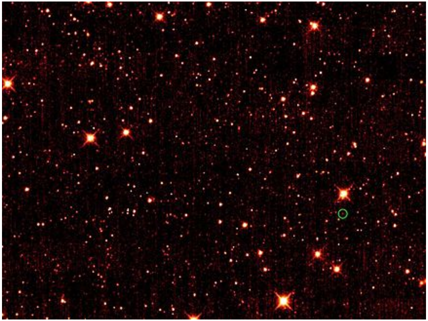




À droite, l'astéroïde 2010TK7

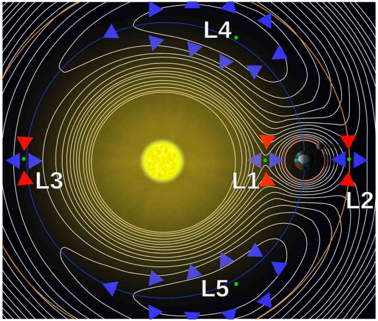
- 1754 : Calcul des variations (équations d'Euler-Lagrange)
- 1766 : Berlin, directeur de la classe mathématique de l'Académie de Berlin
- 1772 : points de Lagrange

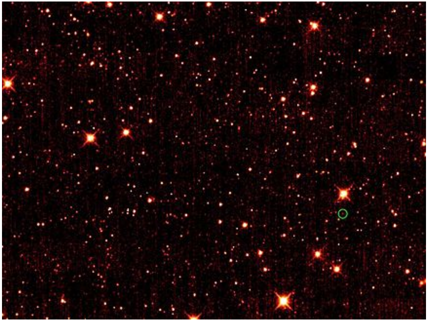




À droite, l'astéroïde 2010TK7

- 1754 : Calcul des variations (équations d'Euler-Lagrange)
- 1766 : Berlin, directeur de la classe mathématique de l'Académie de Berlin
- 1772 : points de Lagrange
- 1783 : dépression après la mort de sa femme





À droite, l'astéroïde 2010TK7

- 1754 : Calcul des variations (équations d'Euler-Lagrange)
- 1766 : Berlin, directeur de la classe mathématique de l'Académie de Berlin
- 1772 : points de Lagrange
- 1783 : dépression après la mort de sa femme
- 1787 : Académie des sciences à Paris

- 1788 : *Mécanique analytique*

- 1788 : *Mécanique analytique*

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expoſe ne demandent ni conſtructions, ni raiſonnemens géométriques ou méchaniques, mais ſeulement des opérations algébriques, aſſujetties à une marche réguliere & uniforme. Ceux qui aiment l'Analyſe, verront avec plaiſir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, & me ſauront gré d'en avoir étendu ainſi le domaine.

SECTION QUATRIÈME.

MANIÈRE PLUS SIMPLE ET PLUS GÉNÉRALE DE FAIRE USAGE DE LA FORMULE DE L'ÉQUILIBRE DONNÉE DANS LA SECTION DEUXIÈME.

1. Ceux qui jusqu'à présent ont écrit sur le principe des vitesses virtuelles se sont plutôt attachés à prouver la vérité de ce principe par la conformité de ses résultats avec ceux des principes ordinaires de la Statique, qu'à montrer l'usage qu'on en peut faire pour résoudre directement les problèmes de cette science. Nous nous sommes proposé de remplir ce dernier objet avec toute la généralité dont il est susceptible, et de déduire du principe dont il s'agit des formules analytiques qui renferment la solution de tous les problèmes sur l'équilibre des corps; à peu près de la même manière que les formules des sous-tangentes, des rayons osculateurs, etc., renferment la détermination de ces lignes dans toutes les courbes.

La méthode exposée dans la deuxième Section peut être employée dans tous les cas, et ne demande, comme on l'a vu, que des opérations purement analytiques; mais, comme l'élimination immédiate des variables ou de leurs différences par le moyen des équations de condition peut conduire à des calculs trop compliqués, nous allons présenter la même méthode sous une forme plus simple, en réduisant en quelque manière tous les cas à celui d'un système entièrement libre.

§ I. — *Méthode des multiplicateurs.*

2. Soient

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0, \quad \ldots$$

les différentes équations de condition données par la nature du sys-

coefficient indéterminé; on égalera le tout à zéro, et l'on aura ainsi une équation différentielle qu'on traitera comme une équation ordinaire *de maximis et minimis*, et d'où l'on tirera autant d'équations particulières finies qu'il y aura de variables. Ces équations étant ensuite débarrassées, par l'élimination, des coefficients indéterminés, donneront toutes les conditions nécessaires pour l'équilibre.

L'équation différentielle dont il s'agit sera donc de cette forme,

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \ldots = 0,$$

dans laquelle λ, μ, ν, ... sont des quantités indéterminées; nous la nommerons dans la suite *équation générale de l'équilibre*.

Cette équation donnera, relativement à chaque coordonnée, telle que x, de chacun des corps du système, une équation de la forme suivante

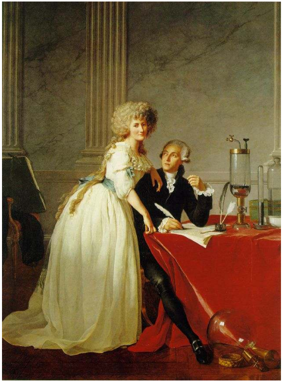
$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} + \ldots + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \nu\frac{\partial N}{\partial x} + \ldots = 0;$$

en sorte que le nombre de ces équations sera égal à celui de toutes les coordonnées des corps. Nous les appellerons *équations particulières de l'équilibre*.

4. Toute la difficulté consistera donc à éliminer de ces dernières équations les indéterminées λ, μ, ν, ...; or c'est ce qu'on pourra toujours exécuter par les moyens connus, mais il conviendra, dans chaque cas, de choisir ceux qui pourront conduire aux résultats les plus simples. Les équations finales renfermeront toutes les conditions nécessaires pour l'équilibre proposé; et, comme le nombre de ces équations sera égal à celui de toutes les coordonnées des corps du système moins celui des indéterminées λ, μ, ν, ... qu'il a fallu éliminer, que d'ailleurs ces mêmes indéterminées sont en même nombre que les équations de condition finies $L=0$, $M=0$, $N=0$, ..., il s'ensuit que les équations dont il s'agit, jointes à ces dernières, seront toujours en même nombre que les coordonnées de tous les corps; par conséquent, elles

- 1793 : décret d'expulsion des *individus nés en pays étranger*. Lagrange mis en *réquisition pour continuer des calculs sur la théorie des projectiles.*
- 1794 : Lavoisier guillotiné, Lagrange à Delambre : *Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire tomber cette tête, et cent années peut-être ne suffiront pas pour en reproduire une semblable.*

- 1793 : décret d'expulsion des *individus nés en pays étranger*. Lagrange mis en *réquisition pour continuer des calculs sur la théorie des projectiles.*
- 1794 : Lavoisier guillotiné, Lagrange à Delambre : *Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire tomber cette tête, et cent années peut-être ne suffiront pas pour en reproduire une semblable.*



- 1793 : décret d'expulsion des *individus nés en pays étranger*. Lagrange mis en *réquisition pour continuer des calculs sur la théorie des projectiles.*
- 1794 : Lavoisier guillotiné, Lagrange à Delambre : *Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire tomber cette tête, et cent années peut-être ne suffiront pas pour en reproduire une semblable.*

- 1799 : nommé membre du Sénat par Napoléon

- 1799 : nommé membre du Sénat par Napoléon
- 1808 : nommé Comte d'Empire

Variétés

Définition. Soit $k \geq 1$. Une variété de classe C^k et de dimension n est un espace topologique M séparé muni

- d'un recouvrement par une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$,
- des homéomorphismes $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ tels que
- $\forall i, j \in I$, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ implique

  $$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap U_i) \to \phi_i(U_j \cap U_i)$$

  est C^k. (dessin)

Définition.

- Un tel couple (U_i, ϕ_i) est une *carte* et l'ensemble de ces couples est un *atlas*.
- Si $k = 0$, la variété est dite *topologique*. Si $k \geq 1$, elle est dite *différentiable*. Si $k = \infty$, elle est dite *lisse*.
- On note parfois $\phi_i = (x_1, \cdots, x_n)$ et les fonctions x_j sont appelées *coordonnés* sur l'ouvert U_i.
- Les fonctions $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont appelées *fonctions de transition*.

Exemples.

- $\mathbb{R}^n$ est une variété lisse de dimension n (une seule carte !)
- La sphère standard $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété lisse de dimension n (deux cartes).

En effet, soit $N = (1, 0, \cdots, 0)$ et $S = (-1, 0, \cdots, 0)$, $U_1 = S^n \setminus \{N\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{S\}$. Pour $i = 1, 2$, la projection stéréographique (dessin) $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{(x_1, \cdots, x_n)}{1 - x_0} \\ \phi_2(x) &= \frac{(x_1, \cdots, x_n)}{1 + x_0} \end{aligned}$$

On constate que ϕ_i est un homéomorphisme de U_i sur $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$, et (exercice !)

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ y &\mapsto \frac{y}{\|y\|^2}, \end{aligned}$$

qui est lisse.

Exercice. Trouver un atlas plus simple pour $\mathbb{S}^1$, avec des fonctions de transitions affines.

- L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est défini par

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim,$$

  où $x \sim y$ ssi x et y sont sur la même droite. Il est muni d'une structure différentiable lisse de dimension n.

D'abord, on muni $\mathbb{R}P^n$ de la topologie quotient : si

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$$

est le passage au quotient, un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}P^n$ est considéré comme ouvert ssi $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est ouvert.

Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, soit

$$U_i = \{[x], \, x_i \neq 0\}.$$

C'est un ouvert, car

$$\pi^{-1}(U_i) = \; \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_i \neq 0\}$$

qui est l'intersection de deux ouverts (pourquoi ?). On a

$$\begin{aligned}
\phi_i([x]) &= \phi_i([t_0, \cdots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \cdots, t_n]) \\
&= (t_0, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \\
&= (x_0/x_i, \cdots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \cdots, x_n/x_i)
\end{aligned}$$

ϕ_i est un homéomorphisme de U_i sur $\mathbb{R}^n$. En effet, ϕ_i est bijective de réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n & \to & U_i \\ (x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) & \mapsto & [x_0, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots x_n]. \end{array}$$

ϕ_i^{-1} est continue comme composée de

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots x_n)$$

et de $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \to \mathbb{R}P^n$. Enfin, si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $\phi_i^{-1}(U) \subset \mathbb{R}P^n$ est ouvert ssi $\pi^{-1}\phi_i^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est ouvert ssi $P_i^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est ouvert, où $P_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ avec

$$P_i(x_0, \cdots, x_n) = (x_0/x_i, \cdots, \widehat{x_i/x_i}, \cdots, x_n/x_i).$$

Or P_i est C^0, donc ϕ_i continue.

De plus,

$$U_i \cap U_j = \{[x], x_i \neq 0, x_j \neq 0\},$$

et pour $x \in \phi_i(U_i \cap U_j)$,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) =$$
$$(\tfrac{x_0}{x_j}, \cdots, \tfrac{x_{j-1}}{x_j}, \tfrac{x_{j+1}}{x_j}, \cdots, \tfrac{x_{i-1}}{x_j}, \tfrac{1}{x_j}, \tfrac{x_{i+1}}{x_j}, \cdots, \tfrac{x_n}{x_j})$$

qui est manifestement lisse.

Remarque. Attention, une variété ne peut être a priori dissocié de son atlas. En d'autres termes, la variété est plus que l'ensemble sous-jacent. A priori, $\mathbb{R}^n$ pourrait supporter des structures de variétés « différentes » !

Définition (Fonctions C^k)

- Soit M une variété lisse, de dimension p, et $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ son atlas. Une application $f : M \to \mathbb{R}^n$ est dite de classe C^k si pour tout $i \in I$, la fonction
$$f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$
est C^k.
- Soit $(M, (U_i, \phi_i)_{i\in I})$ et $(N, (V_j, \psi_j)_{j\in J})$ deux variétes lisses, et $f : M \to N$. L'application f est dite C^k si les fonctions
$$\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$$
sont C^k quand elles sont définies. Si $k \geq 1$, f C^k, bijective et f^{-1} est C^k, alors on dit que f est un C^k-difféomorphisme.

Théorème (John R. Stallings 1962) : pour $n \neq 4$, toutes les structures différentiables sur $\mathbb{R}^n$ sont difféomorphes.

Théorème (M. Freedman & S. K. Donaldson 1986) : $\mathbb{R}^4$ possède une autre structure différentiable non difféomorphe à la structure standard, mais homéomorphe !

Espace tangent

Soit M une variété C^1 munie d'un atlas $(U_i, \phi_i)_i$, de dimension p et $a \in M$.

- Soit C_a l'ensemble des courbes C^1 : $\alpha :]-1, 1[\to M$ telle que $\alpha(0) = a$.
- On définie une relation d'équivalence $\sim_a$ sur C_a par

$$\forall \alpha, \beta \in C_a, \alpha \sim_a \beta \Leftrightarrow (\phi_i \circ \alpha)'(0) = (\phi_i \circ \beta)'(0).$$

- L'espace tangent à M en a est défini par

$$T_a M := C_a / \sim_a .$$

- Le *fibré tangent* de M est

$$TM = \coprod_{x \in M} T_x M.$$

Faits (exercices !).

1. $\sim_a$ ne dépend pas de la carte choisie.
2. T_aM est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\dim M$.
   Indication : utiliser l'application $\theta_a : T_aM \to \mathbb{R}^n$,
   $\theta_a([\alpha]) = (\phi_i \circ \alpha)'(0)$.
3. Pour M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on peut identifier T_aM à l'espace tangent déjà défini.

Définitions.

- Soit $f : M \to N$ une application C^1 entre deux variétés différentiables. L'application

$$\begin{array}{rcl} df(a) : T_a M & \to & T_{f(a)} N \\ classe(\alpha) & \mapsto & classe(f \circ \alpha) \end{array}$$

  est appelée *différentielle* de f en a.

Proposition (exercice).

- La différentielle définie coïncide avec la différentielle quand $M = \mathbb{R}^n$ et $N = \mathbb{R}^p$.
- Si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont deux fonctions différentiables entre deux variétés différentiables, alors

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Proposition. Le fibré tangent d'une C^k-variété de dimension n est une C^{k-1}-variété différentielle de dimension $2n$.

Démonstration. Soit $(a,v) \in TM$. Il existe $i \in I$, $a \in U_i$. Définissons

$$\begin{array}{rcl} \psi_i : TU_i & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x,w) & \mapsto & (\phi_i(x), d\phi_i(x)(w)). \end{array}$$

On a

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap U_i) \times \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \phi_i(U_j \cap U_i) \times \mathbb{R}^n$$

avec

$$\begin{aligned} (x, \lambda) \quad &\mapsto \quad (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x),\ d\phi_i(x) \circ ((d\phi_j)(x))^{-1}(\lambda)) \\ &\mapsto \quad (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(x)(\lambda)). \end{aligned}$$

Puisque les changements de cartes $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont des C^k-difféomorphismes, on constate que les changements de cartes du fibré tangent sont C^{k-1}.

Reste à munir TM d'une topologie. Pour cela, on considère que TU_i est un ouvert de TM, et que ψ_i est un homéomorphisme (du coup difféomorphisme). En d'autres termes, $U \subset TM$ est un ouvert ssi $\forall i, \psi_i(U \cap TU_i)$ est ouvert dans $U_i \times \mathbb{R}^n$. Il y a compatibilité car les $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ sont des homéomorphismes.

Théorème (Whitney faible) Toute variété différentiable compacte admet un *plongement* dans un espace affine réel (c'est à dire qu'il existe $f : M \to \mathbb{R}^N$, $f(M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ et f est un difféomorphisme sur son image.)

Lemme 0 (admis). Si M est compacte, toute immersion

injective est un plongement (et réciproquement).

Lemme 1. Soit $(U_i)_i$ un revouvrement fini par des ouverts

d'une variété compacte. Alors il existe un recouvrement fini par des ouverts $V_i \subset U_i$ tels que $\bar{V_i} \subset U_i$.

Lemme 2. Soit $K \subset U$ un compact d'un ouvert U dans une

variété lisse. Alors il existe une fonction lisse f telle que $f_{|K} = 1$ et $f_{M \setminus U} = 0$.

Démonstration du théorème. Comme M est compact, on peut supposer que l'atlas $(U_i, \phi_i)_i$ est fini. Par le Lemme 1, il existe un recouvrement $(V_i)_i$ d'ouverts tels que $\bar{V}_i \subset U_i$. Par le Lemme 2, il existe des fonctions $f_i : M \to \mathbb{R}$ lisses, telles que $f_{i|M \setminus U_i} = 0$ et $f_{i|V_i} = 1$.
Maintenant soit

$$\phi = (f_1 \phi_1, \cdots, f_N \phi_N, f_1, \cdots, f_N) : M \to \mathbb{R}^{N(n+1)}.$$

L'application ϕ est bien définie et lisse. C'est une immersion. En effet, soit $x \in M$. Il existe i, tel que $x \in V_i$, donc le rang de $d\phi$, qui est est au moins celui de $d(f_i\phi_i)(x) = d\phi_i(x)$, est n puisque ϕ_i est un difféo sur $\mathbb{R}^n$. Montrons que ϕ est injective. Si $\phi(x) = \phi(y)$, et i tel que $f_i(x) \neq 0$, alors $f_i(y) = f_i(x)$, donc $x, y \in U_i$, et

$$f_i(x)\phi_i(x) = f_i(y)\phi_i(y)$$

implique $\phi_i(x) = \phi_i(y)$, mais alors $x = y$ car ϕ_i est une bijection.

Démonstration du Lemme 1. Soit $x \in M$. Il existe i tel que $x \in U_i$, et un ouvert $W_x \subset U_i$ tel que $\bar{W}_x \subset U_i$ (c'est vrai dans $\mathbb{R}^n$ où les boules fermées forment une base de voisinage de tout point). Par compacité, il existe un nombre fini de tels $(W_x)_{x_j \in J}$ qui recouvrent M. On choisit alors

$$V_i = \bigcup_{W_{x_j} \subset U_i} W_{x_j}.$$

$\square$

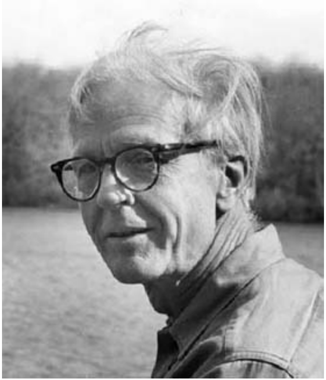
Démonstration du Lemme 2. Soit $x \in K$ et i tel que $x \in U_x := U \cap U_i$. Soient

$$\bar{b} \subset b' \subset \phi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$$

où b et b' sont deux boules ouvertes centrées sur $\phi_i(x)$. Alors (exercice) il existe une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que $f_{|\bar{b}} = 1$ et $f_{|\mathbb{R}^n \setminus b'} = 0$. On étend $f \circ \phi_i$ définie sur U_x par 0 sur tout M en une fonction lisse f_x. On choisit un recouvrement fini $(V_{x_j})_{j \in J}$ de K, et

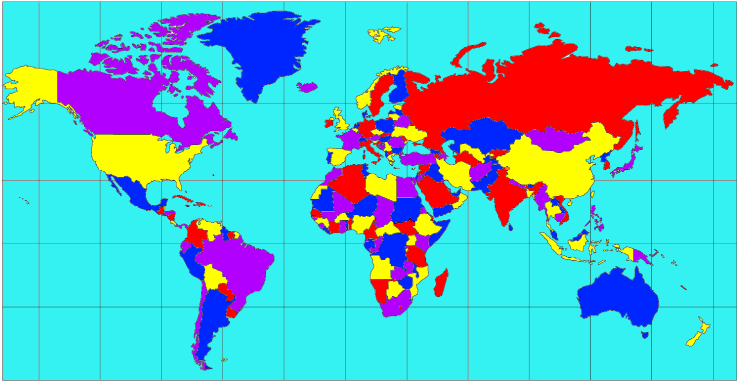
$$f = 1 - \prod_{j \in J} (1 - f_{x_j}).$$

Hors de $\cup_{j \in J} V_{x_j} \subset U$, $f = 0$ et $f_{|K} = 1$. $\square$

Hassler Whitney (1907 NYC- 1989 Princeton)

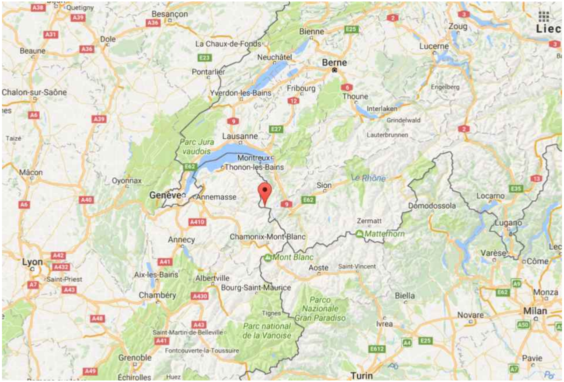
- Père juge de la Cour suprême de l'Etat de NY, mère artiste, engagée politiquement, un grand-père universitaire en sanskrit, un autre astronome (Simon Newcomb), un arrière-gp a déterminé le profil de la côte est pour Thomas Jefferson.



- Yale : licence en physique 1928, musique 1929,
- 1932 : thèse en maths à Harvard (The Coloring of Graphs)
- Alpiniste téméraire
- 1930-40 : enseigne à Harvard
- 1935 : géométrie différentielle

IAS

- 1943-45 : Membre du *Applied Mathematics Panel* pour la *National Defense Research Committee*, étude de la mise à feu des armes et des avions.
- 1945 : Académie des sciences américaine
- 1952 : Institute for Advanced Study



Les Dents Blanches

- 1955 : divorce et remariage
- 1983 : Prix Wolf
- 1986 : second divorce et troisième mariage... à 79 ans
- Cendres aux Dents Blanches