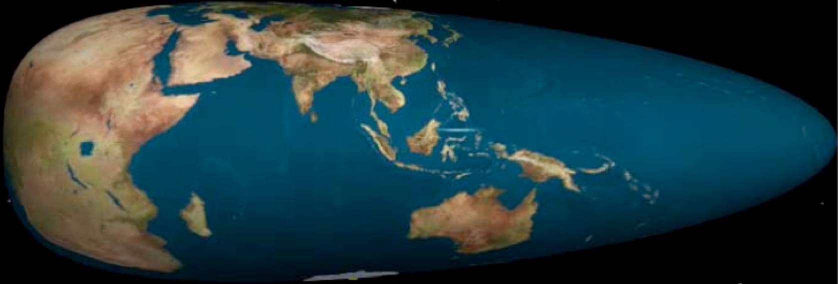
Géométrie différentielle

Damien Gayet



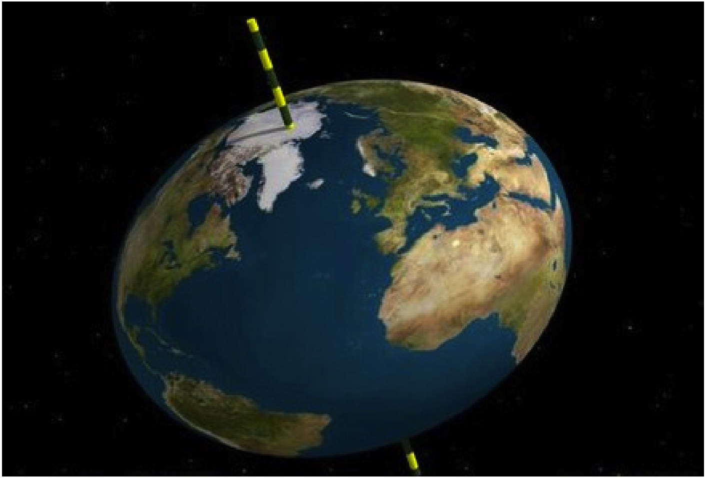
M1G second semestre 2017

Image Jos Leys-Étienne Ghys

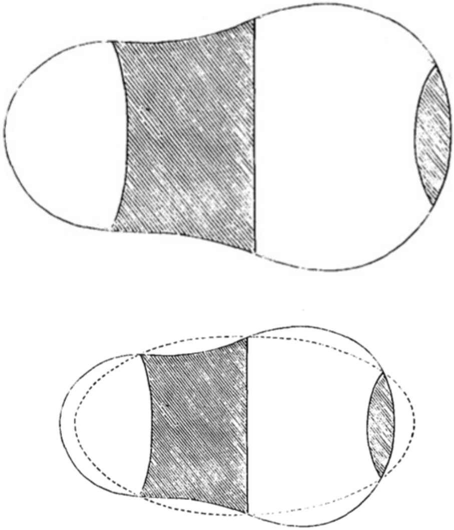
Plan du cours

- Surfaces : surfaces de $\mathbb{R}^3$, plan tangents.
- Courbure : Courbure normale, courbure de Gauss, Géodésiques. Cas des surfaces de révolution.
- Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$: graphe local, paramétrisation locale, équation locale.
- Extremums locaux dune fonction définie sur une sous-variété (extremums liés), multiplicateurs de Lagrange.
- Formes différentielles, théorème de Stokes.

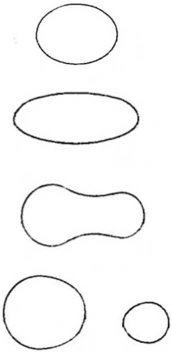
Les Terres possibles



L’erreur de Poincaré



L'espoir de Poincaré

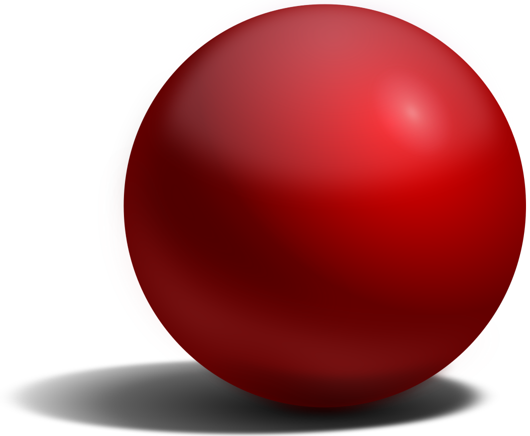


Il est possible que ce soit là l'origine des étoiles doubles.

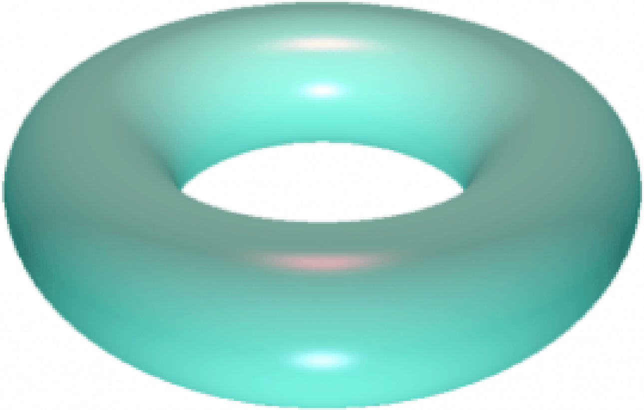
Surfaces paramétrées

Définition. Une surface paramétrée régulière est un couple (U, f) avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}^3$ une application C^k, avec $k \geq 1$, telle que pour tout $z \in U$, $df(z)$ est de rang deux.

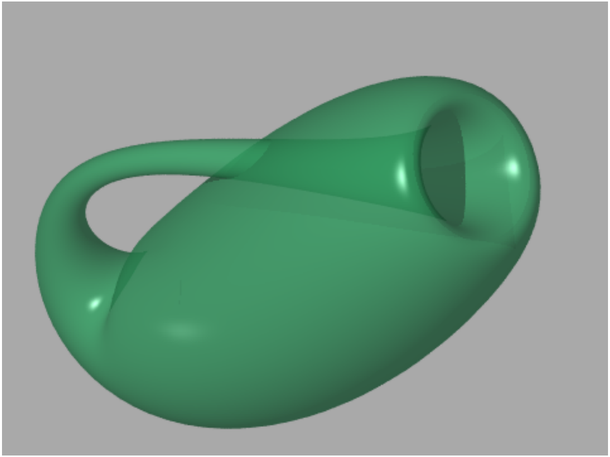
Fait. $df(w)$ est de rang deux ssi $f'_u(w) \wedge f'_v(w) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.



Une sphère



Un tore



Une bouteille de Klein

Le plan. Soit $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un plan affine de direction le plan vectoriel P, $A \in \Pi$ et $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ une base de P. Alors

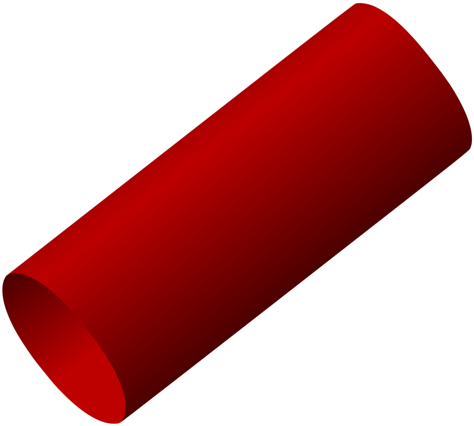
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & A + u\epsilon_1 + v\epsilon_2 \end{array}$$

est une paramétrisation de Π. On constate en effet que

$$\forall z \in \mathbb{R}^2,\ df(z) = \ \epsilon_1 du + \epsilon_2 dv$$

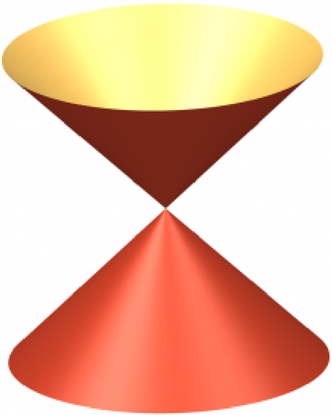
est de rang 2 car elle n'a pas de noyau ($f'_u = \epsilon_1$ et $f'_v = \epsilon_2$).

Exercice. Trouver une paramétrisation régulière d'un cylindre de direction $a \in \mathbb{R}^3$ et de rayon R.



Exercice.

- Trouver une paramétrisation de ce cone :



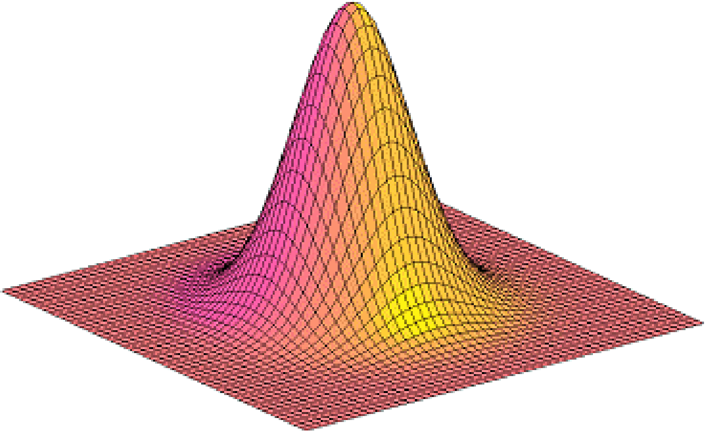
- Montrer que la paramétrisation est singulière au point... singulier.

Graphes. Soit $h : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^k, $k \geq 1$, alors $f : U \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = (x, y, h(x, y))$$

est une surface paramétrée régulière.

Démonstration. La fonction f est C^k car chacune de ses coordonnées l'est. Ensuite, $f'_x = (1, 0, h'_x)$ et $f'_y = (0, 1, h'_y)$ donc $f'_x \wedge f'_y = (*, *, 1) \neq 0$. $\square$



$$h(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

La sphère $S(A,R)$. Soit $U =]0,2\pi[\times]0,\pi[$, et

$$f(\theta,\phi) = \ A + \ R\big(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\big).$$

Alors (U,f) est une surface paramétrée régulière car

$$Mat(df(\theta,\phi), B_2, B_3) = R\left(\begin{array}{cc} -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & -\sin\phi. \end{array}\right)$$

Le déterminant 2x2 supérieur vaut $-R^2\cos\phi\sin\phi \neq 0$ donc la surface est régulière pour $\phi \neq \pi/2$. Si $\phi = \pi/2$, la matrice est encore de rang 2. C'est la sphère $S(A,R)$ moins...

Le tore de révolution. Soit $0 < r < R$, $U =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, et

$$
\begin{aligned}
F(\theta,\phi) &= Rot\big(Oz,\theta\big)\big((R,0,0)+r(\cos\phi,0,\sin\phi)\big) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (R + r\cos\phi, 0, r\sin\phi) \\
&= \big(\cos\theta(R+r\cos\phi), \sin\theta(R+r\cos\phi), r\sin\phi\big)
\end{aligned}
$$

(Exercice. Montrer qu'elle est régulière).

Surface de révolution. Si $f(\phi)$ est une courbe paramétrée dans (xOz), alors $F(\theta,\phi) = Rot(Oz,\theta)(f(\phi))$ est une surface de révolution. (Exercice : trouver la condition sur f pour qu'elle soit régulière.)

Une surface est localement un graphe

Proposition. Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière en $w_0 \in U$. Alors il existe un voisinage V de w_0 dans U tel que

- $f(V)$ est un graphe au-dessus d'un ouvert de xOy, xOz, ou yOz.
- $f_{|V} : V \to f(V)$ est bijective.

Remarques.

- En général, une surface n'est pas un graphe (comme la sphère).
- En général, même localement, la surface n'est pas un graphe (par ex si w_0 est un point double).
- La démonstration va montrer que c'est un graphe sur xOy si $\langle f'_u \wedge f'_v(w), e_3 \rangle \neq 0$ (donc $e_3 \notin Vect(f'_u, f'_v)$).
- Pour une fonction f et un point w "génériques", $f'_u \wedge f'_v(w)$ a ses trois coordonnées non nulles, donc la surface est un graphe selon les trois directions de $\mathbb{R}^3$.

La sphère. Si $m = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$ et $z_0 > 0$, $\mathbb{S}^2$ est le graphe de

$$h_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

au voisinage de (x_0, y_0). Si $z_0 = 0$ et $x_0 < 0$, $\mathbb{S}^2$ est le graphe de

$$h_2(y, z) = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

au voisinage de (y_0, z_0).

Démonstration de la Proposition. On sait que $f'_u \wedge f'_v(w_0) \neq 0$. Supposons que $\langle f'_u \wedge f'_v(w_0), e_3 \rangle \neq 0$. Si $f = (f_1, f_2, f_3)$, la condition est $f'_{1,u} f'_{2,v} - f'_{1,v} f'_{2,u} \neq 0$. Si

$$\tilde{f} = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2,$$

la condition est

$$\det_{B_{can}} d\tilde{f}(w_0) \neq 0.$$

En d'autres termes, $d\tilde{f}(w_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est inversible.

Par le théorème d'inversion local, il existe $V \subset U$ un voisinage de w_0 tel que

$$\tilde{f}_{|V} : V \to \tilde{f}(V) \subset \mathbb{R}^2$$

soit un C^k-difféomorphisme. En particulier $f_{|V}$ est injective car $\tilde{f}_{|V}$ l'est. D'où la seconde assertion. Soit $\phi : \tilde{f}(V) \to V$ son inverse. Alors

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in f(V) &\Leftrightarrow \exists (u,v) \in V, f(u,v) = (x,y,z) = (\tilde{f}(u,v), z) \\
&\Leftrightarrow \exists (u,v) \in V, (u,v) = \phi(x,y) \text{ et } z = f_3(u,v) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in \tilde{f}(V) \text{ et } z = f_3(\phi(x,y)),
\end{aligned}$$

donc $f(V)$ est un graphe au-dessus de $\tilde{f}(V) \subset (xOy)$. $\square$

Lien entre les paramétrisations

Proposition. Soit $g : V \to \mathbb{R}^3$ et $f : U \to \mathbb{R}^3$ deux surfaces C^k-paramétrées, $W = f(U) \cap g(V)$ et $w \in U$, $w' \in V$ tels que $f(w) = g(w') \in W$. Supposons que $f^{-1}(W)$ est un voisinage de $w \in U$. Alors il existe $Z \subset f^{-1}(W)$ voisinage ouvert de w, $Z' \subset g^{-1}(W)$ voisinage ouvert de w', et un C^k difféomorphisme

$$\phi : Z \to Z'$$

tel que $f_{|Z} = g \circ \phi$.

Démonstration. Comme f est régulière au voisinage de w, il existe un voisinage $Z \subset U$ de w, tel que, quitte à changer d'axes, $f(Z)$ est le graphe de h au-dessus d'un ouvert X (la projection verticale de $f(Z)$) de xOy. Soit

$$\begin{array}{rcl} f_0 : X & \to & W, \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,h(x,y)). \end{array}$$

Alors si $\tilde{g} = (g_1, g_2)$ et $\tilde{f} = (f_1, f_2)$, on a

$$g_{|g^{-1}(W)} = \; f_0 \circ \tilde{g} \text{ et } f_{|f^{-1}(W)} = f_0 \circ \tilde{f},$$

et donc $\;dg = df_0 \circ d\tilde{g}$.

Comme $dg(w')$ est de rang égal à deux, $d\tilde{g}(w')$ aussi, si bien que $\tilde{g}$ a un inverse local

$$\psi : Y \subset X \to \psi(Y) \subset g^{-1}(W).$$

On a donc

$$f_{0|Y} = g \circ \psi,$$

soit

$$f_{|\tilde{f}^{-1}(Y)} = g \circ \psi \circ \tilde{f},$$

avec $\psi \circ \tilde{f}$ qui est un C^k-difféo car $\tilde{f}$ est aussi un difféo, quitte à restreindre encore l'ouvert. $\square$

Définition et Proposition. Le plan tangent affine en $f(w_0) \in S = f(U)$ est

$$f(w_0) + Im(df(w_0)).$$

- Il ne dépend pas de la paramétrisation choisie.
-

$$\begin{aligned} T_m S &= m + \{v \in \mathbb{R}^3, \exists \epsilon > 0, \exists \gamma \in C^1(]-\epsilon, \epsilon[, U), \\ &\quad \gamma(0) = w_0, v = df(w_0)(\gamma'(0)).\} \end{aligned}$$

Démonstration. Notons que comme $df(w)$ est de rang 2, $Im(df(w))$ est un plan vectoriel. Ce plan ne dépend pas de la paramétrisation. En effet, par la Proposition précédente, deux paramétrisations f et g sont reliées par un difféo local ϕ tel que $f = g \circ \phi$, si bien que

$$df(w) = dg(\phi(w)) \circ d\phi(w),$$

donc $Im(df(w)) \subset Im(dg(\phi(w))$. Comme ce sont deux espaces de dimension 2, on a égalité.

On a $m + (f \circ \gamma)'(0) = m + df(\gamma(0))(\gamma'(0)) \in T_m S$.

Réciproquement, tout vecteur de $T_m S$ est atteint ainsi (à vérifier). $\square$

Remarques.

- Si $m = f(w_0)$, une paramétrisation de T_mS est
$$w \in \mathbb{R}^2 \mapsto m + df(w_0)(w).$$
- Une base $Im(df(w))$ est
$$B = \ \{\frac{\partial f}{\partial u}(w), \frac{\partial f}{\partial v}(w)\}.$$
- Donc si $a = f(w)$, une équation du plan affine est
$$\Big\langle (x, y, z) - a, \frac{\partial f}{\partial u}(w) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(w) \Big\rangle = 0.$$

Exemples.

- Si f est affine, S est un plan affine Π de plan directeur P et son plan tangent (resp. tangent affine) est P (resp. Π) en tout point.
- Si f paramètre comme ci-dessus la sphère $S(A, R)$,

$$\begin{aligned} T_{f(\theta,\pi/2)}S &= R(\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ &\quad + Vect\Big(R\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, R\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big). \end{aligned}$$

Une équation du plan vectoriel est

$$\langle {}^t(x, y, z),\ {}^t(\cos\theta, \sin\theta, 0)\rangle = 0,$$

soit $x\cos\theta + y\sin\theta = 0$. Une équation du plan affine est

$$(x - R\cos\theta)\cos\theta + (y - R\sin\theta)\sin\theta = 0$$

soit $x\cos\theta + y\sin\theta = R$.

Position par rapport au plan tangent

Contact d'ordre 1.
Lemme. Soit (f, U) une surface paramétrée, $m = f(w_0)$ un point de $S = f(U)$ et $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ est un plan affine d'équation affine $\phi = 0$. Alors

$$\Pi = T_m S \Leftrightarrow \forall w \in U,\ \phi(f(w)) = o(|w - w_0|).$$

Remarque.

- $T_m S$ est donc la meilleure approximation planaire de S au voisinage de m.
- Si $\Pi \neq T_m S$, alors il y a des directions $h \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 0$, $\phi(f(w_0 + \epsilon h)) = a\epsilon + o(\epsilon)$.

Rappels.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est différentiable en tout point $x \in E$, et $df(x) = f$.
2. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \phi(x) = \phi(m_0) + \tilde{\phi}(x - m_0),$$

où $\tilde{\phi} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Donc

$$d\phi = d\tilde{\phi} = \tilde{\phi}.$$

De plus le plan vectoriel P associé à Π satisfait

$$\ker \tilde{\phi} = P,$$

donc

$$P = \ker d\phi(m)$$

pour tout $m \in \mathbb{R}^3$.

Démonstration. On a par la définition de la différentielle,

$\forall w \in U$, $\phi(f(w)) = \phi(f(w_0)) + d(\phi \circ f)(w_0)(w - w_0) + o(|w - w_0|)$.

Puisque $\phi(f(w_0)) = 0$, la condition est équivalente à

$$d(\phi \circ f)(w_0)(w - w_0) = o(|w - w_0|),$$

soit (à vérifier)

$$|||d(\phi \circ f)(w_0)||| = o_{w \to w_0}(1),$$

si bien que $d\phi(m) \circ df(w_0) = 0$. Rappelons que

$$\ker d\phi = P,$$

donc notre condition est $Im\ df(w_0) \subset P$, ce qui implique l'égalité car ils ont même dimension, soit $T_m S = \Pi$. $\square$

Rappels. Une application $f : U \subset E \to F$ est dite deux fois différentiable en $a \in U$ si

1. elle est différentiable au voisinage de a ;
2. sa différentielle $df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable en a.

On note

$$d^2 f(a) := d(df)(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)).$$

Donc

$$\forall (h, k) \in E^2,\ d^2 f(a)(h) \in \mathcal{L}(E, F)$$

et

$$d^2 f(a)(h)(k) \in F.$$

1. Par Schwartz, $d^2 f(a)$ est symétrique en (h, k).
2. Par Taylor, si f est deux fois différentiable en a, on a

$$f(a + h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

- si $F = \mathbb{R}$, $d^2 f(a) : E^2 \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique.
- Si $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, et $(x_i)_i$ les coordonnées associées,

$$Hess(f)(a) := Mat(df^2(a), B) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{1 \leq i,j \leq n},$$

- et

$$df(a)(h, k) = H^t Hess(f)(a) K$$

si H et K sont les vecteurs coordonées de h et k.

- En particulier, si $E = \mathbb{R}^2$ et B la base canonique,

$$d^2 f(a)((x,y),(x,y)) = \ (x,y) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Classiquement on définit $r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(a)$, donc

$$d^2 f(a)(x,y)^2 = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

- Soit E un espace euclidien de dimension fini, et $\psi : E^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Alors il existe une BON $(e_1, \cdots, e_n)$ de E et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

  $$\forall x \in E,\ \psi(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2$$

  avec $(x_i)_i$ les coordonnes de x dans B.

- En particulier, il existe $a, b \in \mathbb{R}^2$ orthogonaux, et vecteurs propres de la matrice pour les valeurs propres λ et μ. On a alors
$$d^2h(w)(Xa + Yb)^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2.$$
- De plus, $\det Hess(h)(w) = \lambda\mu = rt - s^2$.
- Si $rt - s^2 = \lambda\mu < 0$, $Hess(h)$ est non dégénérée mais pas définie.
- Si $rt - s^2 = \lambda\mu > 0$, $Hess(h)$ est définie, positive si $r + t = \lambda + \mu > 0$, négative si $r + t < 0$.

Contact d'ordre 2. On suppose maintenant que $k \geq 2$. On suppose que près de $f(w_0)$, S est le graphe de h au-dessus de xOy. On a donc la paramétrisation

$$f : (x, y) \mapsto (x, y, h(x, y)).$$

On a, puisque $d^2x = d^2y = 0$,

$$\begin{aligned} f(w) \quad = \quad & f(w_0) + \ df(w_0)(w - w_0) + \\ & \frac{1}{2} d^2h(w_0)(w - w_0)^2 e_3 + o(|w - w_0|^2). \end{aligned}$$

et si ϕ est une équation affine de T_mS, alors, puisque

$$f(w_0) + df(w_0)(w - w_0) \in T_mS,$$

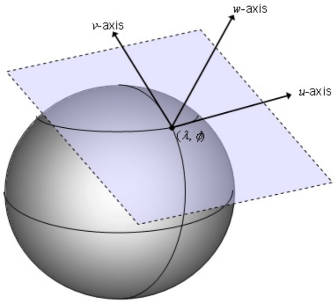
$$\phi(f(w)) \quad = \quad \frac{1}{2} d^2h(w_0)(w - w_0)^2 d\phi(w_0)(e_3) + o(|w - w_0|^2).$$

On a

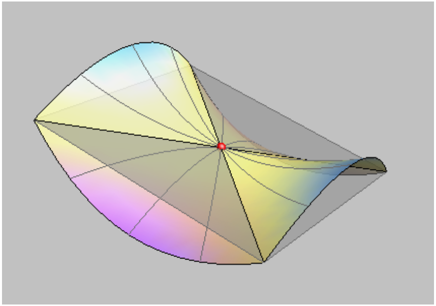
$$d\phi(m)(e_3) \neq 0 \text{ et } e_3 \notin Im\, df(w_0)$$

et

$$d^2h(w)(w-w_0)^2 = r(x-x_0)^2 + 2s(x-x_0)(y-y_0) + t(y-y_0)^2.$$



• Si $rt - s^2 > 0$, $Hess(h)(w_0)$ est définie, donc $\phi(f(w))$ est de signe constant pour w assez proche de w_0 : la surface est localement d'un seul côté du plan tangent. On dit que le point est *elliptique*.



- • Si $rt - s^2 < 0$, $Hess(f)(w_0)$ est non dégénérée mais non définie, donc $\phi(f(w))$ change de signe : la surface est de part est d'autre de son plan tangent.
- On a $Hess(f)(w_0)(Xa + Yb) = \lambda X^2 + \mu Y^2$. Si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$, les directions isotropes sont $\sqrt{\lambda}X \pm \sqrt{\mu}Y = 0$.

Surfaces définies de façon implicite.

Théorème

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, $F : \Omega \to \mathbb{R}$, F C^k avec $k \geq 1$, $p \in \Omega$ tel que

- $F(p) = 0$
- $dF(p)$ est de rang 1.

Alors $S = F^{(-1)}(0)$ est localement une surface paramétrée dont le plan tangent en $a \in S$ est

$$T_pS = \ a + \ker dF(p).$$

Une équation en est

$$dF(p)((x, y, z) - p) = 0$$

ou bien

$$\langle \nabla F(a), (x, y, z) - p \rangle = 0$$

(le plan tangent est orthogonal au gradient de F).

Exemple. $F(x, yz) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ avec $a \in F^{-1}(0)$. On a F est C^∞,

$$dF(a) = \ 2xdx + 2ydy - 2zdz.$$

Elle est de rang 1 ssi elle n'est pas nulle. Si est nulle, $x = y = z = 0$ mais alors $a \notin S$. Le plan tangent vectoriel est donc $\ker xdx + ydy - zdz$. Par exemple en $a = (2, 2, \sqrt{7})$, le plan affine tangent est

$$T_a S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2(x-2) + 2(y-2) - 2\sqrt{7}(z - \sqrt{7}) = 0\}.$$

Démonstration du théorème. Puisque $dF(a)$ est de rang maximal, l'une des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(a)$ ou $\frac{\partial F}{\partial z}(a)$ est non nulle, par exemple la dernière. On écrit

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x,y),z) & \rightarrow & F(x,y,z) \end{array}$$

et l'on constate que $d_2F(a) = \frac{\partial F}{\partial z}(a)dz$ est de rang 1. Le TFI nous dit qu'il existe un voisinage U_1 de z_a dans $\mathbb{R}$, un voisinage U_2 de (x_a, y_a) dans $\mathbb{R}^2$, et une unique fonction $\phi : U_2 \rightarrow U_1$ telle que

$$\forall((x,y),z) \in U_1 \times U_2,\ F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \phi(x,y).$$

On a donc un paramétrage de $F^{-1}(0)$ par

$$f : (x, y) \in U_1 \mapsto (x, y, \phi(x, y)).$$

Ce paramétrage est régulier car c'est un graphe.
Le plan tangent à S en a est $T_aS = a + \mathrm{Im}\ df(x_a, y_a)$. Donc

$$(x, y, z) \in T_aS \Leftrightarrow\ \ z - z_a = d\phi(x_a, y_a)(x - x_a, y - y_a).$$

Or $d_1F(a) + d_2F(a) \circ d\phi(x_a, y_a) = 0$, soit appliqué à $(x - x_a, y - y_a)$,

$$(x - x_a)\frac{\partial F}{\partial x}(a) + (y - y_a)\frac{\partial F}{\partial y}(a) + (z - z_a)\frac{\partial F}{\partial z}(a) = 0$$

ce qui est $dF(a)(x - x_a, y - y_a, z - z_a) = 0$.