Université Grenoble Alpes | **Année 2022-2023**
Licence de mathématiques, 3e année | **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 1
6 février 2023

Exercice 1 Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme infinie. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E,\ \varphi(f) = \int_0^1 f^2(t)dt.$$

1. L'application φ est-elle linéaire ?
2. Montrer que φ est continue.
3. Montrer que φ est différentiable sur E et donner sa différentielle en tout point $f \in E$.
4. Pour tout k, on définit la fonction $e_k \in E$ par $e_k(x) = x^k$. Calculer la dérivée $\partial_{e_k}\varphi(1)$ de φ selon le vecteur e_k au point $1 \in E$ (la fonction constante égale à 1).

Correction (1) Non. En effet, si $f = 1$, $\varphi(2f) = 4 \neq 2 = 2\varphi(f)$.
(2) Soit $\epsilon > 0$ et $f, g \in E$. Soit $\delta < \min(1, \dfrac{\epsilon}{2 \parallel f \parallel +1})$. Si $\parallel f - g \parallel < \delta$ on a

$$\begin{aligned}
|\varphi(f) - \varphi(g)| &\leqslant \int_0^1 |f^2(t) - g^2(t)|dt \\
&\leqslant (\parallel f \parallel + \parallel f - f + g \parallel) \parallel f - g \parallel \\
&\leqslant (\parallel f \parallel + \parallel f \parallel + \parallel f - g \parallel) \parallel f - g \parallel \\
&\leqslant (2 \parallel f \parallel +1) \parallel f - g \parallel \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Donc φ est continue en f.

Soit $f \in E$ et $L \in L(E,\mathbb{R})$ définie par $\forall g \in E, Lg = 2\int_0^1 f(t)g(t)dt$. L'application L est bien définie car fg est continue sur un segment et elle est linéaire par linéarité de l'intégrale et bilinéarité du produit. Elle est continue car linéaire et Lipschitzienne car

$$\forall g \in E,\ |Lg| \leqslant \left(\int_0^1 |f|(t)dt\right) \|g\|_\infty.$$

De plus

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + Lg + \int_0^1 g^2(t)dt$$

avec $\displaystyle\int_0^1 g^2(t)dt \leqslant \| g \|^2 = o(\| g \|)$. En conclusion, φ est différentiable en f et $d\varphi(f) = L$.

(3) $\partial_{e_k}\varphi(1) = d\varphi(1)e_k = 2\displaystyle\int_0^1 t^k dt = \frac{2}{k+1}$ car $k \neq -1$.

Exercice 2 On considère les applications f et g définies par

$$\begin{array}{llll} f : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 & \qquad g : \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x^2y, xy, xy^3) & \qquad (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, xyz) \end{array}$$

Soit $a = (x, y, z)$. Calculer

1. la matrice jacobienne de f en a,
2. la matrice jacobienne de g en $f(a)$,
3. la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a.

Correction (1)

$$Jac(f)(a) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$Jac(g)(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}, Jac(g)(f(a)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2y^4 & x^3y^4 & x^3y^2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$Jac(g \circ f)(a) = Jac(g)(f(a))Jac(f)(a) = \begin{pmatrix} 2xy + y + y^3 & x^2 + x + 3xy^2 \\ 4x^3y^5 & 5x^4y^4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, et $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ V(x) = \langle Mx, x\rangle + \|x - k(x)\|_2^2.$$

1. Montrer que V est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, et calculer sa différentielle en a.
2. Montrer que $dV(0) = 0$ si et seulement si $k(0)$ est dans le noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'on déterminera en fonction de $dk(0)$.

Correction (1) V est une expression algébrique ne faisant intervenir que des fonctions différentiables. V est donc différentiable et on a

$$\begin{aligned} \forall a, h \in \mathbb{R}^n, V(a+h) - V(a) \quad &= \quad \langle Mh, a\rangle + \langle Ma, h\rangle + 2\langle h - dk(a)h, a - k(a)\rangle \\ &\quad + \langle Mh, h\rangle + \langle h - dk(a)h + o(h), h - dk(a) + o(h)\rangle \end{aligned}$$

La première partie du membre de droite est linéaire en h par bilinéarité du produit scalaire, de M et de $dk(a)$ (et continue car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie), et la seconde partie est majorée en valeurs absolues par

$$\|M\|\|h\|^2 + (\|h\|^2 + \|dk(a)\|\|h\| + o(\|h\|))^2 = O(\|h\|^2) = o(\|h\|).$$

Donc V est différentiable en a et

$$\forall a, h \in \mathbb{R}^n, dV(a)h = \langle Mh, a\rangle + \langle Ma, h\rangle + 2\langle h - dk(a)h, a - k(a)\rangle$$

(2) $dV(0)h = 2\langle (Id - dk(0))h, -k(0)\rangle$. Donc $dV(0) = 0$ si et seulement si $k(0) \in \mathrm{Ker}((Id - dk(0))^t)$ où $(Id - dk(0))^t$ est l'endomorphisme adjoint de $Id - dk(0)$.

Exercice 4 On considère la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^5}{\sin^2 x + \cos^2 y},$$

définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}^2$.

1. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ? Montrer que f est différentiable sur D_f.
2. Déterminer l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f$ tels que f se prolonge par continuité en a. On note $\tilde{f}$ son prolongement par continuité.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est différentiable en $(0, \pi/2)$. Que vaut $d\tilde{f}(0, \pi/2)$?

Correction (1) $f(x,y)$ n'est pas définie ssi le dénominateur est nul, donc

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \pi\mathbb{Z}^2 \times (\pi/2 + \pi\mathbb{Z}).$$

La fonction f est différentiable car c'est un quotient de fonctions différentiables (fonctions trigonométriques et polynôme) avec dénominateur $\neq 0$ sur D_f.

(2) Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f$. Si $x_0 \in \pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ alors f ne se prolonge pas en a. En effet $y_0 \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$ donc le dénominateur de $f(x_0, y)$ tend vers 0 quand y tend vers y_0 mais le numérateur reste non nul, donc $|f|$ tend vers l'infini en a.

Soit maintenant $a = (0, y_0)$ avec $y_0 \in \mathbb{R}$. Pour x avec $0 < |x| < \pi/2$ on a $|\sin x| > \frac{2}{\pi}|x|$ ce qui donne

$$\forall y \in \mathbb{R},\ |f(x,y)| \leqslant \frac{|x^5|}{|\sin^2 x|} \leqslant \frac{\pi^2 |x^5|}{2^2 |\sin^2 x|} = \frac{\pi^2}{4}|x|^3 \underset{(x,y)\to(0,y_0)}{\to} 0$$

donc f se prolonge par continuité en $f(0, y_0) = 0$ Au total f se prolonge sur $\{0\} \times (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$ précisément.

(3) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $x \neq 0$ et x proche de 0 on a

$$\begin{aligned} |f(x, \pi/2 + y) - f(0, \pi/2)| &= \frac{|x|^5}{\sin^2 x + \cos^2(\pi/2 + y)} \\ &\leqslant \frac{|x^5|}{|\sin^2 x|} \leqslant \frac{\pi^2}{4}|x|^3 = o(\| (x,y) \|_\infty) \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, on a $f(0, \pi/2 + y) - f(0, \pi/2) = 0 = o(\| (x,y) \|_\infty)$. Ceci montre que $\tilde{f}$ est différentiable en 0 et $d\tilde{f}(0, \pi/2) = 0$.

Exercice 5 Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & e^{xy}-x^2y. \end{array}$$

et $C = F^{-1}(0)$.

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^2$. Calculer les dérivées partielles de F. En déduire que
$$S := \{(x,y), F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0\}$$
est réduit à un point $A \in \mathbb{R}^2$ qu'on déterminera.
Dans la suite (a,b) est un point de $C \setminus \{A\}$.
2. Montrer que près de (a,b) C est localement le graphe d'une fonction C^2 $\varphi : I \to J$ où I est un intervalle ouvert contenant a et J un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. Donner une équation de la tangente à C au point (a,b). Cette tangente peut-elle être horizontale ? Verticale ?
4. Question bonus : montrer que C n'est pas borné.

Correction (1) F ne fait intervenir que des sommes, polynômes et exponentielles. C'est donc une fonction C^∞.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} - 2xy, \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} - x^2$$

Si $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} - x^2 = x(e^{xy} - x) = 0$ alors soit $x = 0$ soit $x = e^{xy}$. Si $x = 0$, alors $F(0,y) = e^0 = 1 \neq 0$. On a donc $x = e^{xy} > 0$ si $(x,y) \in S$. On a alors $F(x,y) = e^{xy} - x^2y = x - x^2y = x(1-xy) = 0$ donc $y = 1/x$ ce qui donne $x = e^1 = e$ et $y = e^{-1}$. Donc $S = \{(e, e^{-1})\}$.

(2) Pour $(a,b) \in C \setminus S$ on a $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ et le théorème des fonctions implicites montre qu'on a $F(x,\varphi(x)) = 0$ pour x proche de a avec $\varphi(a) = b$ et φ une fonction qui est C^2.

En dérivant $F(x,\varphi(x)) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Un graphe C^1 a une tangente d'équation $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \varphi'(x_0)$ soit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-x_0)\partial_x F(x_0,y_0) + (y-y_0)\partial_y F(x_0,y_0) = 0$$

Cette tangente ne peut pas être verticale car c'est la tangente à un graphe C^1, et est horizontale ssi $\partial_x F = 0$ soit $e^{xy} = 2x$ ou $y = 0$, le dernier cas n'est pas possible sinon $F(x,y) \neq 0$, donc $x^2y = 2x$ soit $x = 0$ impossible ou $xy = 2$ soit $y = 2/x$ et $2x = e^2$. Donc la seule tangente horizontle est au point $(e^2/2, 2e^{-2})$.

Question bonus : En posant $xy = t \neq 0$, on a $(x,y) \in C$ ssi $e^t/t = x$. Donc pour tout $t > 0$, $(e^t/t, t^2e^{-t}) \in C$. Comme $e^t/t \to +\infty$ pour $t \to \infty$, on obtient que C n'est pas bornée.