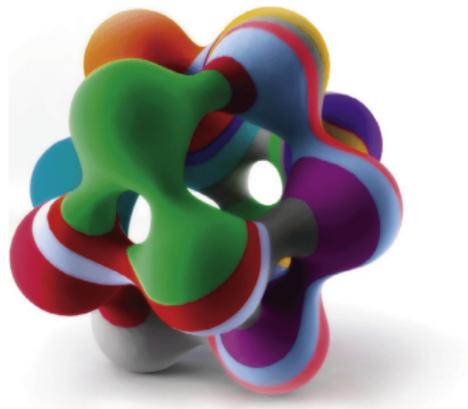


À quoi ressemble une courbe complexe aléatoire ?

Colloquium LMA

15 septembre, Poitiers

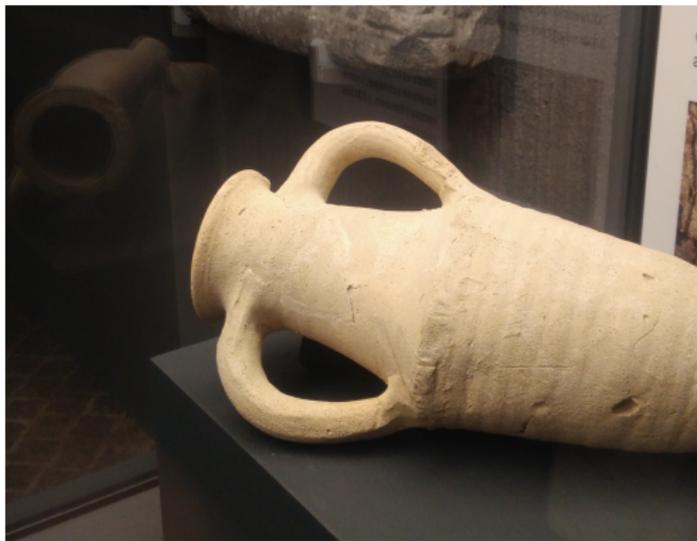


Damien Gayet (Institut Fourier, Grenoble, France)

Image : M. Hajij T.K. Dey et X. Li

Partie I

Courbes réelles et courbes complexes



Musée Sainte-Croix, Poitiers

Géométrie algébrique réelle

Soit

$$p(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n \leq d} a_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in \mathbb{R}_d[x_1, \dots, x_n].$$

La géométrie algébrique *réelle* s'intéresse à

$$Z(p) = \{p = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Soit

$$P(X) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} a_I X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in \mathbb{R}_d^{hom}[X_0, \dots, X_n].$$

Comme $Z(P) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est invariant par homothéties, on étudie

$$Z(P) = \{P = 0\} \subset \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1}/\text{homothéties}.$$

$$n = 1$$

- ▶ $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{S}^1$;
- ▶ $Z(P)$ est un ensemble fini de points;
- ▶ $0 \leq \#Z(P) \leq d$.

$$n = 2$$



$Z(P)$ pour P de degré $d = 80$

- ▶ $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2 / \pm$;
- ▶ $Z(P)$ est une réunion de cercles topologiques.



Théorème (Harnack 1876) :

$$0 \leq \#\text{composantes connexes de } Z(P) \leq 1 + \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$



Théorème (Harnack 1876) :

$$0 \leq \# \text{composantes connexes de } Z(P) \leq 1 + \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

16ème problème de Hilbert : Comprendre la topologie des cercles entre eux.

Géométrie algébrique complexe

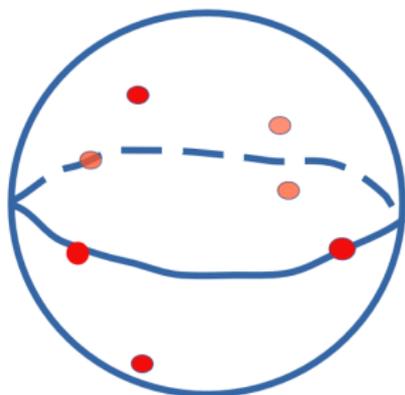
Soit

$$P(x) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} a_I Z_0^{i_0} \cdots Z_n^{i_n} \in \mathbb{C}_d^{\text{hom}}[Z_0, \dots, Z_n].$$

Comme $Z(P) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est invariant par homothéties, on étudie

$$Z(P) = \{P = 0\} \subset \mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}/\text{homothéties}.$$

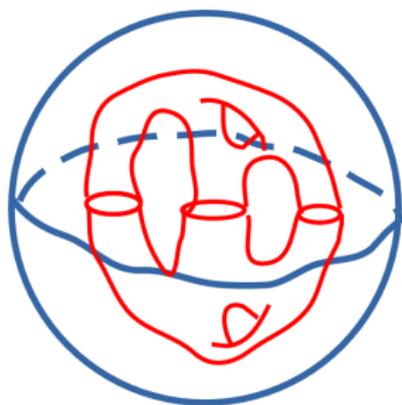
$$n = 1$$



$Z(P)$ dans $\mathbb{C}P^1$ pour P réel de degré $d = 7$

- ▶ $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^2$,
- ▶ $Z(P)$ est un ensemble fini de points
- ▶ $\#Z(P) = d$.

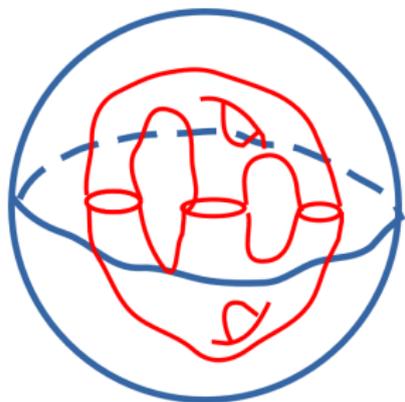
$$n = 2$$



$Z(P)$ dans $\mathbb{C}P^2$ pour P réel

- ▶ $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{S}^5/\mathbb{U}(1)$ a des aires de \mathbb{S}^4 ;
- ▶ $Z(P)$ est *a priori* une réunion de surfaces réelles compactes lisses ;

$$n = 2$$



Théorème (Riemann, Hurwitz 19e)

- ▶ $Z(P)$ est connexe et orientable
- ▶ Le genre de $Z(P)$ est égal à $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

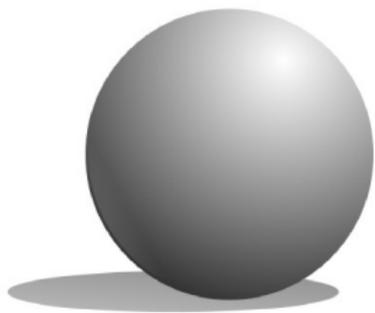
$$n = 2$$



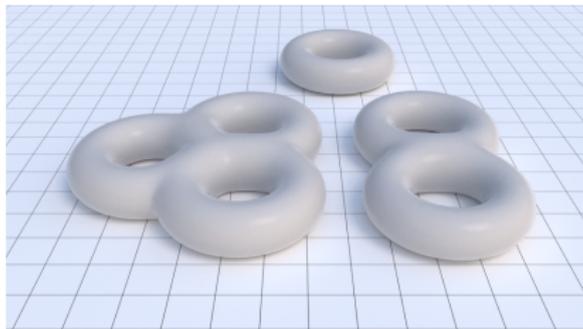
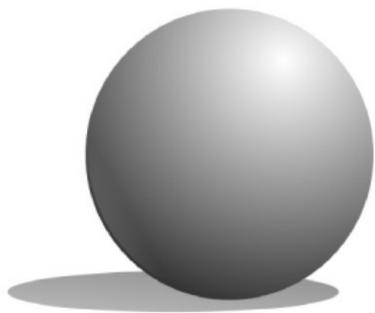
Théorème (Riemann, Hurwitz 19e)

- ▶ $Z(P)$ est connexe et orientable
- ▶ Le genre de $Z(P)$ est égal à $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

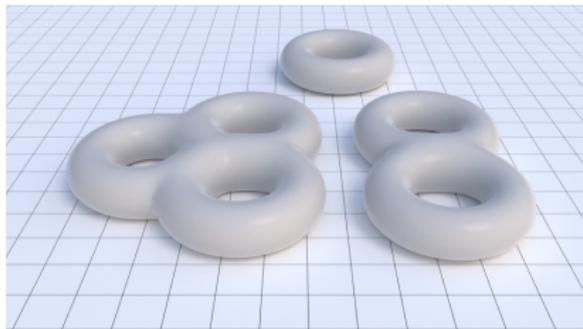
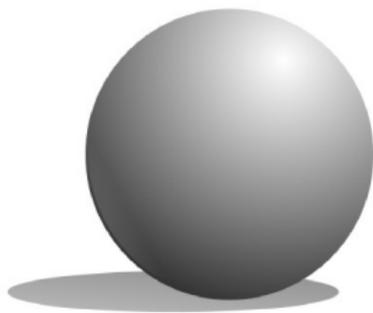
Théorème (Wirtinger) $\text{Vol}(Z(P)) = d$.



▶ $d = 1$ or $d = 2$: sphere



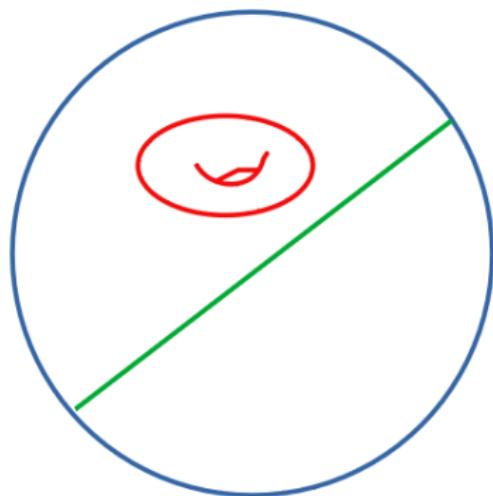
- ▶ $d = 1$ or $d = 2$: sphere
- ▶ $d = 3$: torus



- ▶ $d = 1$ or $d = 2$: sphere
- ▶ $d = 3$: torus
- ▶ $d = 4$: genus $g = 3$

Deux choses au sujet des courbes complexes

Fait 1 : il n'y a pas de courbe complexe compacte dans $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \sim_{\text{biholomorphe}} \mathbb{C}^2$.



IMPOSSIBLE

Démonstration.

▶ $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \underset{\text{biholomorphe}}{\sim} \mathbb{C}^2;$

Démonstration.

- ▶ $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \underset{\text{biholomorphe}}{\sim} \mathbb{C}^2$;
- ▶ Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $f(z, w) = \Re z$. Alors

$$\exists M \in C, \Re z(M) = \max_C \Re z.$$

Démonstration.

▶ $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \underset{\text{biholomorphe}}{\sim} \mathbb{C}^2;$

▶ Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $f(z, w) = \Re z$. Alors

$$\exists M \in C, \Re z(M) = \max_C \Re z.$$

▶ Près de M ,

$$C \underset{\varphi \text{ biholomorphe}}{\sim} \mathbb{D} \subset \mathbb{C};$$

Démonstration.

▶ $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \underset{\text{biholomorphe}}{\sim} \mathbb{C}^2;$

▶ Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $f(z, w) = \Re z$. Alors

$$\exists M \in C, \Re z(M) = \max_C \Re z.$$

▶ Près de M ,

$$C \underset{\varphi \text{ biholomorphe}}{\sim} \mathbb{D} \subset \mathbb{C};$$

▶ $\Re z \circ \varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est harmonique,

Démonstration.

▶ $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \underset{\text{biholomorphe}}{\sim} \mathbb{C}^2;$

▶ Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $f(z, w) = \Re z$. Alors

$$\exists M \in C, \Re z(M) = \max_C \Re z.$$

▶ Près de M ,

$$C \underset{\varphi \text{ biholomorphe}}{\sim} \mathbb{D} \subset \mathbb{C};$$

▶ $\Re z \circ \varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est harmonique,

▶ donc n'a un max local que si c'est localement constant.

Démonstration.

▶ $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \underset{\text{biholomorphe}}{\sim} \mathbb{C}^2;$

▶ Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $f(z, w) = \Re z$. Alors

$$\exists M \in C, \Re z(M) = \max_C \Re z.$$

▶ Près de M ,

$$C \underset{\varphi \text{ biholomorphe}}{\sim} \mathbb{D} \subset \mathbb{C};$$

▶ $\Re z \circ \varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est harmonique,

▶ donc n'a un max local que si c'est localement constant.

▶ Donc $z|_C$ est constante.

Démonstration.

▶ $\mathbb{C}P^2 \setminus \{X_0 = 0\} \underset{\text{biholomorphe}}{\sim} \mathbb{C}^2;$

▶ Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $f(z, w) = \Re z$. Alors

$$\exists M \in C, \Re z(M) = \max_C \Re z.$$

▶ Près de M ,

$$C \underset{\varphi \text{ biholomorphe}}{\sim} \mathbb{D} \subset \mathbb{C};$$

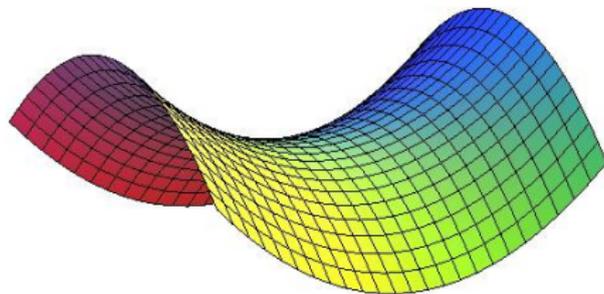
▶ $\Re z \circ \varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est harmonique,

▶ donc n'a un max local que si c'est localement constant.

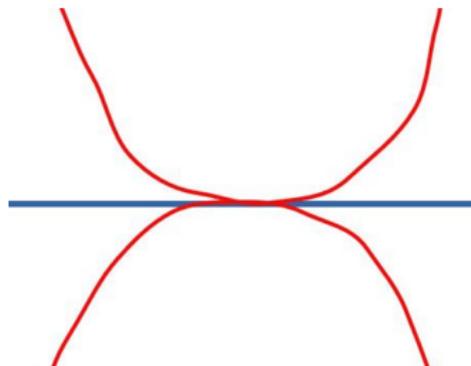
▶ Donc $z|_C$ est constante.

▶ Par prolongement analytique, C est une droite complexe (infinie).

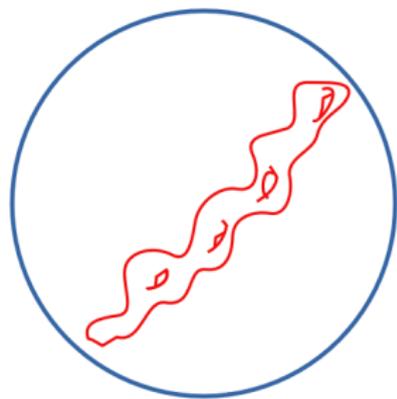
Fait 2 : Les courbes complexes sont des surfaces minimales.
En particulier, dans \mathbb{C}^2 elles ont une courbure moyenne nulle.



Conséquence des Faits 1 & 2 : Une courbe C très courbée d'un côté d'un hyperplan réel est très courbée de l'autre côté.

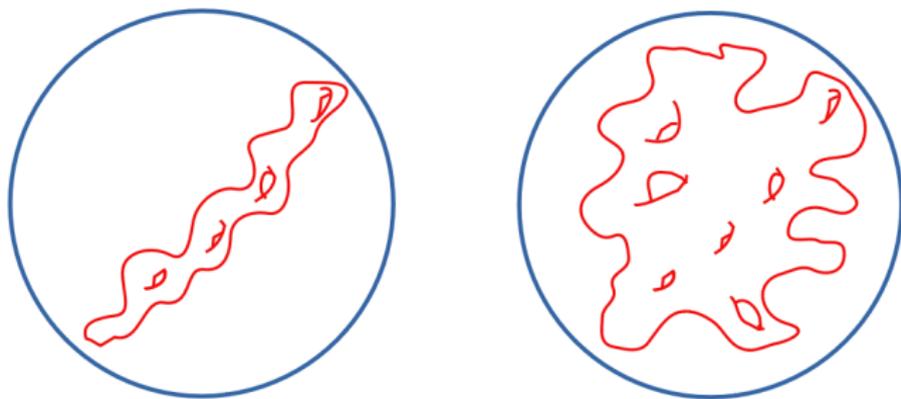


Mêmes topologie et volume, mais une géométrie différente



$$Z(X_0^d + \epsilon Q)$$

Mêmes topologie et volume, mais une géométrie différente



$$Z(X_0^d + \epsilon Q) \text{ et } Z(X_0^{d/n} \cdots X_n^{d/n} + \epsilon Q)$$

Une courbe complexe dans une boule



Une courbe complexe dans une boule



Combien de composantes connexes ? Quel genre ?

Une courbe complexe dans une boule



Combien de composantes connexes ? Quel genre ?

Théorème (Milnor 1963). Si $U \subset \mathbb{C}P^2$ est un ouvert défini par des polynômes, alors il existe C_U telle que

$$(\# \text{c.c.} + \text{genre}) Z(P) \cap U \leq C_U d^4.$$

Rappel : genre $(Z(P)) \sim \frac{1}{2}d^2$.

Partie II

Courbes aléatoires



Si P est choisi au hasard, que peut-on dire de $Z(P)$?

Si P est choisi au hasard, que peut-on dire de $Z(P)$?

Théorème (B. Shiffman-S. Zelditch 1998) Soit φ une 2-forme sur $\mathbb{C}P^2$. Alors



$$\mathbb{E} \frac{1}{d} \int_{Z(P)} \varphi \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}P^2} \varphi \wedge \omega_{FS}.$$

Si P est choisi au hasard, que peut-on dire de $Z(P)$?

Théorème (B. Shiffman-S. Zelditch 1998) Soit φ une 2-forme sur $\mathbb{C}P^2$. Alors



$$\mathbb{E} \frac{1}{d} \int_{Z(P)} \varphi \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}P^2} \varphi \wedge \omega_{FS}.$$

- ▶ De plus, une suite $(Z(P_d))_d$ aléatoire s'équidistribue presque sûrement.

Si P est choisi au hasard, que peut-on dire de $Z(P)$?

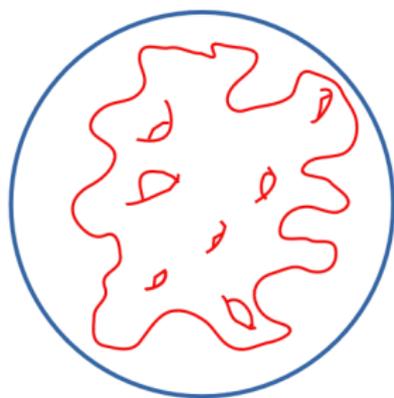
Théorème (B. Shiffman-S. Zelditch 1998) Soit φ une 2-forme sur $\mathbb{C}P^2$. Alors



$$\mathbb{E} \frac{1}{d} \int_{Z(P)} \varphi \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}P^2} \varphi \wedge \omega_{FS}.$$

- ▶ De plus, une suite $(Z(P_d))_d$ aléatoire s'équidistribue presque sûrement.
- ▶ Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}P^2$,

$$\forall d \gg 1, \mathbb{P}\{Z(P) \cap U = \emptyset\} \leq \exp(-\alpha d^2).$$



Une courbe complexe aléatoire typique de grand degré d

Quelle mesure ?

- ▶ la mesure est celle de Fubini-Study :

Quelle mesure ?

- ▶ la mesure est celle de Fubini-Study :

$$P = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} \frac{Z_0^{i_0} \dots Z_n^{i_n}}{\sqrt{i_0! \dots i_n!}},$$

où $\Re a_{i_0 \dots i_n}, \Im a_{i_0 \dots i_n}$ sont des variables normales standard indépendantes.

Quelle mesure ?

- ▶ la mesure est celle de Fubini-Study :

$$P = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} \frac{Z_0^{i_0} \dots Z_n^{i_n}}{\sqrt{i_0! \dots i_n!}},$$

où $\Re a_{i_0 \dots i_n}, \Im a_{i_0 \dots i_n}$ sont des variables normales standard indépendantes.

- ▶ C'est la mesure gaussienne associée au produit L^2 de Fubini-Study :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{C}P^2} \frac{P(Z)\overline{Q(Z)}}{\|Z\|^{2d}} d\text{vol}.$$

Quelle mesure ?

- ▶ la mesure est celle de Fubini-Study :

$$P = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} \frac{Z_0^{i_0} \dots Z_n^{i_n}}{\sqrt{i_0! \dots i_n!}},$$

où $\Re a_{i_0 \dots i_n}, \Im a_{i_0 \dots i_n}$ sont des variables normales standard indépendantes.

- ▶ C'est la mesure gaussienne associée au produit L^2 de Fubini-Study :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{C}P^2} \frac{P(Z)\overline{Q(Z)}}{\|Z\|^{2d}} dvol.$$

- ▶ C'est la seule mesure invariante sous l'action des symétries de $\mathbb{C}P^n$.

Topologie des courbes *réelles* aléatoires

1. **Kac, Rice 1943** : si $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$, avec les a_i des lois standard indépendantes, alors

Topologie des courbes *réelles* aléatoires

1. **Kac, Rice 1943** : si $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$, avec les a_i des lois standard indépendantes, alors

$$\mathbb{E}\#(Z(P)) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln d.$$

Topologie des courbes *réelles* aléatoires

1. **Kac, Rice 1943** : si $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$, avec les a_i des lois standard indépendantes, alors

$$\mathbb{E}\#(Z(P)) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln d.$$

2. **Schub-Smale, Kostlan 1993** : Si P est Fubini-Study, alors pour tout intervalle $U \subset \mathbb{R}P^1$,

Topologie des courbes *réelles* aléatoires

1. **Kac, Rice 1943** : si $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$, avec les a_i des lois standard indépendantes, alors

$$\mathbb{E}\#(Z(P)) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln d.$$

2. **Schub-Smale, Kostlan 1993** : Si P est Fubini-Study, alors pour tout intervalle $U \subset \mathbb{R}P^1$,

$$\mathbb{E}\#(Z(P) \cap U) = \sqrt{d} \frac{\text{Long}(U)}{\text{Long } \mathbb{R}P^1}.$$

Topologie des courbes *réelles* aléatoires

1. **Kac, Rice 1943** : si $p(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$, avec les a_i des lois standard indépendantes, alors

$$\mathbb{E}\#(Z(P)) \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln d.$$

2. **Schub-Smale, Kostlan 1993** : Si P est Fubini-Study, alors pour tout intervalle $U \subset \mathbb{R}P^1$,

$$\mathbb{E}\#(Z(P) \cap U) = \sqrt{d} \frac{\text{Long}(U)}{\text{Long } \mathbb{R}P^1}.$$

3. **G.-Welschinger 2015** : Si P est Fubini-Study,

$$\mathbb{E} \begin{cases} \#(Z(P) \cap U) \\ \text{genre}(Z(P) \cap U) \end{cases} \asymp \text{Vol}(U) \sqrt{d}^n$$

Topologie des courbes *complexes* aléatoires

Théorème (G. 2022) Soit $U \subset \mathbb{C}P^2$ un ouvert avec un bord lisse. Alors,

$$\mathbb{E} [\#c. c(Z(P) \cap U)] \underset{d \rightarrow \infty}{=} o(d^2)$$

$$\mathbb{E} [\text{genre} (Z(P) \cap U)] \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} d^2 \frac{\text{vol}(U)}{\text{vol}(\mathbb{C}P^2)}.$$

Deux différences

1. \sqrt{d}^n en réel et d^n en complexe

Deux différences

1. \sqrt{d}^n en réel et d^n en complexe
2. Les ordres de croissance de $\#$ c.c et du genre : identiques en réel, différents en complexe.

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- Si pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{X_i}{X_0}$, alors

$$\sqrt{d}! \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- Si pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{X_i}{X_0}$, alors

$$\sqrt{d}! \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

Donc $P\left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right)$ devient indépendant de d .

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- ▶ Si pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{X_i}{X_0}$, alors

$$\sqrt{d}! \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

Donc $P(\frac{x}{\sqrt{d}})$ devient indépendant de d .

- ▶ Donc la géométrie de $Z(P)$ à l'échelle $1/\sqrt{d}$ devient indépendante de d , en particulier sa topologie y est bornée.

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- ▶ Si pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{X_i}{X_0}$, alors

$$\sqrt{d}! \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

Donc $P(\frac{x}{\sqrt{d}})$ devient indépendant de d .

- ▶ Donc la géométrie de $Z(P)$ à l'échelle $1/\sqrt{d}$ devient indépendante de d , en particulier sa topologie y est bornée.
- ▶ Le volume de $B(0, 1/\sqrt{d})$ est en $(1/\sqrt{d})^n$ dans $\mathbb{R}P^n$, d'où \sqrt{d}^n boules en réel.

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- ▶ Si pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{X_i}{X_0}$, alors

$$\sqrt{d}! \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

Donc $P(\frac{x}{\sqrt{d}})$ devient indépendant de d .

- ▶ Donc la géométrie de $Z(P)$ à l'échelle $1/\sqrt{d}$ devient indépendante de d , en particulier sa topologie y est bornée.
- ▶ Le volume de $B(0, 1/\sqrt{d})$ est en $(1/\sqrt{d})^n$ dans $\mathbb{R}P^n$, d'où \sqrt{d}^n boules en réel.
- ▶ Le volume de $B(0, 1/\sqrt{d})$ est en $(1/\sqrt{d})^{2n}$ dans $\mathbb{C}P^n$, d'où d^n boules en complexe

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- Pour le volume de $Z(P)$: Le volume de $Z(P) \cap B(0, 1/\sqrt{d})$ est environ $(1/\sqrt{d})^{(n-1)}$ en réel,

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- Pour le volume de $Z(P)$: Le volume de $Z(P) \cap B(0, 1/\sqrt{d})$ est environ $(1/\sqrt{d})^{(n-1)}$ en réel, donc au total un volume de \sqrt{d} ; en complexe, le volume devient d .

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- ▶ Pour le volume de $Z(P)$: Le volume de $Z(P) \cap B(0, 1/\sqrt{d})$ est environ $(1/\sqrt{d})^{(n-1)}$ en réel, donc au total un volume de \sqrt{d} ; en complexe, le volume devient d .
- ▶ Si la topologie était additive, on aurait \sqrt{d}^n composantes connexes (resp. genre) en réel et d^n en complexe.

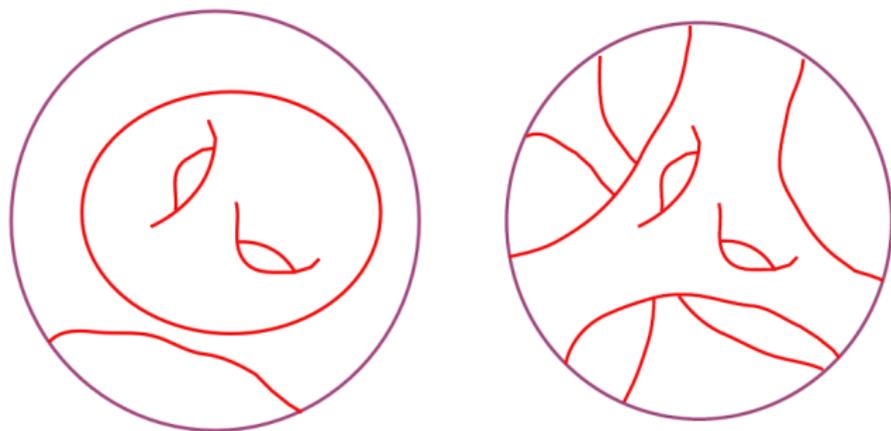
Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- ▶ Pour le volume de $Z(P)$: Le volume de $Z(P) \cap B(0, 1/\sqrt{d})$ est environ $(1/\sqrt{d})^{(n-1)}$ en réel, donc au total un volume de \sqrt{d} ; en complexe, le volume devient d .
- ▶ Si la topologie était additive, on aurait \sqrt{d}^n composantes connexes (resp. genre) en réel et d^n en complexe.
- ▶ C'est vrai en réel mais faux en complexe.

Différence 1 : d^n versus \sqrt{d}^n ?

- ▶ Pour le volume de $Z(P)$: Le volume de $Z(P) \cap B(0, 1/\sqrt{d})$ est environ $(1/\sqrt{d})^{(n-1)}$ en réel, donc au total un volume de \sqrt{d} ; en complexe, le volume devient d .
- ▶ Si la topologie était additive, on aurait \sqrt{d}^n composantes connexes (resp. genre) en réel et d^n en complexe.
- ▶ C'est vrai en réel mais faux en complexe.
- ▶ C'est vrai pour la caractéristique d'Euler qui est additive.

Différence 2. Nombre de composantes versus genre



Réel versus complexe

Comment démontrer cette différence de croissance en complexe ?



Théorème (Milnor 1963). Si $U \subset \mathbb{C}P^2$ est un ouvert défini par des polynômes, alors il existe C_U telle que

$$(\# \text{c.c.} + \text{genre}) Z(P) \cap U \leq C_U d^4.$$

Démonstration du théorème de Milnor

Supposons que $U = \mathbb{B}^4 \subset \mathbb{C}^2$ et que

$$P(x) = x_4 - Q(x_1, \dots, x_3).$$

Démonstration du théorème de Milnor

Supposons que $U = \mathbb{B}^4 \subset \mathbb{C}^2$ et que

$$P(x) = x_4 - Q(x_1, \dots, x_3).$$

Alors

$$T_x Z(P) = \text{vect} (\partial_{x_i} + (\partial_{x_i} Q) \partial_{x_4})_{1 \leq i \leq 3}.$$

Démonstration du théorème de Milnor

Supposons que $U = \mathbb{B}^4 \subset \mathbb{C}^2$ et que

$$P(x) = x_4 - Q(x_1, \dots, x_3).$$

Alors

$$T_x Z(P) = \text{vect} (\partial_{x_i} + (\partial_{x_i} Q) \partial_{x_4})_{1 \leq i \leq 3}.$$

Soit

$$f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2.$$

Alors

$$\# \text{ c.c. } (Z(P)) \leq \# \text{crit}(f|_{Z(P)}).$$

Démonstration du théorème de Milnor

Supposons que $U = \mathbb{B}^4 \subset \mathbb{C}^2$ et que

$$P(x) = x_4 - Q(x_1, \dots, x_3).$$

Alors

$$T_x Z(P) = \text{vect} (\partial_{x_i} + (\partial_{x_i} Q) \partial_{x_4})_{1 \leq i \leq 3}.$$

Soit

$$f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2.$$

Alors

$$\# \text{ c.c. } (Z(P)) \leq \# \text{crit}(f|_{Z(P)}).$$

Or

$$x \in \text{crit}(f|_{Z(P)}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \leq 3, \langle \nabla \|x\|^2, \partial_{x_i} + \partial_i Q \partial_{x_4} \rangle = 0. \\ x_4 = Q(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Démonstration du théorème de Milnor

On a donc 4 équations algébriques dans \mathbb{R}^4 .

Démonstration du théorème de Milnor

On a donc 4 équations algébriques dans \mathbb{R}^4 . Par une généralisation du théorème de Bézout (**van der Waerden 1949**), il y a au plus $(\deg(Q) - 1)^3$ solutions.

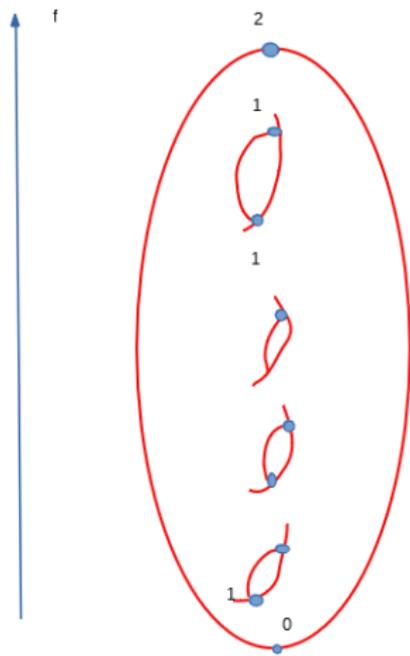
Démonstration du théorème de Milnor

On a donc 4 équations algébriques dans \mathbb{R}^4 . Par une généralisation du théorème de Bézout (**van der Waerden 1949**), il y a au plus $(\deg(Q) - 1)^3$ solutions. Donc

$$\#c.c.(Z(P)) \leq d^3.$$

Démonstration du théorème de Milnor

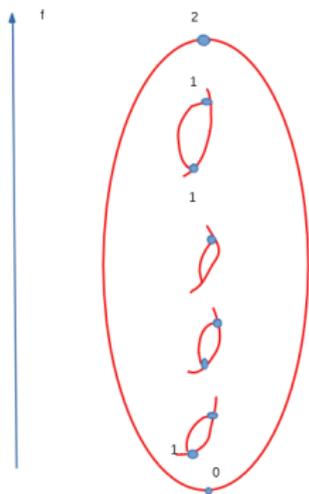
Et pour le genre ?



Inégalité faible de Morse :

$$2 \text{ genre} \leq \#\text{Crit}_1.$$

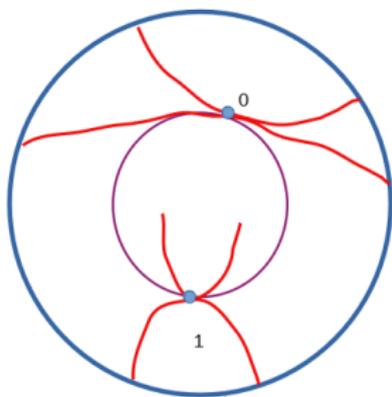
La majoration de tout à l'heure vaut également pour $\#\text{Crit}_1$, d'où la majoration du genre par d^4 . \square



Inégalité forte de Morse :

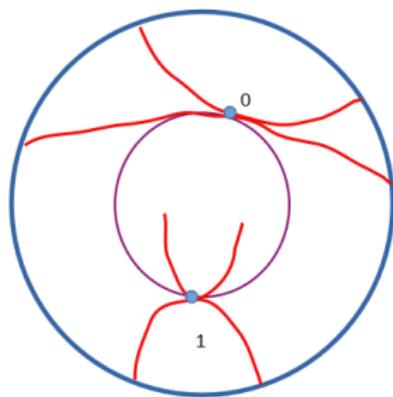
$$2 \text{ genre} \geq \#\text{Crit}_1 - \#\text{Crit}_0 - \#\text{Crit}_2.$$

Retour aux courbes complexes



Pas de max local (indice 2) et
les points selles sont favorisés par rapport aux minima.

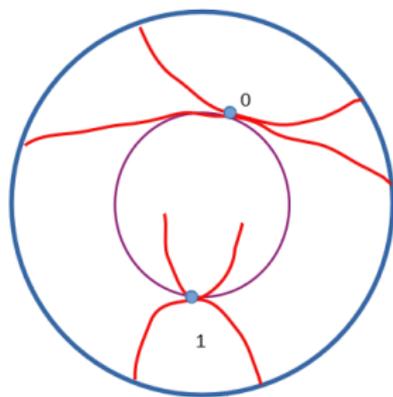
Retour aux courbes complexes



Pas de max local (indice 2) et
les points selles sont favorisés par rapport aux minima.

$$\text{Morse : } \begin{cases} \#c.c. & \leq \#\text{Crit}_0 \\ 2 \text{ genre} & \geq \#\text{Crit}_1 - \#\text{Crit}_0 \end{cases}$$

Retour aux courbes complexes

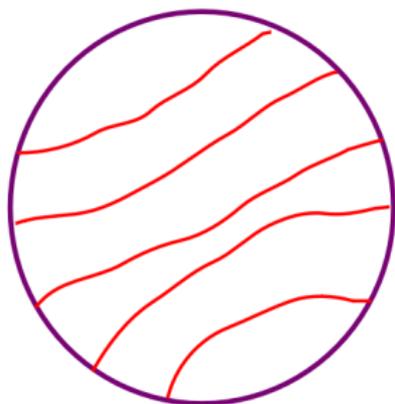


Pas de max local (indice 2) et
les points selles sont favorisés par rapport aux minima.

$$\text{Morse : } \begin{cases} \#c.c. & \leq \#\text{Crit}_0 \\ 2 \text{ genre} & \geq \#\text{Crit}_1 - \#\text{Crit}_0 \end{cases}$$

Donc pour P complexe, le genre est favorisé par rapport au nombre de composantes.

Favorisé de combien ?



Pas toujours favorisé!

Favorisé de combien, *statistiquement*?

Favorisé de combien, *statistiquement*?

Théorème Soit $U \subset \mathbb{C}P^2$ un ouvert avec un bord lisse. Alors,

$$\mathbb{E} [\#c. c(Z(P) \cap U)] \underset{d \rightarrow \infty}{=} o(d^2)$$

$$\mathbb{E} [\text{genre} (Z(P) \cap U)] \underset{d \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} d^2 \frac{\text{vol}(U)}{\text{vol}(\mathbb{C}P^2)}.$$

Démonstration du théorème

$$\sqrt{d!} \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots .$$

Démonstration du théorème

$$\sqrt{d!} \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

► Donc

$$d^2 P = d \sum_{i,j} a_{ij} dx_i \otimes dx_j + \dots$$

Démonstration du théorème

$$\sqrt{d!} \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

► Donc

$$d^2 P = d \sum_{i,j} a_{ij} dx_i \otimes dx_j + \dots$$

► Donc la courbure de $Z(P)$ est d'ordre d .

Démonstration du théorème

$$\sqrt{d!} \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots$$

► Donc

$$d^2 P = d \sum_{i,j} a_{ij} dx_i \otimes dx_j + \dots$$

► Donc la courbure de $Z(P)$ est d'ordre d .

► Or les points critiques de grande courbure sont d'indice 1.

Démonstration du théorème

$$\sqrt{d!} \frac{P(X)}{X_0^d} = a_0 + \sqrt{d} \sum_{i=1}^n a_i x_i + d \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \dots .$$

► Donc

$$d^2 P = d \sum_{i,j} a_{ij} dx_i \otimes dx_j + \dots$$

► Donc la courbure de $Z(P)$ est d'ordre d .

► Or les points critiques de grande courbure sont d'indice 1.

► Donc le rapport $\frac{\#\text{Crit}_0(f|_{Z(P)})}{\#\text{Crit}_1(f|_{Z(P)})}$ est de plus en plus petit, statistiquement. \square

Concrètement, comment calculer $\mathbb{E}\text{Crit}(f|_{Z(P)})$?

Partie III

la formule de Kac-Rice

Formule de Kac-Rice

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aléatoire. Alors

$$\mathbb{E} \# Z(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(|f'(x)| \mid f(x) = 0) \phi_{f(x)}(0) dx.$$

Formule de Kac-Rice

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aléatoire. Alors

$$\mathbb{E}\#Z(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(|f'(x)| \mid f(x) = 0) \phi_{f(x)}(0) dx.$$

”Proof”.

► Si f s’annule transversalement sur I ,

$$\#Z(f) \cap I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |f'(x)| \mathbf{1}_{|f| \leq \epsilon} dx,$$

Formule de Kac-Rice

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aléatoire. Alors

$$\mathbb{E} \# Z(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(|f'(x)| \mid f(x) = 0) \phi_{f(x)}(0) dx.$$

”Proof”.

► Si f s’annule transversalement sur I ,

$$\# Z(f) \cap I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |f'(x)| \mathbf{1}_{|f| \leq \epsilon} dx,$$

► donc

$$\mathbb{E} \# Z(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left(|f'(x)| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{1}_{|f| \leq \epsilon} \right) dx.$$

□

Une sympathique formule

$$\mathbb{E}\# (\text{Crit}_i(p|_{Z(P)}) \cap U)$$

est égal à (G.-Welschinger 2015, G. 2022)

Une sympathique formule

$$\mathbb{E} \# (\text{Crit}_i(p|_{Z(P)}) \cap U)$$

est égal à (G.-Welschinger 2015, G. 2022)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x \in U} \int_{\substack{\alpha \in \mathcal{L}_{onto}(T_x M, E_x) \\ \ker \alpha \subset \ker dp(x)}} \left| \det \alpha|_{\ker^\perp \alpha} \right| \\
 &\quad \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\text{Ind}(\nabla^2 p|_{Z(P)})=i\}} \left| \det \left(\langle \nabla^2 P(x)|_{\ker \alpha}, \epsilon(x, \alpha) \rangle \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - \langle \alpha(\nabla p(x)), \epsilon(x, \alpha) \rangle \frac{\nabla^2 p(x)|_{\ker \alpha}}{\|dp(x)\|^2} \right) \right| \mid P(x) = 0, \nabla P(x) = \alpha \right] \\
 &\quad \rho_{X(x)}(0, \alpha) d\text{vol}(\alpha) d\text{vol}(x),
 \end{aligned}$$

Conclusion

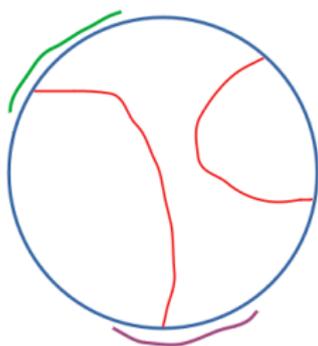
- ▶ Pour $n = 2$, le terme de Kac-Rice dominant est celui pour $i = 1$.

Conclusion

- ▶ Pour $n = 2$, le terme de Kac-Rice dominant est celui pour $i = 1$.
- ▶ Ce terme peut être estimé quand $d \rightarrow \infty$.
- ▶ Par la théorie de Morse, cela donne l'estimée

$$\mathbb{E} \text{ genre}(Z(P)) \sim \frac{1}{2} d^2 \frac{\text{vol}(U)}{\text{vol}(\mathbb{C}P^2)}.$$

Bonus : percolation holomorphe

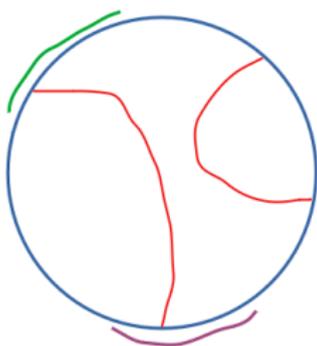


Soit P comme précédemment, $U \subset \mathbb{C}P^2$ une boule, $V \subset \partial U$ and $W \subset \partial U$ deux ouverts de la sphère d'adhérence disjointe.

Conjecture. Il existe $c > 0$, tel que pour tout d assez grand,

$$\mathbb{P}(\exists \text{ une c. c. de } Z(P) \cap U \text{ intersectant } V \text{ et } W) > c.$$

Bonus : percolation holomorphe



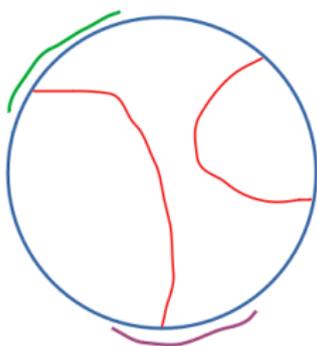
Soit P comme précédemment, $U \subset \mathbb{C}P^2$ une boule, $V \subset \partial U$ and $W \subset \partial U$ deux ouverts de la sphère d'adhérence disjointe.

Conjecture. Il existe $c > 0$, tel que pour tout d assez grand,

$$\mathbb{P}(\exists \text{ une c. c. de } Z(P) \cap U \text{ intersectant } V \text{ et } W) > c.$$

- Démontré en **réel** dans \mathbb{R}^2 by G.-Beffara

Bonus : percolation holomorphe



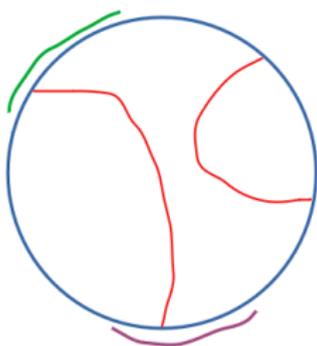
Soit P comme précédemment, $U \subset \mathbb{C}P^2$ une boule, $V \subset \partial U$ and $W \subset \partial U$ deux ouverts de la sphère d'adhérence disjointe.

Conjecture. Il existe $c > 0$, tel que pour tout d assez grand,

$$\mathbb{P}(\exists \text{ une c. c. de } Z(P) \cap U \text{ intersectant } V \text{ et } W) > c.$$

- ▶ Démontré en **réel** dans \mathbb{R}^2 by G.-Beffara
- ▶ et dans $\mathbb{R}P^2$ by Belyaev-Muirhead-Wigman.

Bonus : percolation holomorphe



Soit P comme précédemment, $U \subset \mathbb{C}P^2$ une boule, $V \subset \partial U$ and $W \subset \partial U$ deux ouverts de la sphère d'adhérence disjointe.

Conjecture. Il existe $c > 0$, tel que pour tout d assez grand,

$$\mathbb{P}(\exists \text{ une c. c. de } Z(P) \cap U \text{ intersectant } V \text{ et } W) > c.$$

- ▶ Démontré en **réel** dans \mathbb{R}^2 by G.-Beffara
- ▶ et dans $\mathbb{R}P^2$ by Belyaev-Muirhead-Wigman.