Université Joseph Fourier - L1 - Math 123 2015-2016

Examen session 2

Juin 2016 - 2 heures

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Les exercices et problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Question de cours.

1. Soit $a < b < c$ des nombres réels et $f :]a, c[\to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition d'une fonction négligeable par rapport à f en b.
2. Donner un exemple d'une fonction non nulle $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ négligeable par rapport à la fonction $f(x) = x$ en 0.
3. Existe-t-il un exemple de fonction $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ négligeable par rapport à la fonction $f(x) = x$ telle que $\lim_{x \to 0} g$ soit non nulle ?

Exercice 1.

1. Donner un DL à l'ordre 4 de $\frac{1}{1+x}$ en 0.
2. En déduire un DL à l'ordre 4 de $\arctan(x)$ en 0.
3. Donner un DL à l'ordre 4 de $\cos(x^2)$ en 0.
4. En déduire
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \arctan(x) - x^2}{\cos(x^2) - 1}.$$

Exercice 2.

1. Montrer que l'équation $\sinh(x) = x$ n'a que la solution $x = 0$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2e^x + a$. Donner le nombre de solutions dans l'intervalle $]0, 1[$ de l'équation $f(x) = 0$ en fonction de a.

Problème. Soit $\tilde{f} :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x(1 - \ln x) & \text{si } x > 0. \\ \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $\tilde{f}$ est continue sur son domaine de définition.

2. Etendre $\tilde{f}$ par continuité en une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Le fonction f est-elle dérivable en $x = 0$?
4. Dresser le tableau des variations de f sur $[0, +\infty]$.
5. Montrer que $f([0, e]) \subset [0, e]$.
6. Trouver les points fixes de f sur $[0, e]$.

   On considère maintenant la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, e]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.
7. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in [0, 1]$.
8. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in [1, e]$.