Université Joseph Fourier - L1 - Math 203 2016-2017

Examen session 1

9 mai 2017 - 2 heures

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un exemple ou un contre-exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Les exercices ainsi que le problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Rappel. Par définition, $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $a^b = \exp(b \ln a)$.

Question de cours.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et C^∞, mais qui ne vérifie pas ce théorème.

Exercice 1. Soit g une fonction C^1 sur $[0,1]$, $a \neq g(0)$ et f définie par $f(0) = a$ et $\forall x \in]0,1], f(x) = g(x)$.

1. Montrer que f est C^1 sur $]0,1]$, et que f' est bornée sur $]0,1]$. f est-elle dérivable à droite en 0 ?
2. Pour tout $x \in]0,1]$, soit
$$\tau(x) = \frac{f(x) - a}{x}.$$
Montrer que
$$\lim_{x \to 0^+} |\tau(x)| = +\infty.$$
3. Montrer que f ne vérifie pas le théorème des accroissements finis. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser les deux questions précédentes.

Exercice 2. Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ non bornée et possédant deux valeurs d'adhérence (finies) distinctes. On rappelle que $L \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ s'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $(u_{\phi(n)})_n$ converge vers L.

Exercice 3.

1. Donner un développement limité de $x \ln(1 + x^6)$ à l'ordre 13 en 0.
2. Donner un développement limité de $(1 + x^5)^{-1}$ à l'ordre 13 en 0.

3. En déduire
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\ln(1+x^6)}{1+x^5} - x^7 + x^{12}}{x^{13}}.$$

Problème. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{x}{2}}$.

1. Montrer que f a une limite à droite en 0. Que vaut $f(0^+)$?
   Dorénavant f désigne la fonction sur $\mathbb{R}_+$ ainsi étendue par continuité.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$. Que peut-on dire de $f'(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives ?
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Donner le tableau de signe de $x \mapsto (\frac{x}{2} - 1)\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Quels sont les points fixes de f ?
5. Donner l'allure du graphe de f, en particulier sa position par rapport à la droite $\{y = x\}$.
6. Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$.
7. Montrer que $f([1,2]) = [1,2]$ et $f([2,+\infty[) = [2,+\infty[$.
   Soit $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.
8. Si $u_0 \leq 2$, montrer que $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.
9. Si $u_0 > 2$, montrer que $(u_n)_n$ n'est pas bornée.
10. Soit $u > 2$. Montrer qu'il existe $k_u > 1$, telle que
$$\forall x \geq u,\ f(x) \geq x^{k_u}.$$
11. En déduire que si $u_0 > 2$, il existe $k > 1$,
$$\forall n \geq 0, u_n \geq u_0^{k^n}.$$
    Retrouver le résultat de la question 9.