Examen session 1

9 mai 2017 - 2 heures

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un exemple ou un contre-exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Les exercices ainsi que le problème sont indépendants. *Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez.*

Aucun document ni outil éléctronique autorisés.

Rappel. Par définition, $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $a^b = \exp(b \ln a)$.

Question de cours.

1. **Énoncer le théorème des accroissements finis.**
2. **Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et C^∞, mais qui ne vérifie pas ce théorème.** Soit f définie par $\forall x \neq 0$, $f(x) = |x|$. Puisque $\forall x > 0$, $f(x) = x$, f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de même f est lisse sur $\mathbb{R}_-^*$ car $f(x) = -x$ sur cet intervalle, donc f et lisse sur $\mathbb{R}^*$. Les dérivées de f valent ± 1, mais le taux d'accroissement entre -1 et 1 est nul, donc n'est pas égal à la dérivée d'un point entre -1 et 1.

Exercice 1. Soit g une fonction C^1 sur $[0, 1]$, $a \neq g(0)$ et f définie par $f(0) = a$ et $\forall x \in]0, 1], f(x) = g(x)$.

1. **Montrer que f est C^1 sur $]0, 1]$, et que f' est bornée sur $]0, 1]$. f est-elle dérivable à droite en 0 ?** $f = g$ sur $]0, 1]$ donc y est C^1. g' est continue sur $[0, 1]$ donc est bornée, donc a fortiori g' est bornée sur $]0, 1]$, donc f' aussi. f n'est pas dérivable en 0 car elle n'y est pas continue. En effet, f admet une limite à droite qui est $g(0) \neq a = f(0)$.
2. **Pour tout $x \in]0, 1]$, soit**
$$\tau(x) = \frac{f(x) - a}{x}.$$
Montrer que
$$\lim_{x \to 0^+} |\tau(x)| = +\infty.$$
On a $|f(x) - a| \to_{0^+} |g(0) - a| > 0$, et $x \to_{0^+} 0^+$, donc par les règles du cours $|\tau| \to_{0^+} +\infty$.
3. **Montrer que f ne vérifie pas le théorème des accroissements finis. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser les deux questions précédentes.** Si f satisfait le TAF, pour tout $x \in]0, 1]$, il existe $c \in]0, x[$, tel que $f'(c) = \tau(x)$,

car τ est le taux d'accroissement de f entre 0 et x. Mais τ n'est pas bornée alors que f' l'est, ce qui forme une contradiction.

Exercice 2. Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ non bornée et possédant deux valeurs d'adhérence (finies) distinctes. On rappelle que $L \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ s'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $(u_{\phi(n)})_n$ converge vers L. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{3n} = n$, $u_{3n+1} = 1$ et $u_{3n+2} = 0$. La sous-suite $(u_{3n})_n$ n'est pas bornée, donc $(u_n)_n$ ne l'est pas non plus, et $(u_{3n+1})_n$ est une sous-suite convergeant vers 1 tandis que $(u_{3n+2})_n$ est une sous-suite convergeant vers 0.

Exercice 3.

1. **Donner un développement limité de $x\ln(1+x^6)$ à l'ordre 13 en 0.** Puisque $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$, on a $x\ln(1+x^6) = x(x^6 - x^{12}/2 + o(x^{12})) = x^7 - x^{13}/2 + o(x^{13})$.
2. **Donner un développement limité de $(1+x^5)^{-1}$ à l'ordre 13 en 0.** On a $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$ donc $(1+x^5)^{-1} = 1 - x^5 + x^{10} - x^{15} + o(x^{15}) = 1 - x^5 + x^{10} + o(x^{13})$.
3. **En déduire**
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\ln(1+x^6)}{1+x^5} - x^7 + x^{12}}{x^{13}}.$$
 On a
$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x^6)}{1+x^5} &= (x^7 - x^{13}/2 + o(x^{13}))(1 - x^5 + x^{10} + o(x^{13}))\\ &= x^7 - x^{12} - x^{13}/2 + o(x^{13})\end{aligned}$$
 donc la fraction vaut
$$\frac{-x^{13}/2 + o(x^{13})}{x^{13}} = -1/2 + o(1) \to_{x\to 0} -1/2.$$

Problème. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{x}{2}}$.

1. **Montrer que f a une limite à droite en 0. Que vaut $f(0^+)$?** On a $f(x) = \exp(\frac{1}{2}x\ln x)$, et par le cours $x\ln x \to_{0^+} = 0$. Comme exp est C^0 en 0, on a $f \to_{0^+} \exp(0/2) = 1$.
 Dorénavant f désigne la fonction sur $\mathbb{R}_+$ ainsi étendue par continuité.
2. **Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$. Que peut-on dire de $f'(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives ?** x, $\ln x$ et exp sont des fonctions C^1, donc par produit puis par composition, f est C^1. On a $f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x + 1)f$. $f' \to_{0^+} -\infty$.
3. **Dresser le tableau de variations de f.** On constate que $f' \leq 0$ sur $]0, 1/e]$ et $f' > 0$ pour $x > 1/e$, donc f est décroissante sur $[0, 1/e]$ et strictement croissante sur $]1/e, \infty[$. De plus $f(1/e) = 1/(e^{\frac{1}{2e}})$ (qui est $> 1/e$).

4. **Donner le tableau de signe de $x \mapsto (\frac{x}{2} - 1) \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.** C'est positif ssi $x \in]0,1] \cup [2, \infty[$. **En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Quels sont les points fixes de f ?** On a $\forall x > 0, f(x) - x = x(f(x)/x - 1) = x(\exp((x/2-1)\ln x) - 1)$. Comme exp est strictement croissante et que $\exp(0) = 1$, c'est du signe de $(x/2-1)\ln x$, et c'est nul ssi ce dernier s'annule, soit $x = 1$ et $x = 2$, qui sont donc les deux points fixes sur $\mathbb{R}_+^*$. $f(0) = 1$ donc 0 n'est pas un point fixe.
5. **Donner l'allure du graphe de f, en particulier sa position par rapport à la droite $\{y = x\}$.** Dessin (tangente verticale en 0). Le graphe est au-dessus de la bissectrice ssi $x \in [0,1] \cup [2, +\infty[$.
6. **Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$.** comme $x \ln x < 0$ pour $x \in]0,1]$, on a $0 < \exp(\frac{1}{2} x \ln x) < 1$, donc $f(]0,1]) \subset]0,1]$. De plus $f(0) = 1 \in [0,1]$, d'où le résultat.
7. **Montrer que $f([1,2]) = [1,2]$ et $f([2,+\infty[) = [2,+\infty[$.** f est strictement croissante sur ces intervalles, et f continue. Par le théroème de la bijection, $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [1,2]$ et $f([2,\infty]) = [f(2), \lim_{+\infty} f[$. Or, $x \ln x \to_{+\infty} +\infty$ et $\exp \to_{+\infty} +\infty$, donc par composition $f \to_{+\infty} +\infty$, donc $f([2,\infty]) = [2, \infty[$.

   Soit $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.
8. **Si $u_0 \leq 2$, montrer que $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.** Si $u_0 \leq 1$, comme $f([0,1] \subset [0,1]$, $(u_n)_n$ est à valeurs dans $[0,1]$ et comme $f(x) \geq x$ sur $[0,1]$, la suite est croissante. Elle est donc bornée, et comme elle est croissante elle converge vers un point fixe qui ne peut être que 1. Si $u_0 \in]1,2[$, comme $f([1,2]) = [1,2]$, $(u_n)_n$ reste dans cet intervalle et puisque $f(x) \leq x$ sur cet intervalle, la suite est décroissante, donc converge vers un point fixe qui est 1 ou 2. Mais en réalité $u_n \in [1, u_0]$ donc la limite est dans $[1, u_0]$, donc la limite ne peut être 2, donc c'est 1. Si $u_0 = 2$, la suite est stationnaire.
9. **Si $u_0 > 2$, montrer que $(u_n)_n$ n'est pas bornée.**Puisque $f([2,\infty[) = [2,\infty[$, $(u_n)_n$ reste dans cet intervalle, et puisque $f(x) \geq x$ sur cet intervalle, u_n est croissante, donc tend vers $+\infty$ ou converge vers un point fixe $L \geq u_0 > 2$ ce qui est impossible. Donc $(u_n)_n$ n'est pas bornée.
10. **Soit $u > 2$. Montrer qu'il existe $k_u > 1$, telle que**
$$\forall x \geq u,\ f(x) \geq x^{k_u}.$$
    On a $x/2 \geq u/2$ donc $\frac{x}{2} \ln x \geq \frac{u}{2} \ln x$ car $\ln x \geq 0$ pour $x > 1$. Comme exp est croissante, on a $f(x) = \exp(\frac{x}{2} \ln x) \geq \exp(u/2 \ln x) = x^{u/2}$. On prend $k_u = u/2 > 1$.
11. **En déduire que si $u_0 > 2$, il existe $k > 1$,**
$$\forall n \geq 0, u_n \geq u_0^{k^n}.$$
    Retrouver le résultat de la question 9. Par la question précédente, $\forall x \geq u_0$, $f(x) \geq x^{k_{u_0}}$ avec $k := k_{u_0} > 1$. La suite $(u_n)_n$ est croissante, donc $u_n \geq u_0$. L'hypothèse est vraie pour $n = 0$, car alors $k^0 = 1$. Supposons que c'est vrai pour $n \geq 0$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n^k$. Par hypothèse de récurrence on a $u_n \geq u_0^{k^n} > 1$. Le passage à une puissance $k > 1$ préserve donc l'inégalité, si bien que $u_n^k \geq (u_0^{k^n})^k = u_0^{kk^n} = u_0^{k^{n+1}}$.