Université Grenoble Alpes - L1 - Math 203 2017-2018

Examen session 1 - 2h00 - mai 2018

Les exercices et le problème sont indépendants. Aucun document ni instrument autorisés.

On admettra dans tout le sujet que $2 < e < 3$.

Question de cours.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner la définition de f continue en $a \in \mathbb{R}$ (avec des quantificateurs). Montrer sans utiliser le cours que si f est continue en $a \in \mathbb{R}$, alors $g := x \mapsto 5 - \frac{1}{3} f(1-x)$ est continue en $1-a$.
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1.

1. Donner le DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0.
2. Donner le DL à l'ordre 3 de cos en 0.
3. En déduire le DL à l'ordre 6 de $\cos\big(\ln(1+x^2)\big)$.
4. En déduire que la limite
$$\lim_{0} \frac{\cos\big(\ln(1+x^2)\big) - 1}{x^4}$$
existe, est finie, et déterminer sa valeur.

Exercice 2.

1. Quel est l'ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}$ de $x \mapsto f(x) = \sinh(\arcsin x)$?
2. Sur quel intervalle f est-elle continue ? Montrer que f est bornée, et déterminer $\inf_D f$ et $\sup_D f$.
3. Sur quel intervalle est-elle dérivable ?
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in D$. On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \mapsto g(x) := f(x) - x$.
5. Montrer que $\frac{1}{2} < f(1) < \frac{9}{2}$.

Problème.
Pour tout $k \geq 1$, on définit les fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{k} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x. \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de f puis de g. On distinguera les cas $k = 1$ et $k > 1$.
2. Déterminer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{-\infty} f$, $\lim_{+\infty} g$ et $\lim_{-\infty} g$.
3. Que vaut $\sup_{\mathbb{R}} g$? Montrer que $\inf_{\mathbb{R}} g \leq 0$. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de cet inf.
4. Montrer que le graphe de g possède une asymptote en $-\infty$ dont on déterminera une équation.
5. Montrer que pour $k > 1$, g s'annule exactement en deux réels $L_k \geq 0$ et $M_k > L_k$. Que vaut L_k ?
6. Dans cette question uniquement, $k = 1$. Quel est l'ensemble des points fixes de f ?

On suppose à partir de maintenant que $k > 1$.

7. Montrer que $f(I) \subset I$, avec $I =]-\infty, 0]$. Même question pour $J = [0, M_k]$ et $K = [M_k, +\infty[$.
8. Montrer que $\ln 2 < M_2 < \ln 7$.
9. Tracer l'allure du graphe de f pour $k = 2$, ainsi que la droite d'équation $y = x$. On mettra en valeur la pente du graphe pour $x = 0$, ainsi que les points d'intersection entre le graphe et la droite. On ne demande pas de trouver la valeur précise de M_2.
10. On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $u_0 \in I \cup K$, la suite est croissante, que si $u_0 \in J$, la suite est décroissante (les intervalles I,J et K sont définis à la question 7.). Dans chacun de ces cas, montrer que $(u_n)_n$ a une limite finie ou infinie qu'on déterminera.
11. Montrer qu'il existe $0 < a_k < 1$, tel que pour tout $x \in [0, \ln(\frac{1+k}{2})]$, $|f'(x)| \leq a_k$. En déduire que si $u_0 \in]0, \ln(\frac{1+k}{2})]$, alors pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < u_0 a_k^n$. (il y avait une erreur dans l'énoncé d'origine)
12. Montrer que si $u_0 \in [0, M_k[$, il existe $C > 0$, telle que $0 \leq u_n \leq C a_k^n$.
13. Soit $(v_k)_{k \geq 2}$ une suite tendant vers $+\infty$, telle que pour tout $k \geq 2$, $e^{v_k} - 1 = k v_k$. Montrer que $v_k \sim_{k \to \infty} \ln k$.
14. En déduire que $M_k \sim_{k \to +\infty} \ln k$.