Examen session 1 - 2h00 - mai 2018

Les exercices et le problème sont indépendants. Aucun document ni instrument autorisés.

On admettra dans tout le sujet que $2 < e < 3$**.**

Question de cours.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner la définition de f continue en $a \in \mathbb{R}$ (avec des quantificateurs). Montrer sans utiliser le cours que si f est continue en $a \in \mathbb{R}$, alors $g := x \mapsto 5 - \frac{1}{3}f(1-x)$ est continue en $1-a$.
   Réponse. Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$, tel que si $0 < |x-a| < \delta$, alors $|f(x)-f(a)| \leq \epsilon$. Donc si $0 < |y-(1-a)| = |(1-y)-a| < \delta$, alors $|f(1-y) - f(1-(1-a))| \leq \epsilon$, et donc $|g(y) - g(1-a)| \leq \epsilon/3 \leq \epsilon$, donc g est continue en $1-a$.
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1.

1. Donner le DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0.
2. Donner le DL à l'ordre 3 de cos en 0.
3. En déduire le DL à l'ordre 6 de $\cos\big(\ln(1+x^2)\big)$.
4. En déduire que la limite
$$\lim_0 \frac{\cos\big(\ln(1+x^2)\big) - 1}{x^4}$$
   existe, est finie, et déterminer sa valeur.

Réponse. On a $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ en 0. Donc puisque $x^2 \to 0$ si $x \to 0$, on a
$$\ln(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$$
en 0. De plus
$$\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3).$$
Donc puisque $\ln(1+x^2) \to 0$ si $x \to 0$,
$$\cos\ln(1+x^2) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - x^4/2 + o(x^4))^2 + o(x^6).$$
Ce qui vaut
$$1 - \frac{x^4}{2}(1 - x^2/2 + o(x^2))^2 + o(x^6).$$

Ce qui vaut
$$1-\frac{x^4}{2}(1-x^2)+o(x^6),$$
Ce qui vaut
$$1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{2}+o(x^6).$$

Exercice 2.

1. Quel est l'ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}$ de $x \mapsto f(x) = \sinh(\arcsin x)$?
   Réponse. arcsin est définie et continue sur $[-1,1]$, et dérivable sur $]-1,1[$, et sinh est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la composée f est définie et continue sur $[-1,1]$, et dérivable sur $]-1,1[$.
2. Sur quel intervalle f est-elle continue ? Montrer que f est bornée, et déterminer $\inf_D f$ et $\sup_D f$.
   Réponse. arcsin et sinh sont croissantes, donc f l'est aussi, donc $\inf f = f(-1) = -\sinh(\pi/2)$ et $\sup f = f(1) = -f(-1)$.
3. Sur quel intervalle est-elle dérivable ?
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in D$. On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \mapsto g(x) := f(x) - x$.
   Réponse. Pour tout $x \in]-1,1[$,
   $$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{\cosh(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \geq 0$$
   et nulle ssi $x = 0$ et $\arcsin(x) = 0$ car $\cosh y \geq 1$ et égal ssi $y = 0$, et $\sqrt{1-x^2} \geq 1$ et égal ssi $x^2 = 0$. Donc la fonction est strictement croissante sur $]-1,1[$. Par le théorème de la bijection, elle est bijective sur son image $]g(-1), g(1)[$. En particulier, 0 a au plus un antécédent. Mais $g(0) = 0$, donc $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0.
5. Montrer que $\frac{1}{2} < f(1) < \frac{9}{2}$.
   Réponse. On a
   $$\sinh(\arcsin 1) = \sinh \pi/2 = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2} < e^{4/2}/2$$
   car $-e^{-\pi/2} < 0$, exp est croissante et $\pi < 4$. Donc $f(1) < e^2/2 < 9/2$ car $e < 3$. On a $e^{-\pi/2} < 1/e$ car $\pi/2 > 3/2 > 1$. De plus $e^{\pi/2} > e > 2$, donc $f(1) > \frac{2-1/e}{2} > 1/2$ car $1/e < 1$.

Problème.

Pour tout $k \geq 1$, on définit les fonctions
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - 1}{k} \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - x. \end{aligned}$$

1. Dresser le tableau de variations de f puis de g. On distinguera les cas $k = 1$ et $k > 1$.
   Réponse. Les fonctions e^x et x sont lisses, donc f et g sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $f' = e^x/k$ qui est strictement positive, et $g' = \frac{e^x - k}{k}$ qui est du signe de $x - \ln k$. g a donc un minimum en $\ln k$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et str. croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Si $k = 1$, g_1 a un minimum en $\ln 1 = 0$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $g_1 \geq g_1(0) = 0$ avec égalité ssi $x = 0$. Tableau de variations.
2. Déterminer $\lim_{+\infty} f$, $\lim_{-\infty} f$, $\lim_{+\infty} g$ et $\lim_{-\infty} g$.
   Réponse. Comme $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$ et $\lim_{-\infty} \exp = 0$, comme $-1/k$ et borné et $k > 0$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = -1/k$. Comme $-x = o(e^x/k) = o(e^x)$ en $+\infty$, $g \sim_{+\infty} f$ donc $\lim_{+\infty} g = +\infty$. De plus $g \sim_{-\infty} -x$ car $f = O(1)$ en $-\infty$, donc $\lim_{-\infty} g = +\infty$.
3. Que vaut $\sup_{\mathbb{R}} g$? Montrer que $\inf_{\mathbb{R}} g \leq 0$. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de cet inf.
   Réponse. On vient de voir que $\sup_{\mathbb{R}} g_k = +\infty$. De plus, les variations de g_k montrent que g_k possède un minimum en $\ln k$. De plus g_k est strictement décroissante entre 0 et $\ln k$, donc puisque $g_k(0) = 0$, on a $g_k(\ln k) < 0$ si $k > 1$ et $g_1(\ln 1) = g_1(0) = 0$.
4. Montrer que le graphe de g possède une asymptote en $-\infty$ dont on déterminera une équation.
   On a $g(x) - (-x - 1/k) = e^x/k \to_{-\infty} 0$, donc la droite d'équation $y = -x - 1/k$ est asympote en $-\infty$.
5. Montrer que pour $k > 1$, g s'annule exactement en deux réels $L_k \geq 0$ et $M_k > L_k$. Que vaut L_k ?
   Réponse. $g_k(0) = 0$. De plus, g_k est continue et strictement décroissante entre 0 et $\ln k$, donc ne s'annule qu'en 0 par le théorème de la bijection. g_k est strictement croissante sur $[\ln k + \infty[$, donc par le même théorème, $g_k([\ln k + \infty[) = [g_k(\ln k), \lim_{+\infty} g_k[= [m, +\infty[$. Comme $m < 0$, g_k s'annule une seule fois en un point $M_k > \ln k$.
6. Dans cette question uniquement, $k = 1$. Quel est l'ensemble des points fixes de f ?

   Réponse. Ce sont les zéros de g_1, donc d'après la question 1., c'est le singleton $\{0\}$.
   On suppose à partir de maintenant que $k > 1$.
7. Montrer que $f(I) \subset I$, avec $I =]-\infty, 0]$. Même question pour $J = [0, M_k]$ et $K = [M_k, +\infty[$.
   Réponse. f_k est strictement croissante sur ces intervalles et continue, donc par le théorème de la bijection, $f(I) =]\lim_{-\infty} f, f(0)] =]-1/k, 0] \subset I$. De même, $f(J) = [f(0), f(M_k)] = [0, M_k] = J$ et $f(K) = [f(M_k), \lim_{+\infty} f[= [M_k, +\infty[= K$.
8. Montrer que $\ln 2 < M_2 < \ln 7$.
   Réponse. D'après la question 5., $M_2 > \ln 2$. Ensuite, $g_2(\ln 7) = 3 - \ln 7 > 3 - \ln e^3$ car $e^3 > 2^3 > 7$ et ln croissante strictement. Comme g_k est strictement croissante entre $\ln 2$ et $+\infty$ et que $g_k(M_2) = 0$, on a $\ln 7 > M_2$.

9. Tracer l'allure du graphe de f pour $k = 2$, ainsi que la droite d'équation $y = x$. On mettra en valeur la pente du graphe pour $x = 0$, ainsi que les points d'intersection entre le graphe et la droite. On ne demande pas de trouver la valeur précise de M_2.

10. On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si $u_0 \in I \cup K$, la suite est croissante, que si $u_0 \in J$, la suite est décroissante (les intervalles I,J et K sont définis à la question 7.). Dans chacun de ces cas, montrer que $(u_n)_n$ a une limite finie ou infinie qu'on déterminera.
Réponse. Si $u_0 \in I$, $\forall n, u_n \in I$ par la question 7, de même pour J K. Or $g_k \geq 0$ sur $I \cup K$, donc $(u_n)_n$ est croissante dans ce cas. $g_k \leq 0$ sur J, donc si $u_0 \in J$, $(u_n)_n$ est décroissante. Elle y est minorée par 0, donc converge, et puisque f_k est continue, elle converge vers un point fixe $L \in [0, M_k]$. Si $u_0 = M_k$, la suite est constante et tend vers M_k. Si $u_0 \in I$ mais $u_0 < M_k$, alors $u_n \leq u_0$ donc à la limite $L \leq u_0 < M_k$ donc u_n converge vers 0. Si $u_0 \in I$, u_n est croissante majorée par 0 donc converge vers 0 qui est l'unique point fixe de J. Si $u_0 > M_k$, u_n diverge vers $+\infty$ car elle est croissante : si elle converge vers une limite finie, c'est un point fixe L qui vérifie $L \geq u_0 > M_k$ ce qui est impossible.

11. Montrer qu'il existe $0 < a_k < 1$, tel que pour tout $x \in [0, \ln(\frac{1+k}{2})]$, $|f'(x)| \leq a_k$. En déduire que si $u_0 \in]0, \ln(\frac{1+k}{2})]$, alors pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < u_0 a_k^{-n}$.
Réponse. On a $f' = e^x/k$ donc pour $x \in [0, \ln(\frac{1+k}{2})]$, comme e^x est croissante, $f'(x) \in [1/k, \frac{1+k}{2k}]$. Comme $k > 1$, $\frac{1+k}{2k} := a_k < 1$. Par le cours (TAF), comme $L = 0$ est point fixe, pour tout n, $|u_n| \leq |u_0| a_k^n$. Tout est positif, donc

12. Montrer que si $u_0 \in [0, M_k[$, il existe $C > 0$, telle que $0 \leq u_n \leq C a_k^n$.
Réponse. Comme $(u_n)_n$ est décroissante, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq \frac{1+k}{2k}$. Donc par la question précédente,
$$u_n \leq \max(u_0, \cdots, u_{n_0-1}, u_{n_0} a_k^{n-n_0}).$$
Maintenant soit C' telle que $\max(u_0, \cdots, u_{n_0-1}) \leq C' a_k^{n_0-1}$. On a alors le résultat avec $C = \max(C', u_{n_0} a_k^{-n_0})$.

13. Soit $(v_k)_{k\geq 2}$ une suite tendant vers $+\infty$, telle que pour tout $k \geq 2$, $e^{v_k} - 1 = k v_k$. Montrer que $v_k \sim_{k\to\infty} \ln k$.
Réponse. En passant au ln pour k assez grand (on peut car chacun des termes tendent vers $+\infty$), on a par définition $\ln\left(e^{M_k}(1 - e^{-M_k})\right) = \ln k + \ln M_k$, soit $M_k + \ln(1 - e^{-M_k}) = \ln k + o(M_k)$, donc $M_k + o(1) = \ln k + o(M_k)$, et donc $M_k \sim \ln k$.

14. En déduire que $M_k \sim_{k\to+\infty} \ln k$.
Réponse. On a $M_k > \ln k$ donc $M_k \to +\infty$ et $e^{M_k} - 1 = k M_k$, donc la question précédente conclut.