Devoir surveillé - 3 Avril 2017

Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur. Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Questions de cours.

A– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue en a.

B– Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$a)\quad \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^{3/2} - x} \qquad b)\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)} \qquad d)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{(\sin(x)+1)(\ln(x))^2}{x}$

Exercice 2. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ existe et est finie.

a) Montrer que si une suite de réels (x_n) converge vers $+\infty$, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

b) On suppose que la fonction f est T-périodique, c'est à dire que $T > 0$ est un réel tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\,.$$

Déduire de a) que f est une fonction constante.

Exercice 3.

Partie (I). Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)\,.$$

(a) Donner le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

(b) Calculer les valeurs de f en $x = 1$, $x = \sqrt{5}$, et $x = 5$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \sqrt{5}$.

(c) Déterminer la droite asymptote au graphe de f en $+\infty$.

(d) Tracer soigneusement le graphe de f (avec la tangente et l'asymptote déterminées précédemment).

Partie (II). On s'intéresse au comportement des suites définies par la relation de récurrence suivante : $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Dessiner la construction des 3 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = \dfrac{5}{2}$.

(b) Montrer que si $x \in [1, \sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, 5]$, alors $f(x) \in [\sqrt{5}, 5]$.

(c) Montrer que si $u_0 \in [\sqrt{5}, 5]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{5}$.

(d) Que se passe-t-il si $u_0 \in [1, \sqrt{5}]$?

Exercice 4. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}\,.$$

(a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

(b) Le prolongement est il dérivable en 0 ?

(c) Calculer

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x).$$