Corrigé du Devoir surveillé du 3 avril 2017

Questions de cours.

A– La fonction f étant dérivable en a,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon\,,$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < (\varepsilon + |f'(a)|)|x-a|\,,$$

Finalement, en posant $\eta' = \min\left(\eta, \dfrac{\varepsilon}{|f'(a)|+\varepsilon}\right)$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta' > 0,\ \forall x, 0 < |x-a| < \eta' \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\,.$$

c'est-à-dire f continue en a.

B– Le théorème de Rolle stipule que, pour $a < b$ réels, et f fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1. a) Pour $x > 0$ et différent de 1, $\dfrac{x^2-x}{x^{3/2}-x} = \dfrac{x-1}{x^{1/2}-1}$.

Or $\dfrac{x^{1/2}-1}{x-1}$ est le taux d'accroissement en 1 de la fonction $x^{1/2}$ qui par définition a pour limite quand x tend vers 1 la dérivée $\dfrac{1}{2}$ de la fonction en 1. Au final, la limite de $\dfrac{x^2-x}{x^{3/2}-x}$ quand x tend vers 1 est 2.

Beaucoup plus simple : $\dfrac{x-1}{x^{1/2}-1} = x^{1/2}+1$ a pour limite 2 lorsque x tend vers 1.

b) Pour x différent de 0, $\dfrac{e^x-e^{-x}}{x} = \dfrac{e^x-1}{x} + \dfrac{e^{-x}-1}{-x}$. Donc la limite de $\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ quand x tend vers 0 est 2.

c) Pour x différent de 0, $\dfrac{e^x-1}{\sin(x)} = \dfrac{e^x-1}{x}\dfrac{x}{\sin(x)}$. Donc la limite de $\dfrac{e^x-1}{\sin(x)}$ quand x tend vers 0 est 1.

d) Pour $x > 0$, $\left|\dfrac{(\sin(x)+1)(\ln(x))^2}{x}\right| \leq 2\dfrac{(\ln(x))^2}{x}$. Par croissance comparée et théorème des gendarmes, la limite de $\dfrac{(\sin(x)+1)(\ln(x))^2}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est 0.

Exercice 2. a) Puisque la fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x > M, |f(x)-\ell| < \varepsilon\,.$$

La suite (x_n) tendant vers $+\infty$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N, x_n > M$. Au final,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, |f(x_n)-\ell| < \varepsilon\,.$$

c'est-à-dire $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x+nT)$ et la suite $x_n = x+nT$ tend vers $+\infty$. Donc, par le a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$.

Exercice 3. Partie (I) Pour $x > 0$, on a $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+\dfrac{5}{x})$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1-\dfrac{5}{x^2})$ et $f(x)-x = \dfrac{1}{2}(\dfrac{5-x^2}{x})$.

Ce qui donne le tableau de variation :

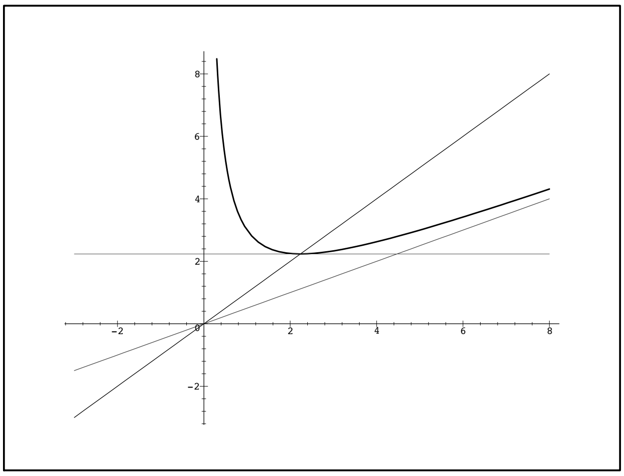
x	0		1		$\sqrt{5}$		5		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$		$-$

sur lequel apparaissent les valeurs $f(1) = 3$, $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, et $f(5) = 3$.

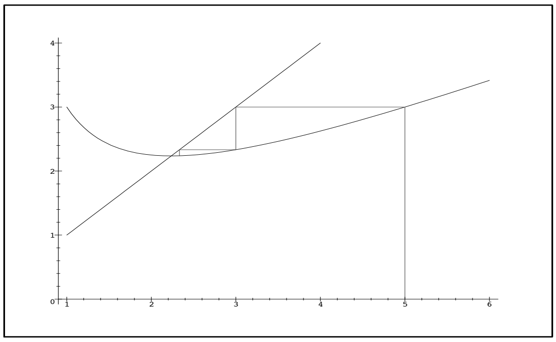
La tangente au graphe de f en $x = \sqrt{5}$ est horizontale ($f'(\sqrt{5}) = 0$).

Comme $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{2x} \to 0$ lorsque $x \to \infty$, la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote lorsque $x \to \infty$.

D'où le graphe :



Partie (II) On s'intéresse au comportement des suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Construction des 3 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 5/2$.



b) D'après le tableau de variation, si $x \in [1, \sqrt{5}]$, alors $f(x) \in [\sqrt{5}, 3] \subset [\sqrt{5}, 5]$ et si $x \in [\sqrt{5}, 5]$ alors $f(x) \in [\sqrt{5}, 3] \subset [\sqrt{5}, 5]$. Donc en particulier, $f([\sqrt{5}, 5]) \subset [\sqrt{5}, 5]$.
c) Donc, il est clair par récurrence que si $u_0 \in [\sqrt{5}, 5]$, alors $u_n \in [\sqrt{5}, 5]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors dans ces conditions, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ d'après le tableau. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par $\sqrt{5}$. Elle converge donc vers une limite ℓ. Du fait que la fonction f est continue la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$ mais elle converge aussi vers ℓ, donc $f(\ell) = \ell$ d'où $\ell = \sqrt{5}$ car d'après le tableau f a $\sqrt{5}$ pour unique point fixe.
d) Si $u_0 \in [1, \sqrt{5}]$, d'après le tableau, $u_1 = f(u_0) \in [\sqrt{5}, 3] \subset [\sqrt{5}, 5]$. On est donc ramené au cas précédent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi dans ce cas vers $\sqrt{5}$.

Exercice 4.
a) Pour tout $x > 0$,

$$\frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

Donc $f(x)$ tend vers 0 quand x tens vers 0^+. f est donc prolongeable par continuité à droite de 0 en posant $f(0) = 0$.
b) Pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

Donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $+\infty$ quand x tens vers 0^+. Le prolongement n'est donc pas dérivable à droite de 0.
c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{e^x(2x - 1) + 1}{x - 0}\right).$$

La fonction $g(x) = e^x(2x - 1)$ est dérivable en 0 avec $g'(0) = 1$. Donc la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0^+ est $+\infty$.