Devoir surveillé - 7 mars 2017 8h-10h

Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en compte par le correcteur. Toute réponse doit être expliquée, . *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Questions de cours.

A– Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, elle est bornée.

B– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer la propriété de continuité en a à l'aide de quantificateurs.

b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers a quand n tend vers l'infini. Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$, quand n tend vers l'infini.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + n - 1}{n} .$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on déterminera.

Exercice 2.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive (que l'on notera u_n dans la suite de l'exercice).

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$.

3) Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on notera ℓ.

5) Déterminer la limite de (u_n^n) et en déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3.

Déterminer les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $u_n = \frac{2^n}{n!}$
2. $v_n = \frac{\ln(n^2+2n+3)}{\ln(n)}$
3. $w_n = \sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}$.