Corrigé du Devoir surveillé du 7 mars 2017

Questions de cours.

A–Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n\geq n_\varepsilon,\ |u_n-\ell|<\varepsilon\,.$$

En utilisant $\varepsilon=1$ et l'inégalité triangulaire, on obtient que :

$$\forall n\geq n_1,\ |u_n|<|\ell|+1\,.$$

Donc $\forall n\geq 0$, $|u_n|\leq C$, où $C=\max\{|u_0|,\cdots,|u_{n_1-1}|,|\ell|+1\}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

B–
a) "La fonction f est continue au point a" :
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x, |x-a|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.
b) Soit (x_n) une suite de points qui converge vers a quand n tend vers $+\infty$: $\forall\eta>0,\ \exists n_0,\ \forall n\geq n_0,\ |x_n-a|<\eta$.
En groupant avec l'énoncé a), il vient :
$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall n\geq n_0,\ |x_n-a|<\eta\Rightarrow|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$.
Autrement dit, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Exercice 1. 1) Montrons par récurrence que $u_n\geq 1\,(P_n)\ \forall n\in\mathbb{N}$.
La propriété (P_0) est vraie et si (P_n) l'est, on a $u_{n+1}=\frac{u_n+n}{n+1}\geq 1$ c'est-à-dire (P_{n+1}). Donc (P_n) est vraie $\forall n\in\mathbb{N}$ par récurrence.
2) Pour $n\geq 1$, $u_n-u_{n-1}=\frac{u_{n-1}(1-n)+n-1}{n}=\frac{(n-1)(1-u_{n-1})}{n}\leq 0$ par 1). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, elle est convergente vers un certain ℓ réel. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n=\frac{u_{n-1}}{n}+\frac{n-1}{n}\,.$$

En passant à la limite, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

Exercice 2.
1) et 2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction croissante. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue f_n prend toute valeur entre $f_n(0)=-4$ et $f_n(\frac{2}{3})=\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$ et une seule fois du fait de la stricte croissance.
En particulier, comme $0\in[-4,\left(\frac{2}{3}\right)^n]$, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $u_n\in\left]0;\dfrac{2}{3}\right[$.
3)Pour tout $x\in]0;1[$, et $n\geq 0$, $x^{n+1}<x^n$ donc $f_{n+1}(x)<f_n(x)$.
4)Pour tout $n\geq 0$, $f_n(u_{n+1})>f_{n+1}(u_{n+1})$ par 2) et 3). Donc $f_n(u_{n+1})>0$. De plus, $f_n(u_n)=0$ avec f_n strictement croissante. Donc $u_n\leq u_{n+1}$ i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, cette suite est majorée : elle est donc convergente vers un certain réel ℓ.
5)Pour tout $n\geq 0$, on a $u_n^n+9u_n^2-4=0$. Puisque $\ell\in\,]0;1[$, u_n^n tend vers 0. Ainsi, on a $9\ell^2-4=0$, ce qui pour $\ell>0$, implique que $\ell=\frac{2}{3}$.

Exercice 3. La suite u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ par croissance comparée. Pour la suite v_n, on écrit que :

$$v_n=\frac{\ln(n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}))}{\ln(n)}=2+\frac{\ln(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{\ln(n)}\,.$$

En conséquence, v_n tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$. Pour la suite w_n, on écrit que :

$$w_n=\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}=\frac{2}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}$$

Donc la suite w_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.