

## Devoir surveillé - 1h30 - 13 février 2018

**Toute réponse doit être expliquée.** *En particulier, si votre réponse est un exemple, ou un contre-exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification. Les exercices sont indépendants.*

**Question de cours.** Soit  $(u_n)_n$  une suite décroissante. Montrer que si

$$m := \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

ne vaut pas  $-\infty$ , alors  $(u_n)_n \rightarrow_n m$ .

### Exercice 1.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ , tel que  $x^2 \notin \mathbb{Q}$ . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n + mx^{1/p} \notin \mathbb{Q}.$$

2. Existe-t-il une suite  $(u_n)_n$  d'irrationnels convergeant vers un rationnel ?

3. Existe-t-il une suite  $(u_n)_n$  de rationnels convergeant vers un irrationnel ?

### Exercice 2.

1. On rappelle que  $[x]$  est la partie entière de  $x$ . Déterminer l'ensemble

$$B := \{x \in \mathbb{R}, [x] = x^2\}.$$

2. Soit

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+, |x^2 - 3| \leq |x + 3|\}.$$

Décrire  $A$  sous forme d'intervalle ou de réunions d'intervalles.

### Exercice 3.

Soit

$$C := \left\{ \frac{2x^2 + y^2}{1 + x^2 + 2y^2}, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.  $C$  est-il minorée ? Majorée ?

2. Déterminer  $\inf C$  et  $\sup C$ .

3. Ces bornes sont-elles atteintes par un élément de  $C$  ?

### Exercice 4.

Pour tout  $n \geq 2$ , on définit

$$u_n = \frac{\ln(n^2 - 2) + (n + 1)^2 - n(n + 2/n)}{n^{3/2} + n^{2/3} - \cos n}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est bien définie.
2. Montrer que la suite  $(u_n \sqrt{n})_n$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 5.** Soit la suite  $(u_n)_n$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{n + \sin(1/n)}{n + 1}$ .

1. Montrer que  $u_n$  a une limite  $L$  qu'on déterminera.
2. Trouver  $N \in \mathbb{N}$ , tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - L| \leq 1/100.$$