Devoir surveillé - 1h30 - 13 février 2018

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un exemple,ou un contre-exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification. Les exercices sont indépendants.*

Question de cours. Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante. Montrer que si $m = \inf u_n, n \in \mathbb{N}$ n'est pas $-\infty$, alors $(u_n)_n \to_n m$.

Soit$\epsilon > 0$. Par définition de l'inf, il existe $x \in \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, tel que $m \leq x \leq m + \epsilon$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, $m \leq x = u_N \leq m + \epsilon$. Mais $u_n)_n$ est décroissante, donc

$$\forall n \geq N, u_n \leq u_N \leq m + \epsilon,$$

et $m \leq u_n$ car m est un minorant de la suite. Donc

$$\forall n \geq N, u_n \in [m, m + \epsilon] \subset [m - \epsilon, m + \epsilon]$$

ce qui signifie que $u_n \to m$.

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, tel que $x^2 \notin \mathbb{Q}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*, n + mx^{1/p} \notin \mathbb{Q}.$$

   Supposons le contraire : il existe $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{Q}$, $n + mx^{1/p} = r$. Alors $x^2 = (\frac{r-n}{m})^{2p} \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction.

2. Existe-t-il une suite $(u_n)_n$ d'irrationnels convergeant vers un rationnel ?

   La suite $(\sqrt{2}/n)_n$ converge vers 0 car $1/n \to 0$, et pour tout n, $\sqrt{2}/n \notin \mathbb{Q}$, sans quoi il existe $r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} = rn \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux d'après le cours.

3. Existe-t-il une suite $(u_n)_n$ de rationnels convergeant vers un irrationnel ?

   D'après le cours pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + 1/n$ il existe $x_n \in \mathbb{Q}$. Donc par le théorème des gendarmes, $x_n \to \sqrt{2}$ mais $x_n \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2.

1. Quels sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\lfloor x \rfloor = x^2$?

   0 et 1 sont solutions. Si $x < 0$, $\lfloor x \rfloor \leq -1$ donc l'équation n'a pas de solution. Comme x^2 est entier, $x^2 = 0$ et alors $x = 0$, ou $x^2 = 1$ et alors $x = 1$, ou $x^2 \geq 2$, et alors $x > 1$. Mais si $x > 1$, $x^2 > x$, donc $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x < x^2$, donc il n'y a pas de solutions. Les solutions sont donc 0 et 1.

2. Soit
$$A = \{x \in \mathbb{R}_+, |x^2 - 3| \leq |x+3|\}.$$
Décrire A sous forme d'intervalle ou de réunions d'intervalles.

Si $x \geq \sqrt{3}$, alors l'inéquation est $x^2 - 3 \leq x + 3$, soit $p(x) := x^2 - x - 6 \leq 0$. Le discriminant du polynôme est $\Delta = 25$, donc les racines $r_\pm = (1 \pm 5)/2$, soit -2 et 3. $p(x) \leq 0$ ssi $x \in [-2, 3]$. Donc $A \cap [\sqrt{3}, \infty[= [\sqrt{3}, 3]$.
Si $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, alors l'inéquation est $3 - x^2 \leq x + 3$ soit $q(x) := x^2 + x \geq 0$ de racines -1 et 0, donc positif hors de $[-1, 0]$. Donc $A \cap [0, \sqrt{3}] = [0, \sqrt{3}]$.
Au total, $A = [0, 3]$.

Exercice 3. Soit
$$A = \{\frac{2x^2 + y^2}{1 + x^2 + 2y^2}, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1. A est-il minorée ? Majorée ?

   Les numérateur et dénominateur des éléments de A sont positifs donc A est minoré par 0. On a $2x^2y^2 < 2x^2y^2 + 2$ et $1 + x^2 + 2y^2 \geq 1 + x^2 + y^2$ donc
$$\frac{2x^2 + y^2}{1 + x^2 + 2y^2} < \frac{2x^2 + 2y^2 + 2}{1 + x^2 + y^2} = 2$$
   donc A est majoré par 2.
2. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.
   Le minorant 0 est dans A (avec $x = y = 0$) donc $0 = \min A = \inf A$. La suite $(\frac{2n^2}{1+n^2})_n$ est dans A et est équivalente à la suite $2n^2/n^2 = 2$, donc converge vers le majorant 2, qui est donc la borne supérieure de A.
3. Ces bornes sont-elles atteintes par un élément de A ?

   Oui pour l'inf (cf ci-dessus). On a vu que les éléments étaient < 2 donc il n'y a pas de max.

Exercice 4. Pour tout $n \geq 2$, on définit
$$u_n = \frac{\ln(n^2 - 2) + (n+1)^2 - n(n + 2/n)}{n^{3/2} + n^{2/3} - \cos n}.$$

1. Mongrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n\sqrt{n})_n$ converge et déterminer sa limite.

Le numérateur vaut $\ln(n^2 - 2) + 2n - 1$. Pour $n \geq 2$, $n^2 - 2 \geq 2$ donc le log est bien défini. De plus pour $n \geq 1$, $n^{3/2} + n^{2/3} - \cos n \geq 1$ donc le dénominateur est non nul.

On a $0 \leq \ln(n^2 - 2) \leq \ln(n^2)$ car ln est croissante, et $\ln n^2 = 2 \ln n = o(n)$. De plus $-1 = o(n)$ donc $2 \ln n + 2n - 1 \sim_n 2n$. De plus, $n^{2/3} = o(n^{3/2})$ donc $n^{3/2} + n^{2/3} \sim_n n^{3/2}$. Au total, $u_n \sim_n 2/\sqrt{n}$.

Exercice 5. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n + \sin(1/n)}{n+1}$.

1. Montrer que u_n a une limite L qu'on déterminera.

   On a $\sin(1/n) = O(1) = o(n)$ donc $n + o(n) \sim n$. De plus $n + 1 \sim n$. Au total, $u_n \sim 1$ donc u_n tend vers 1.
2. Trouver $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - L| \leq 1/100.$$

   On a

$$|u_n - 1| = |\frac{\sin(1/n) - 2}{n+1}|.$$

   Donc si $2/n \leq 1/100$, c'est-à dire $n \geq 200$, alors $|u_n - 1| = |\frac{\sin(1/n)-2}{n+1}| \leq 2/n \leq 1/100$.