Devoir surveillé - 6 février 2017 13h30-15h

Toute réponse doit être expliquée. *En particulier, si votre réponse est un (contre-)exemple, il faut expliquer pourquoi c'en est un. Seuls les résultats du cours peuvent être utilisés sans justification.*

Questions de cours.

(a) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Donner la définition de la borne supérieure de A.

(b) Donner la définition d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que pour tous x et y réels on a $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$.

(d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

  (i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$.

  (ii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 1.

(a) Montrer que le nombre $\sqrt{2}-\sqrt{6}+3$ est irrationnel [On peut admettre que $\sqrt{2}$ est irrationnel].

(b) Donner un exemple de deux nombres x et y irrationnels tels que xy soit rationnel mais $x+y$ soit irrationnel.

(c) Est-ce que tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ qui contient deux nombres irrationnels distincts contient aussi une infinité de rationnels ? Motiver votre réponse par une démonstration ou par un contre-exemple.

Exercice 2. On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{ r(x,y) = \frac{x+y}{x+y+3} \mid x \in [-1,1],\ y \in [-1,1] \right\}.$$

(a) Montrer que A a une borne supérieure finie et une borne inférieure finie.

(b) Montrer que l'ensemble A a un plus petit élément m et un plus grand élément M que l'on déterminera. $\left[\text{Indication : on pourra écrire } r(x,y) = 1 - \frac{3}{x+y+3}\right]$

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1}$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer en fonction de ε un rang N à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et la valeur de sa limite.