Questions de cours.

(a) *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Donner la définition de la borne supérieure de A.*
La borne supérieure $\sup A$ de A est le plus petit des majorants de A si A est majoré et $\sup A = +\infty$ si A n'est pas majoré.
Dans le cas où A est majoré, $\alpha = \sup A$ est le nombre qui est un majorant de A et vérifie :
(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha \iff (ii)$ $\exists (a_n)$ une suite de A telle que $\lim a_n = \alpha$.

(b) *Donner la définition d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.*
Un sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}$ est borné si :
$\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ (respectivement un minorant et un majorant de B) tels que $\forall x \in B,\ m \leq x \leq M$.

(c) *Montrer que pour tous x et y réels on a $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$.*
On a $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$ d'après l'inégalité triangulaire ce qui peut s'écrire aussi $|x|-|y| \leq |x-y|$.
De même, en échangeant le rôle de x et y : $|y|-|x| \leq |x-y| \iff |x|-|y| \geq -|x-y|$.
Au total, on a l'encadrement suivant : $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y| \iff \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.
Autre façon :
$|x-y|^2 = x^2+y^2-2xy \geq x^2+y^2-2|x||y| = \big||x|-|y|\big|^2$ car $-2xy \geq -2|x||y|$ (en effet $-2xy = \pm 2|x||y|$).

(d) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :*

   (i) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$: (i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.*

   (ii) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : (ii) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.*

Exercice 1.

(a) *Montrer que le nombre $\sqrt{2}-\sqrt{6}+3$ est irrationnel [On peut admettre que $\sqrt{2}$ est irrationnel].*

Il suffit de montrer que $x = \sqrt{2}-\sqrt{6}$ est irrationnel car ajouter le rationnel 3 à un irrationel donne un irrationnel. En posant $y = \sqrt{2}+\sqrt{6}$, on a $xy = 2-6 = -4$ donc x rationnel $\iff$ y rationnel. Mais alors si x était rationnel, $x+y = 2\sqrt{2}$ le serait aussi, ce qui contredirait le fait admis que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Donc x est irrationnel, ce qu'il fallait montrer.

(b) *Donner un exemple de deux nombres x et y irrationnels tels que xy soit rationnel mais $x+y$ soit irrationnel.*
Avec les notations précédentes, on a $xy = -4$ rationnel et x, y et $x+y = 2\sqrt{2}$ irrationnels.
Exemple encore plus simple : $x = y = \sqrt{2}$.

(c) *Est-ce que tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ qui contient deux nombres irrationnels distincts contient aussi une infinité de rationnels ? Motiver votre réponse par une démonstration ou par un contre-exemple.*
Non : par exemple l'ensemble à deux éléments irrationnels $A = \{\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$ ne contient aucun rationnel.

Exercice 2. *On considère le sous-ensemble* $A = \big\{r(x,y) = \dfrac{x+y}{x+y+3} \mid x \in [-1,1],\, y \in [-1,1]\big\}$.

(a) *Montrer que A a une borne supérieure finie et une borne inférieure finie.*
Pour ceci, il suffit de montrer que la valeur absolue des éléments de A est majorée. On a en effet, si $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ on a $|r(x,y)| = \dfrac{|x+y|}{|x+y+3|} \leq \dfrac{2}{1} = 2$ obtenu en majorant le numérateur par 2 et minorant le dénominateur par 1.

(b) *Montrer que l'ensemble A a un plus petit élément m et un plus grand élément M que l'on déterminera.* [*Indication : on pourra écrire* $r(x,y) = 1 - \dfrac{3}{x+y+3}$]
On a $r(x,y) = 1 - \dfrac{3}{x+y+3}$ qui est une fonction croissante de $X = x+y+3$ qui prend donc sa plus petite valeur lorsque $X = -1-1 = -2$ et sa plus grande valeur lorsque $X = x+y$ prend sa plus grande valeur $X = 1+1 = 2$ et donc $m = \min A = -2$ et $M = \max A = 2/5$.

Exercice 3. *On considère la suite (u_n) définie par :* $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{2n+1}$ *Pour $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer en fonction de ε un rang N à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et la valeur de sa limite.*

On a $u_n \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \iff |u_n - 1| = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2n+1} \leq \varepsilon$ et comme $\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2n+1} \leq \dfrac{2}{2n+1}$ on a $\dfrac{2}{2n+1} \leq \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$ implique $u_n \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Or $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon \iff n \geq N(\varepsilon)$ où $N(\varepsilon)$ est la partie entière de $\dfrac{1}{\varepsilon}+1$.